

Гиперболические группы 7: пространства Александрова

Правила: Зачеты по листкам бывают двух типов: когда сданы все (или 2/3) задачи со звездочками, либо все (или 2/3) задачи без звездочек. Задачи с двумя звездочками можно не сдавать. Сдавшим k задач с двумя звездочками разрешается не сдавать $2k$ задач со звездочками или факториалом из того же листочка. Задачи, обозначенные (!), следует сдавать и тем и другим.

Если сданы 2/3 задач со звездочками и (!), студент получает $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) двух – $10t$ баллов.

Если сданы 2/3 задач без звездочки и с (!), студент получает $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) трех – $10t$ баллов.

Эти виды оценок не складываются, то есть больше $10t$ за листочек получить нельзя.

Коэффициент t равен 1.5, если задачи сданы не позже, чем через 21 дней после выдачи, 1, если между 21 и 35 днями, и 0.7, если позже.

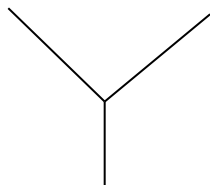
Результаты сдачи записываются на листке ведомости, которая выдается студенту; просьба не терять ее, больше нигде результаты храниться не будут.

7.1. Пространства Александрова

Определение 7.1. Пусть a, b, c – точки в метрическом пространстве (M, d) . Здесь и в дальнейшем \mathbb{R}^2 предполагается метрическим пространством, с обычной (евклидовой) метрикой. **Треугольник сравнения** $\Delta(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ есть треугольник в \mathbb{R}^2 , с вершинами $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, и сторонами $|\bar{a}, \bar{b}| = d(a, b)$, $|\bar{a}, \bar{c}| = d(a, c)$, и $|\bar{b}, \bar{c}| = d(b, c)$ (такой треугольник, очевидно, существует, и определен единственно с точностью до конгруэнтности). Угол $\angle(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ в треугольнике $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ обозначается $\theta(a, b, c)$; он называется **углом сравнения**.

Определение 7.2. Пусть a, b, c – точки в пространстве (M, d) со строго внутренней метрикой, а $\gamma : [0, d(a, b)] \rightarrow M$ – кратчайшая с геодезической параметризацией, соединяющая точки (a, b) . Рассмотрим функцию $d_c : [0, d(a, b)] \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$, переводящую t в $d(c, \gamma(t))$. Пусть $\Delta(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) \subset \mathbb{R}^2$ – треугольник сравнения, а $d_{\bar{c}} : [0, d(a, b)] \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ – функция, переводящая t в $d(\bar{c}, \bar{\gamma}(t))$, где $\bar{\gamma} : [0, d(a, b)] \rightarrow \mathbb{R}^2$ обозначает сторону треугольника сравнения с нормальной параметризацией. Функция $d_{\bar{c}}$ называется **функцией сравнения**. Пространство M называется **пространством неотрицательной/неположительной кривизны в целом**, если для любых a, b, c , функция сравнения удовлетворяет неравенству $d_c \geq d_{\bar{c}}$ (соответственно, $d_c \leq d_{\bar{c}}$). Пространство M называется **пространством Александрова неотрицательной/неположительной кривизны**, если у каждой точки есть окрестность неотрицательной/неположительной кривизны в целом. Пространства неположительной кривизны в целом также называются **САТ(0)-пространствами** (в честь Эли Картана, Д. А. Александрова и В. А. Топоногова; это название принадлежит М. Грому).

Задача 7.1. Пусть Z – метрический граф, полученный склеиванием трех ребер в точке.



- Докажите, что Z – пространство неположительной кривизны.
- Докажите, что Z – не пространство неотрицательной кривизны.

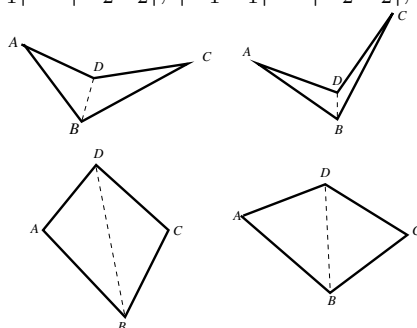
Задача 7.2 (!). Пусть L – окружность длины d с внутренней метрикой, а $C(L)$ – ее конус. Докажите, что $C(L)$ – пространство неположительной кривизны для $d \leq 2\pi$ и пространство неотрицательной кривизны для $d \geq 2\pi$.

Задача 7.3 (*). Пусть M – векторное пространство с нормой, которая не евклидова. Докажите, что M не является пространством неположительной кривизны и не является пространством неотрицательной кривизны.

Определение 7.3. Пусть p – внутренняя точка на кратчайшей γ , а μ – кратчайшая, начинающаяся от p . Обозначим два сегмента γ , начинающиеся от p , за γ_+ и γ_- . **Смежные углы** суть углы $\angle_{\text{sup}}(\gamma_+, p, \mu)$ и $\angle_{\text{sup}}(\gamma_-, p, \mu)$.

Задача 7.4. Докажите, что в любом метрическом пространстве со строго внутренней метрикой сумма смежных углов всегда $\geq \pi$.

Задача 7.5 (!). (**Лемма Александра**) Рассмотрим шарнирный механизм из четырех стержней (обозначены жирным на рисунке). Пусть четырехугольники $A_1B_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$ на плоскости получены движением стержней этого механизма (математически, это означает, что $|A_1B_1| = |A_2B_2|$, $|B_1C_1| = |B_2C_2|$, $|C_1D_1| = |C_2D_2|$, $|D_1A_1| = |D_2A_2|$).



Докажите, что $\angle(A_1B_1C_1) > \angle(A_2B_2C_2) \Leftrightarrow |B_1D_1| > |B_2D_2|$, если треугольники $\Delta(A_iB_iC_i)$ и $\Delta(A_iD_iC_i)$ отложены по одну сторону от прямой (A_iC_i) , и $\angle(A_1B_1C_1) > \angle(A_2B_2C_2) \Leftrightarrow |B_1D_1| < |B_2D_2|$ в противном случае.

Задача 7.6. Пусть a, b, c – точки в метрическом пространстве, $\Delta(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ – треугольник сравнения, $\gamma \cong [0, d(a, b)]$ – кратчайшая от a до b , а $d_c, d_{\bar{c}} : [0, d(a, b)] \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ – соответствующие функции сравнения. Докажите, что если $d_c \geq d_{\bar{c}}$, то $\theta(apc) + \theta(bpc) \leq \pi$, для любой точки p на γ .

Указание. Воспользуйтесь леммой Александрова.

Задача 7.7 (!). Пусть M – пространство Александрова неотрицательной кривизны. Докажите, что сумма смежных углов в M равна π .

Указание. Постройте треугольник сравнения для $\Delta(\gamma_+(s), \mu(t), \gamma_-(u))$, рассмотрите его функцию сравнения, и воспользуйтесь предыдущей задачей.

Определение 7.4. Граница подмножества метрического пространства $U \subset M$ есть пересечение замыканий $\bar{U} \cap \overline{(M \setminus U)}$. Открытое подмножество U метрического пространства называется **строго выпуклым**, если для каждой пары точек x, y на границе U , и любой кратчайшей $\gamma : [a, b] \rightarrow M$, соединяющей x и y , имеем $\gamma]a, b[\subset U$.

Задача 7.8. Предположим, что M – пространство с неположительной кривизной в целом. Докажите, что каждый открытый шар в M строго выпуклый.

Задача 7.9 (!). Предположим, что в M всякий открытый шар строго выпуклый. Докажите, что в M любые две точки соединяются не более чем одной кратчайшей.

Задача 7.10. Блокнот есть полиэдральное пространство размерности 2, с метрикой фактора, полученное из нескольких полуплоскостей склейкой по граничной прямой. Докажите, что метрика на блокноте внутренняя.

Задача 7.11 (!). Докажите, что блокнот – пространство неположительной кривизны в целом.

Задача 7.12 (!). Метрический букет пространств M_i с отмеченной точкой x_i получается из этих пространств склейкой точек x_i в одну (с

метрикой фактора). Докажите, что метрический букет пространств со строго внутренней метрикой - пространство со строго внутренней метрикой.

Задача 7.13 (*). Докажите, что метрический букет пространств неположительной кривизны - пространство неположительной кривизны.

Задача 7.14 (*). Пусть C – конус в \mathbb{R}^3 , заданный уравнением $x^2 + y^2 = z^2$. Будет ли C пространством Александрова для неположительной кривизны? А неотрицательной кривизны?

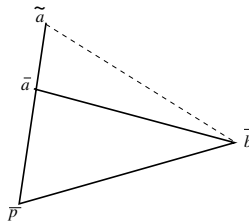
Задача 7.15 ().** Докажите, что конус над метрическим графом Γ имеет неположительную кривизну в целом тогда и только тогда, когда в Γ нет циклов длины $< 2\pi$.

Задача 7.16 ().** Докажите, что компактное двумерное полиэдральное пространство неотрицательной кривизны и без края¹ гомеоморфно двумерной сфере или $\mathbb{R}P^2$, либо изометрично тору $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ либо бутылке Клейна с плоской метрикой.

7.2. Условие монотонности углов

Определение 7.5. Пусть $\gamma_1, \gamma_2 : [0, a] \rightarrow M$ – кратчайшие в M , $\gamma_i(0) = p$. Говорится, что в M выполнено **условие монотонности углов** (для неположительной/неотрицательной кривизны), если угол $\theta(\gamma_1(s), p, \gamma_2(t))$ монотонно возрастает/убывает как функция от s, t , и любых кратчайших γ_i .

Задача 7.17. Пусть p, a, b – три точки на метрическом пространстве, а a_1 – точка на кратчайшей, соединяющей a и p . Рассмотрим треугольник сравнения $\triangle(\bar{a}_1, \bar{p}, \bar{b})$ для a_1, p, b , и обозначим на полупрямой $[\bar{p}, \bar{a}_1]$ точку \bar{a} таким образом, что $|\bar{p}\bar{a}| = d(p, a)$.



- а. Докажите, что для пространства неположительной кривизны в целом, $|\bar{a}, \bar{b}| \leq d(a, b)$.

¹**Край** двумерного полиэдрального пространства есть совокупность всех ребер, к которым клеится не больше одной двумерной клетки.

- б. Докажите, что для пространства неотрицательной кривизны в целом, $|\tilde{a}, \tilde{b}| \geq d(a, b)$.
- в. Выведите ограничения на знак кривизны (неположительная, неотрицательная) из этих неравенств.

Задача 7.18 (!). Докажите, что условие монотонности углов для неположительной/неотрицательной кривизны равносильно неположительности/неотрицательности кривизны в целом.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 7.19. Пусть M – пространство Александрова. Докажите, что углы между геодезическими кратчайшими в M всегда определены.

Задача 7.20 ().** Пусть M – пространство неположительной или неотрицательной кривизны в целом. Докажите, что в M сумма углов любого геодезического треугольника $\leq \pi$ для неположительной кривизны, и $\geq \pi$ для неотрицательной кривизны.

Задача 7.21 (*). Пусть M – двумерное полиэдральное пространство.

- а. (*) Предположим, что сумма углов любого геодезического треугольника $\geq \pi$. Верно ли, что M – пространство Александрова неотрицательной кривизны?
- б. (**). А неотрицательной кривизны в целом?
- в. (*) Предположим, что сумма углов любого геодезического треугольника $\leq \pi$. Верно ли, что M – пространство Александрова неположительной кривизны?
- г. (**). А неположительной кривизны в целом?

7.3. Условие сравнения углов

Определение 7.6. Пусть a, b, c – три точки в метрическом пространстве, а $\Delta(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ – треугольник сравнения. Рассмотрим кратчайшие γ_1, γ_2 , соединяющие a с b и a с c . **Условие сравнения углов для неположительной кривизны** есть неравенство $\angle(\gamma_1, a, \gamma_2) \leq \angle(\bar{c}\bar{a}\bar{b})$ **Условие сравнения углов для неотрицательной кривизны** есть неравенство $\angle(\gamma_1, a, \gamma_2) \geq \angle(\bar{c}\bar{a}\bar{b})$ плюс равенство $\angle(\gamma_+, p, \mu) + \angle(\gamma_-, p, \mu) = \pi$ для любых смежных углов $\angle(\gamma_+, p, \mu)$ и $\angle(\gamma_-, p, \mu)$.

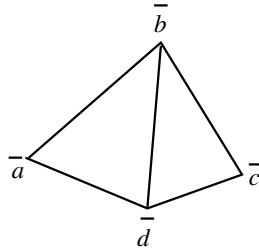
Задача 7.22. Пусть M – пространство неположительной кривизны в целом. Докажите, что в M выполнено условие сравнения углов (для неположительной кривизны).

Указание. Воспользуйтесь монотонностью углов.

Задача 7.23 (!). Пусть M – пространство неотрицательной кривизны в целом. Докажите, что в M выполнено условие сравнения углов (для неотрицательной кривизны). Не забудьте проверить, что сумма смежных углов равна π .

Задача 7.24. Пусть a, b, c – три точки в метрическом пространстве, а d – точка на кратчайшей, соединяющей a и c . Рассмотрим треугольники сравнения $\triangle(\bar{a}, \bar{b}, \bar{d})$, $\triangle(\bar{c}, \bar{b}, \bar{d})$, и разместим их по разные стороны от отрезка $[\bar{b}, \bar{d}]$.

- Предположим, что $\angle(\bar{c}, \bar{b}, \bar{d}) + \angle(\bar{a}, \bar{b}, \bar{d}) \leq \pi$. Докажите, что $|\bar{b}\bar{d}| \geq d(b, d)$.
- Предположим, что $\angle(\bar{c}, \bar{b}, \bar{d}) + \angle(\bar{a}, \bar{b}, \bar{d}) \geq \pi$. Докажите, что $|\bar{b}\bar{d}| \leq d(b, d)$.



Указание. Воспользуйтесь леммой Александрова.

Задача 7.25 (!). Пусть в M выполнено условие сравнения углов (для неположительной кривизны). Докажите, что M есть пространство неположительной кривизны в целом.

Указание. Постройте, как в предыдущей задаче, четырехугольник $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$, и выведите из условия сравнения углов неравенство $\angle(\bar{c}, \bar{b}, \bar{d}) + \angle(\bar{a}, \bar{b}, \bar{d}) \geq \angle(c, b, d) + \angle(a, b, d)$. Примените теорему о сумме смежных углов.

Задача 7.26 (*). Пусть в M выполнено условие сравнения углов (для неотрицательной кривизны). Докажите, что M есть пространство неотрицательной кривизны в целом.

Задача 7.27 ().** Пусть сумма углов любого геодезического треугольника в M не превосходит π . Следует ли из этого, что M есть пространство неположительной кривизны?