Теория Галуа, письменное задание 1: тензорные произведения, инварианты групп и поля

Число очков за это задание вычисляется по формуле $\frac{4}{3}s - \max(s-5, 0)$, где s – сумма баллов за задачи. Можно ссылаться на теоремы из сданного студентом курса алгебры для ВШЭ, но нужно привести точную формулировку теоремы, и сказать, какой именно курс ее содержал. Кроме того, студент, ссылающийся на какую-то теорему. берет на себя обязанность рассказать ее доказательство, по первому требованию.

Решение письменное, сдается до 22:00 пятницы, 18-го января (можно положить на стол рядом с комнатой 210). Через неделю будет обсуждение задач, пожалуйста, будьте готовы рассказать то, что вы нарешали. Также решение можно сдать устно во время семинара.

Успешно учащиеся студенты должны получать по 10 баллов в неделю, во избежание пересдач и других эксцессов.

Задача 1.1. Пусть V – конечномерное пространство над полем k, снабженное действием группы G. Всегда ли в $V \otimes_k V$ найдется ненулевой G-инвариантный вектор?

а. [1 балл] G конечна, $k = \mathbb{R}$.

б. [3 балла] G бесконечна, $k = \mathbb{R}$.

в. [2 балла] G конечна, $k = \mathbb{Q}$

г. [2 балла] G конечна, k – конечное поле

д. [2 балла] G конечна, $k = \mathbb{C}$

е. [5 баллов] G конечна, $k = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Задача 1.2. V – векторное пространство, не обязательно конечномерное. **Естественное отображение** $V \longrightarrow V^{**}$ есть отображение, которое инвариантно относительно канонического действия группы $GL(V)$ (постройте каноническое действие самостоятельно, если вы не помните определение).

а. [1 балл] Постройте нетривиальное естественное отображение $V \longrightarrow V^{**}$. Докажите, что оно инъективно.

б. [4 балла] Проверьте, что такое отображение единственно с точностью до множителя, или убедитесь, что это не так.

в. [2 балла] Докажите, что естественное вложение $V \longrightarrow V^{**}$ сюръективно $\Leftrightarrow$ V конечномерно.

Задача 1.3. A, B – векторные пространства (не обязательно конечномерные). **Естественное отображение** $A^* \otimes B \longrightarrow \operatorname{Hom}(A, B)$ есть отображение, которое инвариантно относительно канонического действия группы $GL(A) \times GL(B)$.

а. [2 балл] Постройте нетривиальное естественное отображение

$$A^* \otimes B \longrightarrow \operatorname{Hom}(A, B).$$

Докажите, что построенное вами отображение инъективно.

б. [4 балла] Докажите, что такое отображение единственно с точностью до множителя.

в. [3 балла] Всегда ли это изоморфизм?

Определение 1.1. Групповая алгебра группы G над полем k есть векторное пространство над k с базисом G, где умножение определено на векторах базиса как в G, а на всех остальных векторах по линейности.

Определение 1.2. Двусторонний идеал в алгебре A есть такое подмножество $I \subset A$, что $A \cdot I \subset I$ и $I \cdot A \subset I$.

Задача 1.4 (2 балла). Докажите, что в групповой алгебре $k[G]$ любой группы найдется нетривиальный двусторонний идеал.

Задача 1.5 (4 балла). Найдите все двусторонние идеалы в $\mathbb{R}[G]$, где $G = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Задача 1.6 (5 баллов). Пусть K есть поле, а $\phi : K \longrightarrow K$ – гомоморфизм. Докажите, что ϕ инъективно. Всегда ли ϕ сюрьективно?