

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ГРУППЫ 5: Кратчайшие

Правила: Зачеты по листкам бывают двух типов: когда сданы все (или или 2/3) задачи со звездочками, либо все (или 2/3) задачи без звездочек. Задачи с двумя звездочками можно не сдавать. Сдавшим k задач с двумя звездочками разрешается не сдавать $2k$ задач со звездочками или факториалом из того же листочка. Задачи, обозначенные (!), следует сдавать и тем и другим.

Если сданы 2/3 задач со звездочками и (!), студент получает $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) двух – $10t$ баллов.

Если сданы 2/3 задач без звездочки и с (!), студент получает $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) трех – $10t$ баллов.

Эти виды оценок не складываются, то есть больше $10t$ за листочек получить нельзя.

Коэффициент t равен 1.5, если задачи сданы не позже, чем через 21 день после выдачи, 1, если между 21 и 35 днями, и 0.7, если позже.

Результаты сдачи записываются на листке ведомости, которая выдается студенту; просьба не брать ее, больше нигде результаты храниться не будут.

5.1. Локально компактные метрические пространства и теорема Хопфа-Ринова

Определение 5.1. Напомним, что ε -сеть в метрическом пространстве M есть такое множество $N \subset M$, что объединение ε -шаров с центрами в N равно M . Метрическое пространство называется **вполне ограниченным**, если для любого $\varepsilon > 0$ в M найдется конечная ε -сеть.

Задача 5.1. Докажите, что полное метрическое пространство компактно тогда и только тогда, когда оно вполне ограничено.

Определение 5.2. Пусть M – метрическое пространство. Говорят, что M **локально компактно**, если для любой точки $x \in M$ существует такое число $\varepsilon > 0$, что замкнутый шар $\bar{B}_\varepsilon(x)$ компактен.

Задача 5.2. Пусть $f : M \rightarrow M'$ – гомеоморфизм метрических пространств. Предположим, что M локально компактно. Докажите, что M' тоже локально компактно.

Задача 5.3. Докажите, что метрическое пространство локально компактно тогда и только тогда, когда у каждой точки есть окрестность, замыкание которой компактно.

Задача 5.4. Приведите пример полного метрического пространства с внутренней метрикой, которое не локально компактно.

Задача 5.5 (*). Верно ли, что пополнение локально компактного метрического пространства всегда локально компактно?

Задача 5.6 (!). Пусть M – метрическое пространство с внутренней метрикой, а $m \in M$ точка, такая, что шары $B_{r-\varepsilon}(m)$ вполне ограничены для любого $\varepsilon > 0$. Докажите, что $B_r(m)$ тоже вполне ограничено.

Задача 5.7. Пусть $\rho : M \rightarrow \mathbb{R}$ функция на метрическом пространстве,

$$\rho(m) := \sup_r \{r \in \mathbb{R} \mid \bar{B}_r(m) \text{ компактен}\}.$$

Докажите, что ρ 1-липшицева.

Задача 5.8. Пусть M – пространство с внутренней метрикой. Докажите, что в ε -окрестности шара $\bar{B}_r(m)$ содержится шар $B_{r+\varepsilon}(m)$.

Задача 5.9. Пусть M – пространство с внутренней метрикой, а N – $\frac{1}{2}\varepsilon$ -сеть в $\bar{B}_r(m)$. Докажите, что ε -окрестность N содержит $B_{r+1/2\varepsilon}(m)$.

Задача 5.10 (!). Пусть M – пространство с внутренней метрикой, а каждый замкнутый шар радиуса ε в M компактен. Докажите, что из компактности $\bar{B}_r(m)$ следует компактность $\bar{B}_{r+1/2\varepsilon}(m)$

Указание. Докажите, что M полно, и воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 5.11 (!). (Теорема Хопфа-Ринова) Пусть M – полное, локально компактное пространство с внутренней метрикой. Докажите, что каждый замкнутый шар в M компактен.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей для того, чтобы доказать, что $\rho = \infty$ везде на M .

Задача 5.12. Постройте следующие контрпримеры к усиленным версиям утверждения теоремы Хопфа-Ринова.

- а. (*) Локально компактное, полное метрическое пространство, где не всякий замкнутый шар компактен.
- б. (*) Локально компактное, полное, локально линейно связное метрическое пространство, где не всякий замкнутый шар компактен.
- в. Локально компактное, связное метрическое пространство с внутренней метрикой, где не всякий замкнутый шар компактен.
- г. Полное метрическое пространство с внутренней метрикой, где не всякий замкнутый шар компактен.

5.2. ε -середины и расстояние между шарами

Определение 5.3. Пусть x и y – точки в метрическом пространстве (M, d) , а $\varepsilon > 0$. Точка z называется ε -серединой пары (x, y) , если

$$|d(x, z) - 1/2d(x, y)| \leq \varepsilon \text{ и } |d(y, z) - 1/2d(x, y)| \leq \varepsilon.$$

Говорится, что в (M, d) **существуют ε -середины**, если для любых x, y и любого $\varepsilon > 0$ существует ε -середина.

Задача 5.13. Пусть z – ε -середина пары (x, y) . Докажите, что $d(x, y) \leq d(x, z) + x(y, z) + \varepsilon$. Докажите, что расстояние между двумя ε -серединами не больше $d(x, y) + 2\varepsilon$.

Задача 5.14 (!). Докажите, что в любом пространстве с внутренней метрикой существуют ε -середины.

Задача 5.15. Постройте метрическое пространство, в котором существуют ε -середины, но метрика не внутренняя.

Задача 5.16. Выразите максимально возможное расстояние между двумя ε -серединами пары (x, y) в терминах $d(x, y)$. Приведите пример, когда оно достигается.

Задача 5.17. Пусть M – пространство, где существуют ε -середины, а $x_0, x_1 \in M$ – две разные точки. Докажите, что для каждого двоично-рационального числа¹ $\lambda = \frac{2n-1}{2^m}$, $0 < \lambda < 1$, найдется точка $x_\lambda \in M$, которая является $\frac{\varepsilon}{2^{m+1}}$ -серединой между $x_{\frac{n}{2^{m-1}}}$ и $x_{\frac{n+1}{2^{m-1}}}$.

Задача 5.18 (!). Пусть M – метрическое пространство, в котором существуют ε -середины. Докажите, что для любых $x, y \in M$, $\varepsilon > 0$, и любого $\lambda \in [0, 1]$, найдется $z \in M$ такая, что

$$|d(x, z) - \lambda d(x, y)| \leq \varepsilon \quad \text{и} \quad |d(y, z) - (1 - \lambda)d(x, y)| \leq \varepsilon.$$

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 5.19 (!). Пусть M – метрическое пространство, в котором существуют ε -середины. Докажите, что для любых $x, y \in M$, и положительного $r \leq d(x, y)$, расстояние от шара $B_r(x)$ до y равно $d(x, y) - r$:

$$d(y, B_r(x)) = d(x, y) - r.$$

Определение 5.4. Условие $d(y, B_r(x)) = d(x, y) - r$ называется **условием Хопфа-Ринова**.

Задача 5.20. Докажите, что условие Хопфа-Ринова равносильно такому: $d(B_{r'}(y), B_r(x)) = d(x, y) - r - r'$, где $x, y \in M$ произвольные точки, а r, r' – положительные числа, которые удовлетворяют $d(x, y) \geq r + r'$.

Задача 5.21 (!). Пусть M – метрическое пространство. Докажите, что следующие условия равносильны.

- а. Существование ε -середин.
- б. Условие Хопфа-Ринова.
- в. Для каждых $x, y \in M$ и $\varepsilon, \delta > 0$, найдется последовательность точек $x_0 = x, x_1, \dots, x_n = y$, такая, что $d(x_i, x_{i+1}) < \delta$, а $\sum_i d(x_i, x_{i+1}) \leq d(x, y) + \varepsilon$.

5.3. Существование кратчайших

Задача 5.22. Пусть $x_0, x_1 \in M$ – точки на полном, локально компактном пространстве с внутренней метрикой. Докажите, что существует $x_{1/2} \in M$ такая, что $d(x_0, x_{1/2}) = d(x_1, x_{1/2}) = \frac{1}{2}d(x_0, x_1)$.

¹Двоично-рациональными называются числа вида $n/2^m$.

Задача 5.23. $x_0, x_1 \in M$ – точки на полном, локально компактном пространстве с внутренней метрикой. Докажите, что существует набор точек $\{x_\lambda\}$, где λ пробегает все двоично-рациональные числа между нулем и единицей, а $d(x_\lambda, x_\mu) = |\lambda - \mu|d(x_0, x_1)$.

Задача 5.24. Пусть M, N – метрические пространства, а $f : N \rightarrow M$ – C -липшицево отображение. Докажите, что f продолжается на пополнения: $\bar{f} : \bar{N} \rightarrow \bar{M}$, причем $\bar{f} : \bar{N} \rightarrow \bar{f}(\bar{N})$ тоже C -липшицево.

Задача 5.25 (!). Докажите, что любые две точки в полном локально компактном пространстве с внутренней метрикой могут быть соединены кратчайшей.

Указание. Примените результат предыдущей задачи к отображению, построенному в задаче 5.23.

Задача 5.26 (*). Пусть (M, d) – полное метрическое пространство, где существуют ε -середины. Докажите, что метрика в M внутренняя.

Задача 5.27 (*). Докажите, что пополнение пространства с внутренней метрикой – внутреннее.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Определение 5.5. Путь $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ называется **кратчайшей**, если $d(a, b) = L_d(\gamma)$, и **кратчайшей с геодезической параметризацией**, если γ задает изометрию.

Задача 5.28 (*). Пусть γ – кратчайшая, соединяющая точки x, y метрического пространства. Докажите, что существует кратчайшей с геодезической параметризацией, которая соединяет x и y .

Задача 5.29 ().** Приведите пример полного пространства с внутренней метрикой, в котором некоторые точки нельзя соединить кратчайшими.

Задача 5.30 ().** Приведите пример полного пространства с внутренней метрикой, в котором не существует кратчайших, или докажите, что такого нет.

Задача 5.31 (*). Пусть (M, d) – полное, локально компактное метрическое пространство (метрика не обязательно внутренняя), в котором любые две точки можно соединить липшицевым путем. Докажите, что любые две точки $x, y \in M$ в M можно соединить путем длины $\hat{d}(x, y)$ (здесь \hat{d} обозначает внутреннюю метрику, ассоциированную с d).

Задача 5.32 ().** Пусть (M, d) – полное, локально компактное метрическое пространство (метрика не обязательно внутренняя), в котором любые две точки можно соединить спрямляемым путем. Докажите, что любые две точки $x, y \in M$ в M можно соединить путем длины $\hat{d}(x, y)$.