ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ГРУППЫ 2: Функционал длины

Правила: Зачеты по листкам бывают двух типов: когда сданы все (или или 2/3) задачи со звездочками, либо все (или 2/3) задачи без звездочек. Задачи с двумя звездочками можно не сдавать. Сдавшим k задач с двумя звездочками разрешается не сдавать $2k$ задач со звездочками или факториалом из того же листочка. Задачи, обозначенные (!), следует сдавать и тем и другим.

Если сданы 2/3 задач со звездочками и (!), студент получает $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) двух – $10t$ баллов.

Если сданы 2/3 задач без звездочки и с (!), студент получает $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) трех – $10t$ баллов.

Эти виды оценок не складываются, то есть больше $10t$ за листочек получить нельзя.

Коэффициент t равен 1.5, если задачи сданы не позже, чем через 21 дней после выдачи, 1, если между 21 и 35 днями, и 0.7, если позже.

Результаты сдачи записываются на листке ведомости, которая выдается студенту; просьба не терять ее, больше нигде результаты храниться не будут.

2.1. Линейная связность.

Определение 2.1. Пусть дано топологическое пространство M. Подмножество $W \subset M$ называется **открытозамкнутым**, если оно открыто и замкнуто. M называется **связным**, если любое открытозамкнутое подмножество M это либо $\emptyset$, либо само M. Подмножество $Z \subset M$ называется **связным**, если оно связно в индуцированной топологии.

Определение 2.2. Пусть M – топологическое пространство. **Путем** в M называется непрерывное отображение $[a,b] \xrightarrow{\phi} M$. В этом случае говорится, что путь ϕ **соединяет точки** $\phi(a)$ **и** $\phi(b)$. M называется **линейно связным**, если любые две точки M можно соединить путем $[a,b] \xrightarrow{\phi} M$.

Задача 2.1 (!). Докажите, что линейно связное пространство связно.

Задача 2.2. Докажите, что объединение линейно связных подмножеств M, содержащих выбранную точку $x \in M$, линейно связно.

Определение 2.3. Объединение всех линейно связных подмножеств, содержащих какую-то фиксированную точку x, называется **компонентой линейной связности** M.

Задача 2.3. Рассмотрим следующее подмножество $X \subset \mathbb{R}^2$: график функции $\sin(1/t)$, объединенный с отрезком $[(0,1),(0,-1)]$. Докажите, что X локально компактно, связно, и не линейно связно. Найдите компоненты линейной связности.

Задача 2.4 (*). Найдите компактное, связное метризуемое топологическое пространство, имеющее бесконечное количество компонент линейной связности.

Определение 2.4. Топологическое пространство M называется локально связным (локально линейно связным), если каждая окрестность точки $x \in M$ содержит связную (линейно связную) окрестность x

Задача 2.5. Постройте связное, линейно связное, но не локально линейно связное пространство.

Задача 2.6. Пусть M – локально линейно связное, связное пространство. Докажите, что оно линейно связно.

Задача 2.7. Пусть M – локально линейно связное пространство. Докажите, что M является несвязным объединением своих компонент линейной связности.

Задача 2.8 (*). Пусть H – вещественное гильбертово пространство, то есть пространство последовательностей $\{a_i \in \mathbb{R}\}$, удовлетворяющих $\sum a_i^2 \leqslant \infty$, с метрикой вида $d(\{x_i\},\{y_i\}) = \sum |x_i - y_i|^2$. Обозначим за $H_0 \subset H$ множество всех последовательностей $\{a_i\}$, у которых все a_i кроме конечного числа, рациональны. Верно ли, что H связно? Линейно связно?

2.2. Функционал длины

Определение 2.5. Пусть M – топологическое пространство. Говорится, что на M **задан класс допустимых путей**, если задано множество путей $[a,b] \longrightarrow M$ такое, что

а. Для любых двух путей $[a,b] \xrightarrow{\gamma_1} M$ и $[b,c] \xrightarrow{\gamma_2} M$, удовлетворяющих $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$, путь $\gamma: [a,c] \longrightarrow M$, равный γ_1 на $[a,b]$ и γ_2 на $[b,c]$, тоже допустим. Такая операция называется "склейка путей".

б. Если $\phi: [a,b] \longrightarrow [c,d]$ линейное отображение, а путь $\gamma: [c,d] \longrightarrow M$ допустим, путь $\phi \circ \gamma$ тоже допустим.

в. Для каждого пути $[a,b] \xrightarrow{\gamma} M$, и отрезка $[c,d] \subset [a,b]$, ограничение $\gamma\Big|_{[c,d]}$ – тоже допустимый путь.

Задача 2.9. Докажите, что кусочно-линейные пути в $\mathbb{R}^n$, кусочно-полиномиальные, кусочно-дифференцируемые образуют допустимый класс путей.

Определение 2.6. Пусть M – топологическое пространство, снабженное допустимым классом путей. Функционал $L(\gamma)$, отображающий допустимые пути в числа, называется **функционалом длины**, если он удовлетворяет следующим условиям.

а. (аддитивность длины) Для любого пути $\gamma: [a,c] \longrightarrow M$, и любого $b \in [a,c]$, $L(\gamma) = L(\gamma\Big|_{[a,b]}) + L(\gamma\Big|_{[b,c]})$, где $\gamma\Big|_{[c,d]}$ обозначает ограничение пути, то есть функции $\gamma: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ на отрезок $[c,d] \subset [a,b]$.

б. (непрерывность длины пути как функции от координат концов) Для любого пути $\gamma: [a,c] \longrightarrow M$, функция $L(\gamma\Big|_{[a,b]})$ непрерывно зависит от $b \in [a,c]$.

в. Длина не меняется при замене параметра: если $\phi: [a,b] \longrightarrow [c,d]$ – гомеоморфизм отрезков, а $\gamma: [c,d] \longrightarrow M$ и $\phi \circ \gamma: [a,b] \longrightarrow M$ – допустимые пути, то $L(\gamma) = L(\phi \circ \gamma)$.

г. (длина пути согласована с топологией) Пусть Z – замкнутое подмножество M, а $x \notin Z$ точка, не лежащая на Z. Тогда существует число $\varepsilon > 0$ такое, что любой путь, соединяющий x с какой-то точкой Z, имеет длину $\geqslant \varepsilon$.

Задача 2.10. Пусть M – топологическое пространство, снабженное классом допустимых путей и функционалом длины. Определим функцию $d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}^{\geqslant 0}$, положив $d(x,y) := \inf_\gamma L(\gamma)$, где инфимум берется по всем путям, соединяющим x и y. Докажите, что это метрика.

Определение 2.7. Такая функция называется **внутренняя метрика, определенная по функционалу длины**

Задача 2.11. Пусть M – топологическое пространство, снабженное классом допустимых путей и функционалом длины, а d – соответствующая внутренняя метрика. Докажите, что (M,d) локально линейно связно.

Задача 2.12 (!). Пусть M – топологическое пространство с классом допустимых путей и функционалом длины, d – внутренняя метрика, а $(M,d) \longrightarrow M$ тождественное отображение из M с топологией, которая индуцирована внутренней метрикой, в M с топологией, которая задана на нем изначально. Докажите, что это отображение непрерывно.

Задача 2.13 (**). Постройте пример топологического пространства M, снабженного классом допустимых путей и функционалом длины, таким, что $(M,d) \longrightarrow M$ – не гомеоморфизм, хотя (M,d) линейно связно и локально линейно связно.

Задача 2.14. Пусть $M = \mathbb{R}^n$, класс допустимых путей - кусочно-линейные пути (то есть ломаные), со звеньями $[x_i, x_{i+1}]$, а длина пути определяется формулой $L(\gamma) = \sum |d(x_i, x_{i+1})|$. Докажите, что внутренняя метрика равна обычной.

Задача 2.15. "поход по болоту" Пусть $M = \mathbb{R}^n$, класс допустимых путей - кусочно-линейные пути (то есть ломаные), со звеньями $[x_i, x_{i+1}]$, $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{>0}$ непрерывная, положительная функция, а длина пути определяется формулой

$$L(\gamma) = \sum \int_{[x_i, x_{i+1}]} f$$

(интеграл от f по отрезку $[x_i, x_{i+1}]$). Докажите, что это функционал длины, а внутренняя метрика индуцирует обычную топологию.

Определение 2.8. Такая метрика называется **конформно плоской**.

Задача 2.16 (*). Дайте определение метрики Пуанкаре на диске.[1] Докажите, что метрика Пуанкаре на диске – конформно плоская.

[1] Это пространство также называется "плоскость Лобачевского".

Определение 2.9. Пусть $M = \mathbb{R}^n$ или его открытое подмножество, а класс допустимых путей – кусочно-гладкие пути. Предположим, что для каждой точке $x \in M$ задано скалярное произведение $g_x \in \mathsf{Sym}^2 T_x^*M$ на T_xM (здесь T_x^*M – кокасательное пространство, а $\mathsf{Sym}^2 T_x^*M$ – линейное пространство билинейных, симметричных форм на T_xM. Предположим, что g_x гладко зависит от x.[2] Определим функционал длины пути $\gamma: [a,b] \longrightarrow M$ формулой

$$L(\gamma) := \int_a^b \sqrt{g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))}dt$$

Соответствующая внутренняя метрика на M называется **римановой метрикой**, а форма g_x – **римановой формой** этой метрики.

Задача 2.17 (!). Докажите, что топология, индуцированная римановой метрикой, эквивалентна обычной.

Определение 2.10. Гладкое подмногообразие $\mathbb{R}^n$ есть замнутое подмножество $M \subset \mathbb{R}^n$, такое, что для каждой точки $x \in M$ найдется окрестность $U \ni x$ и диффеоморфизм U на открытый шар B, ограничение которого на $M \cap U$ определяет гомеоморфизм $M \cap U$ и гиперплоскости $B \cap \mathbb{R}^k$.

Задача 2.18. Докажите, что $(n-1)$-сфера $\{z \in \mathbb{R}^n, |z| = 1\}$ есть гладкое подмногообразие в $\mathbb{R}^n$.

Задача 2.19 (*). Постройте гладкое подмногообразие в $\mathbb{R}^6$, гомеоморфное $\mathbb{R}P^2 = S^2/\{\pm 1\}$.

Задача 2.20. Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ гладкое подмногообразие, а на $\mathbb{R}^n$ задана риманова форма. Определим класс допустимых путей в M как множество всех кусочно гладких путей в $\mathbb{R}^n$, которые лежат в M, и риманов функционал пути обычной формулой

$$L(\gamma) := \int_a^b \sqrt{g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))}dt.$$

Докажите, что полученная из этого функционала внутренняя метрика задает стандартную топологию на M.

Определение 2.11. Такая метрика называется **римановой**, а M – **римановым многообразием**.

Задача 2.21. Рассмотрим риманову метрику d на

$$S^n = \left\{ (x_1, ..., x_{n+1}) \ \mid \ \sum x_i^2 = 1 \right\},$$

полученную из обычной метрики на $\mathbb{R}^{n+1}$. Пусть $x, y \in S^n$ – две точки, O – центр сферы, то есть точка $(0, 0, ..., 0)$. Докажите, что $d(x, y)$ есть угол треугольника xOy, измеренный в радианах.

[2] Более точно, следовало бы сначала сказать, что все пространства T_xM отождествлены, поскольку M – открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$, а значит, g есть отображение из M в $\mathsf{Sym}^2 \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$; и потребовать гладкости этого отображения.

Задача 2.22 (*). Определите абстрактное риманово многообразие (не обязательно вложенное в $\mathbb{R}^n$). Докажите, что любое компактное многообразие M допускает гладкое вложение в $\mathbb{R}^n$, для достаточно большого n. Докажите, что любая риманова форма на M может быть получена ограничением из какой-то римановой формы на $\mathbb{R}^n$.

2.3. Полунепрерывные функционалы длины

Определение 2.12. Пусть $\gamma_i: N \longrightarrow M$ – последовательность непрерывных отображений топологических пространств, где N компактно. Эта последовательность **равномерно сходится** к $\gamma: N \longrightarrow M$, если для любой окрестности U графика $\Gamma_\gamma \subset N \times M$, все графики Γ_{γ_i}, кроме конечного числа, лежат в U.

Определение 2.13. Пусть $\gamma_i: N \longrightarrow M$ – последовательность непрерывных отображений метрических пространств. Скажем, что γ_i **сходится к** γ **в топологии** C^0**,** если $\lim_i \sup_{t\in N} d(\gamma(t), \gamma_i(t)) = 0$.

Задача 2.23 (!). Докажите, что сходимость в C^0 равносильна равномерной сходимости.

Задача 2.24. Постройте последовательность непрерывных функций $f_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ сходящуюся к $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ поточечно, но не равномерно.

Задача 2.25 (!). Постройте последовательность непрерывных функций $f_i : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ сходящуюся к $f: [0,1] \longrightarrow [0,1]$ поточечно, но не равномерно.

Задача 2.26. Предположим, что последовательность гладких функций $f_i : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ сходится к гладкой функции f равномерно.

а. Докажите, что $\lim \int_a^b |f_i'(t)|dt \geqslant \int_a^b |f'(t)|dt$ (если пределов несколько, докажите для каждого из них).

б. Приведите пример, когда $\lim \int_a^b |f_i'(t)|dt > \int_a^b |f'(t)|dt$.

Указание. Сначала докажите это неравенство для функции f такой, что $f' > 0$, а потом разбейте $[a,b]$ на отрезки, где f' не меняет знак.

Задача 2.27 (!). Предположим, что последовательность гладких функций $f_i: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ сходится к гладкой функции $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ равномерно. Докажите, что $\lim \int_a^b |f_i'(t)|dt \geqslant \int_a^b |f'(t)|dt$

Указание. Разбив $[a,b]$ на отрезки $[x_i, x_{i+1}]$, и взяв $z_i := f(x_{i+1}) - f(x_i)$ и $z_i(n) := f_n(x_{i+1}) - f_n(x_i)$, получите

$$\sum_i |z_i(n)| \leqslant \int_a^b |f_n'(t)|dt,$$

Переходя к пределу по n, выведите из этого, что

$$\sum |z_i| = \lim_n \sum_i |z_i(n)| \leqslant \int_a^b |f_n'(t)| dt.$$

Чтобы закончить доказательство, перейдите к предлу по разбиениям.

Задача 2.28. Предположим, что последовательность гладких функций $f_i : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ сходится к гладкой функции f равномерно, а $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ – положительная гладкая функция. Докажите, что $\operatorname{blim} \int_a^b |f_i'(t)| g(f_i(t)) dt \geqslant \int_a^b |f'(t)| g(f(t)) dt$.

Указание. Докажите, что $\int_a^b f'(t) g(f(t)) dt = G(f(b)) - G(f(b))$, где G – первообразная g, а $\int_a^b |f'(t)| g(f(t)) dt \geqslant \int_a^b f'(t) g(f(t)) dt$; затем разбейте $[a,b]$ на отрезки, где f' не меняет знак.

Задача 2.29 (*). Предположим, что последовательность гладких функций $f_i : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ сходится к гладкой функции $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ равномерно, а $g \in \mathsf{Sym}^2 T^* \mathbb{R}^n$ положительно определенная квадратичная форма, гладко зависящая от $x \in \mathbb{R}^n$ и переводящая вектор $v \in T_x \mathbb{R}^n$ в число. Докажите, что $\lim \int_a^b \sqrt{g(f_i'(t))} dt \geqslant \int_a^b \sqrt{g(f'(t))} dt$.

Указание. Действуйте по аналогии с аргументом из задачи 2.27.

Определение 2.14. Пусть M – топологическое пространство, снабженное классом допустимых путей и функционалом длины $L(\gamma)$. Функционал L называется **полунепрерывным снизу**, если для любой последовательности допустимых путей $\gamma_i : [a,b] \longrightarrow M$, равномерно сходящейся к допустимому пути $\gamma : [a,b] \longrightarrow M$, имеем $\lim_i L(\gamma_i) \geqslant L(\gamma)$.

Задача 2.30. Докажите, что функционал "длина ломаной", определенный в задаче 2.14, полунепрерывен снизу.

Задача 2.31. Докажите, что функционал конформно плоской метрики ("переход болота"; задача 2.15) полунепрерывен снизу.

Указание. Воспользуйтесь задачей 2.28.

Задача 2.32 (*). Рассмотрим функцию $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^{\geqslant 0}$,

$$\phi(x,y) = \frac{5}{4}(|x| + |y|) - \frac{1}{4}\max(|x|, |y|).$$

Пусть класс допустимых путей в $\mathbb{R}^2$ – кусочно дифференцируемые пути, а функционал длины определен как $L(\gamma) = \int \phi(\gamma'(t)) dt$. Докажите, что эта формула задает функционал длины, который не полунепрерывен снизу.

Задача 2.33 (*). Пусть M – риманово многообразие, а $L(t)$ – функционал длины пути, задающий риманову метрику. Докажите, что $L(t)$ полунепрерывен снизу.

Указание. Воспользуйтесь задачей 2.29.