# Гиперболические группы 8: теорема Картана-Адамара

**Правила:** Зачеты по листкам бывают двух типов: когда сданы все (или 2/3) задачи со звездочками, либо все (или 2/3) задачи без звездочек. Задачи с двумя звездочками можно не сдавать. Сдавшим $k$ задач с двумя звездочками разрешается не сдавать $2k$ задач со звездочками или факториалом из того же листочка. Задачи, обозначенные (!), следует сдавать и тем и другим.

Если сданы 2/3 задач со звездочками и (!), студент получает $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) двух – $10t$ баллов.

Если сданы 2/3 задач без звездочки и с (!), студент получает $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) трех – $10t$ баллов.

Эти виды оценок не складываются, то есть больше $10t$ за листочек получить нельзя.

Коэффициент $t$ равен 1.5, если задачи сданы не позже, чем через 21 дней после выдачи, 1, если между 21 и 35 днями, и 0.7, если позже.

Результаты сдачи записываются на листке ведомости, которая выдается студенту; просьба не терять ее, больше нигде результаты храниться не будут.

## 8.1. Выпуклые функции и CAT(0)-пространства.

**Замечание.** Все метрические пространства предполагаются по умолчанию наделенными строго внутренней метрикой (внутренней с кратчайшими). Кратчайшие же предполагаются наделенными геодезической параметризацией.

**Определение 8.1.** Пусть $a, b, c$ – точки в метрическом пространстве $(M, d)$. Здесь и в дальнейшем $\mathbb{R}^2$ предполагается метрическим пространством, с обычной (евклидовой) метрикой. **Треугольник сравнения** $\triangle(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ есть треугольник в $\mathbb{R}^2$, с вершинами $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, и сторонами $|\bar{a}, \bar{b}| = d(a, b)$, $|\bar{a}, \bar{c}| = d(a, c)$, и $|\bar{b}, \bar{c}| = d(b, c)$ (такой треугольник, очевидно, существует, и определен единственно с точностью до конгруэнтности).

**Определение 8.2.** Пусть $a, b, c$ – точки в пространстве $(M, d)$ со строго внутренней метрикой, а $\gamma : [0, d(a, b)] \longrightarrow M$ – кратчайшая с геодезической параметризацией, соединяющая точки $(a, b)$. Рассмотрим функцию $d_c : [0, d(a, b)] \longrightarrow \mathbb{R}^{\geqslant 0}$, переводящую $t$ в $d(c, \gamma(t))$. Пусть $\triangle(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) \subset \mathbb{R}^2$ – треугольник сравнения, а $d_{\bar{c}} : [0, d(a, b)] \longrightarrow \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ – функция, переводящая $t$ в $d(\bar{c}, \bar{\gamma}(t))$, где $\bar{\gamma} : [0, d(a, b)] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ обозначает сторону треугольника сравнения с нормальной параметризацией. Функция $d_{\bar{c}}$ называется **функцией сравнения**. Пространство $M$ называется **пространством неположительной кривизны в целом**, если для любых $a, b, c$, функция сравнения удовлетворяет неравенству $d_c \geqslant d_{\bar{c}}$ (соответственно, $d_c \leqslant d_{\bar{c}}$). Пространство $M$ называется **пространством Александрова неположительной кривизны**, если у каждой точки есть окрестность неположительной кривизны в целом. Пространства неположительной кривизны в целом также называются **CAT(0)-пространствами**.

**Определение 8.3.** Подмножество $U \subset M$ метрического пространства называется **выпуклым**, если для любых точек $x, y \in U$, любая кратчайшая, соединяющая $x$ и $y$, содержится в $U$. **Граница** $U$ есть множество $\bar{U} \cap \overline{(M \backslash U)}$, полученное как пересечение замыкания $U$ и его дополнения. Выпуклое подмножество **строго выпукло**, если его граница не содержит нетривиальных кратчайших.

**Задача 8.1.** Докажите, что функция $\phi : [0, a] \longrightarrow \mathbb{R}$ выпукла тогда и только тогда, когда $\{(x, y) \mid y \geqslant \phi(x)\}$ – выпуклое подмножество в $\mathbb{R}^2$.

**Задача 8.2.** Пусть $f : [0, a] \longrightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная функция, которая удовлетворяет $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}$. Докажите, что $f$ выпукла.

**Определение 8.4.** Функция на метрическом пространстве называется **выпуклой**, если ее ограничение на любой отрезок кратчайшей выпукло, и **строго выпуклой**, если ее ограничение на любой отрезок кратчайшей $I = [0, a]$ не линейно ни на каком открытом подмножестве $I_1 \subset T$.

**Задача 8.3.** Пусть функция $\phi : M \longrightarrow \mathbb{R}$ выпукла (строго выпукла). Докажите, что $\pi^{-1}(] - \infty, c])$ – выпуклое (строго выпуклое) множество.

**Задача 8.4.** Пусть $\phi^{-1}(] - \infty, c])$ – выпуклое (строго выпуклое) множество для любого $c \in \mathbb{R}$. Докажите, что функция $\phi : M \longrightarrow \mathbb{R}$ выпукла (строго выпукла).

**Задача 8.5 (!).** Определим функцию $d_z : M \longrightarrow \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ на метрическом пространстве формулой $d_z(x) := d(z, x)$.

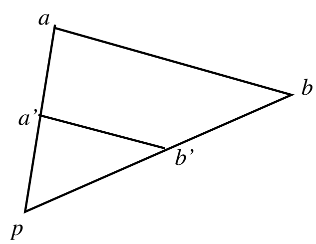
а. Пусть $d_x$ строго выпукла для любого $x \in M$. Докажите, что $z$ соединяется с любой точкой $M$ не более чем одной кратчайшей.

б. Найдите метрическое пространство $M$, в котором есть точка $z$ такая, что $d_z$ не строго выпукла ни в какой окрестности $z$. Опровергните или докажите единственность кратчайших в $M$.

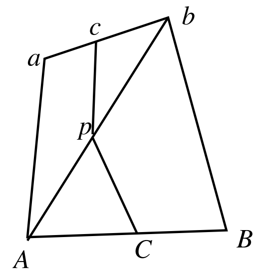
**Задача 8.6.** Пусть $M$ – CAT(0)-пространство. Докажите, что функция $d_z$ строго выпукла, для любой $z \in M$.

**Задача 8.7 (!).** Докажите, что в каждом CAT(0)-пространстве любые две точки соединяются единственной геодезической кратчайшей.

**Задача 8.8.** Пусть $\gamma_i : [0, t_i] \longrightarrow M$ – кратчайшие геодезические в CAT(0)-пространстве, $\gamma_i(0) = p$, $\gamma_1(t_1) = a, \gamma_2(t_2) = b$. Выберем $0 < \lambda < 1$, и пусть $a' = \gamma_1(\lambda t_1), b' = \gamma_2(\lambda t_2)$. Докажите, что $d(a', b') \leqslant \lambda d(a, b)$.




**Задача 8.9.** Пусть $a, b, A, B$ – точки в CAT(0)-пространстве, $c, C$ – середины кратчайших, соединяющих $a, b$ и $A, B$, а $p$ – середина кратчайшей, соединяющей $A$ и $b$.




Докажите, что $d(c, C) \leqslant \frac{1}{2}(d(a, A) + d(b, B))$

**Указание.** Убедитесь, что $d(c, C) \leqslant d(c, p) + d(p, C)$, и примените предыдущую задачу для случая $\lambda = \frac{1}{2}$.

**Определение 8.5.** Пусть в метрическом пространстве заданы два отображения $\gamma_1 : [0, t_1] \longrightarrow M$, $\gamma_2 : [0, t_2] \longrightarrow M$ с геодезической параметризацией. Рассмотрим отображения $\tilde{\gamma}_i : [0, 1] \longrightarrow M$, полученные из $\gamma_i$ линейной заменой параметра: $\tilde{\gamma}_i(u) = \gamma_i(t_i u)$. **Расстояние** $d_\gamma(\gamma_1, \gamma_2)$ определяется по формуле

$$d_\gamma(\gamma_1, \gamma_2) := \mathsf{sup}_u d(\tilde{\gamma}_1(u), \tilde{\gamma}_2(u)).$$

**Задача 8.10.** Докажите, что $d_\gamma$ – это метрика.

**Указание.** Это $\mathsf{sup}$-метрика на отображениях из отрезка.

**Замечание.** В следующей задаче изучается функция $u \mapsto d(\tilde{\gamma}_1(u), \tilde{\gamma}_2(u))$, которая участвует в определении $d_\gamma$.

**Задача 8.11 (!).** Пусть $\gamma_i : [0, t_i] \longrightarrow M$ – кратчайшие геодезические в CAT(0)-пространстве, а $\kappa : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ переводит $u \in [0, 1]$ в $d(\gamma_1(t_1 u), \gamma_2(t_2 u))$. Докажите, что $\kappa$ выпукло.

**Указание.** Воспользуйтесь задачей 8.9.

**Задача 8.12.** Пусть $\Gamma_p(M)$ – пространство кратчайших, начинающихся в $p$, снабженное метрикой $d_\Gamma$, а $\pi : \Gamma_p(M) \longrightarrow M$ отображение, переводящее кратчайшую в ее второй конец. Предположим, что $M$ – CAT(0)-пространство. Докажите, что это изометрия.

**Указание.** Воспользуйтесь предыдущей задачей.

**Задача 8.13.** Зафиксируем точку $p$ в CAT(0)-пространстве. Для какой-то точки $x \in M$, рассмотрим кратчайшую $\gamma_x : [0, d(p,x)] \longrightarrow M$, соединяющую $p$ с $x$. Пусть $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, и пусть $P_\lambda : M \longrightarrow M$ отображает $x$ в $\gamma_x(\lambda d(p,x))$. Докажите, что $P_\lambda$ задает непрерывное отображение из $M \times [0,1]$ в $M$.

**Указание.** Воспользуйтесь предыдущей задачей.

**Задача 8.14 (!).** Постройте гомотопию между тождественным отображением из $M$ в себя и отображением, переводящим $M$ в $\{p\}$.

**Указание.** Воспользуйтесь предыдущей задачей.

**Замечание.** Мы доказали, что все CAT(0)-пространства стягиваемы.

## 8.2. Радиус выпуклости

**Определение 8.6.** Пусть $M$ – пространство Александрова неположительной кривизны. **Нормальный шар** в $M$ есть шар $B_\varepsilon(x)$, который является CAT(0)-пространством.

**Задача 8.15.** Докажите, что нормальный шар – строго выпуклый.

**Задача 8.16.** Докажите, что для каждой точки $x \in M$ в пространстве Александрова неположительной кривизны есть $\varepsilon > 0$ такой, что $B_\varepsilon(x)$ – нормальный шар.

**Определение 8.7.** Пусть $M$ – пространство Александрова неположительной кривизны. **Радиус выпуклости** в точке $x \in M$ есть супремум всех $\varepsilon$ таких, что $B_\varepsilon(x)$ нормален. Обозначим радиус выпуклости за $\rho(x)$.

**Задача 8.17.** Пусть в какой-то точке $M$ радиус выпуклости равен $\infty$. Докажите, что этот радиус равен $\infty$ везде в $M$.

**Задача 8.18.** Докажите, что функция $x \longrightarrow \rho(x)$ 1-липшицева.

**Задача 8.19.** Пусть $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ – функция на отрезке, причем у каждой точки $x \in [0,1]$ есть связная окрестность $U_x$ такая, что $f\Big|_{U_x}$ выпукла. Докажите, что $f$ выпукла.

**Задача 8.20.** Пусть $\gamma : [0,t] \longrightarrow M$ – кратчайшая в пространстве Александрова неположительной кривизны, а $\rho\Big|_\gamma \geqslant \varepsilon$. Рассмотрим кратчайшую $\gamma' : [0,t'] \longrightarrow M$, которая лежит в $\varepsilon$-окрестности $\gamma$. Пусть $\kappa : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ переводит $u \in [0,1]$ в $d(\gamma(ut), \gamma'(ut'))$. Докажите, что $\kappa$ выпукла.

**Указание.** Покройте $\gamma(\varepsilon)$ нормальными шарами, примените задачу 8.11, и воспользуйтесь предыдущей задачей.

## 8.3. Кратчайшие и геодезические

**Определение 8.8. Геодезическая** есть путь $\gamma:\ [a,b] \longrightarrow M$ такой, что у каждой точки $x \in [0,t]$ есть связная окрестность $U_x$ такая, что $\gamma\Big|_{U_x}$ – кратчайшая геодезическая. Обозначим за $\Gamma(M)$ пространство всех геодезических, с метрикой $d_\Gamma$ (Определение 8.5), и за $\Gamma_p(M)$ пространством геодезических с началом в $p$.

**Задача 8.21.** Приведите пример пространства Александрова неположительной кривизны и отображения $\gamma:\ [a,b] \longrightarrow M$, которое является геодезической, но не кратчайшей.

**Задача 8.22.** Рассмотрим отображение $\Gamma_p(M) \xrightarrow{\pi} M$, переводящее геодезическую в ее второй конец. Докажите, что оно непрерывно.

**Задача 8.23.** (!) Предположим, что $M$ – полное пространство Александрова неположительной кривизны.

а. Докажите, что пространство геодезических кратчайших полное.

б. Пусть $\gamma_i$ – последовательность Коши в $\Gamma(M)$. Докажите, что $\gamma_i$ сходится в метрике $d_G$ к какому-то пути.

в. Докажите, что пространство геодезических $\Gamma(M)$ полно.

**Указание.** Докажите, что предел отображений, растягивающих метрику в $C_i$ раз, растягивает метрику в $\lim_i C_i$ раз. Выведите из этого, что пространство кратчайших полно, а предел геодезических определен. Чтоб убедиться в том, что это геодезическая, покройте $M$ нормальными шарами; в каждом из них любая геодезическая является кратчайшей.

**Задача 8.24 (**).** Решите предыдущую задачу без предположения о кривизне $M$, или найдите контрпример.

**Определение 8.9. Радиус выпуклости** для множества $Z \subset M$ есть $\inf_{z\in Z}\rho(z)$, где $\rho$ есть радиус выпуклости в точке $z$.

**Задача 8.25 (!).** Пусть $\gamma:\ [0,t] \longrightarrow M$, $\gamma':\ [0,t'] \longrightarrow M$ – геодезические в пространстве Александрова неположительной кривизны, радиус выпуклости $\gamma$ равен $\varepsilon$, а $d_\Gamma(\gamma,\gamma') < \varepsilon$. Оределим $\kappa:\ [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ по формуле $\kappa(u) := d(\gamma(ut), \gamma'(ut'))$. Докажите, что $\kappa$ – выпуклая функция.

**Указание.** Задача 8.20 решается тем же самым рассуждением.

**Задача 8.26.** Пусть $\gamma:\ [0,t] \longrightarrow M$, $\gamma':\ [0,t'] \longrightarrow M$ – геодезические в пространстве Александрова неположительной кривизны, радиус выпуклости $\gamma$ равен $\varepsilon$, а $d_\Gamma(\gamma,\gamma') < \varepsilon$. Докажите, что расстояние между геодезическими есть максимум расстояния между концами.

$$d_\Gamma(\gamma,\gamma') = \max(d(\gamma(0),\gamma'(0)), d(\gamma(t),\gamma'(t'))).$$

**Задача 8.27.** Рассмотрим отображение $\Gamma_p(M) \xrightarrow{\pi} M$, переводящее геодезическую в ее второй конец. Пусть $\varepsilon$ – радиус выпуклости для $\gamma$. Докажите, что для $\varepsilon$-шара $B_\varepsilon(\gamma) \subset \Gamma_p(M)$, ограничение $\pi\Big|_{B_\varepsilon(\gamma)}$ задает изометрия $B_\varepsilon(\gamma)$ и шара $B_\varepsilon(\pi(\gamma))$

**Указание.** Воспользуйтесь предыдущей задачей.

**Задача 8.28 (!).** Пусть $M_1, M$ – полные метрические пространства, $\rho:\ M \longrightarrow \mathbb{R}^{>0}$ – непрерывная функция, а а $\pi:\ M_1 \longrightarrow M$ – отображение, которое задает изометрию

$$\pi:\ B_{\rho(\pi(x))}(x) \longrightarrow B_{\rho(\pi(x))}(\pi(x))$$

для любой точки $x \in M_1$. Докажите, что $\pi$ – накрытие.

**Задача 8.29.** Пусть $M$ полное пространство Александрова неположительной кривизны. Рассмотрим отображение $\Gamma_p(M) \xrightarrow{\pi} M$, переводящее геодезическую в ее второй конец. Докажите, что это накрытие.

**Указание.** Воспользуйтесь предыдущей задачей.

**Задача 8.30.** Пусть $M$ – полное пространство Александрова неположительной кривизны (как обычно, мы предполагаем, что метрика в $M$ – строго внутренняя).

а. Докажите, что любая геодезическая в $M$ – кратчайшая.

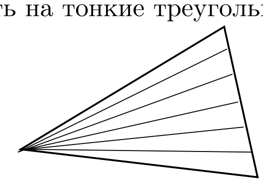
б. Докажите, что любые две точки $M$ соединяются единственной геодезической.

## 8.4. Тонкие треугольники и пространства Адамара

**Определение 8.10.** Полное, односвязное пространство Александрова неположительной кривизны называется **пространством Адамара**.

**Определение 8.11.** Пусть $M$ – пространство Александрова неположительной кривизны, а $\triangle(a,p,b)$ – треугольник, составленный из кратчайших $[a,b]$, $[a,p]$ и $[b,p]$. Назовем $\triangle(a,p,b)$ **тонким**, если $d([a,p],[b,p]) < \varepsilon$, где $\varepsilon$ есть радиус выпуклости множества $[a,p] \cap [b,p]$. Угол, образованный средней вершиной $p$ и кратчайшими $[a,p]$ и $[b,p]$ называется **тонким**.

**Задача 8.31 (!).** Пусть $M$ – пространство Адамара. Докажите, что любой треугольник, составленный из геодезических, можно разрезать на тонкие треугольники, как на картинке.



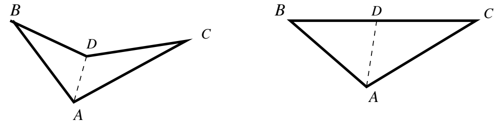
**Указание.** Воспользуйтесь гомотопией, построенной в задаче 8.13, проспособив ее констркцию для пространств Адамара.

**Задача 8.32 (!).** Пусть для каждого тонкого треугольника в $M$ выполнено неравенство сравнения. Докажите, что $M$ есть CAT(0)-пространство.

**Указание.** Воспользуйтесь предыдущей задачей.

**Определение 8.12.** Пусть $a, b, c$ – три точки в метрическом пространстве, а $\triangle(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ – треугольник сравнения. Рассмотрим кратчайшие $\gamma_1, \gamma_2$, соединяющие $a$ с $b$ и $a$ с $c$. **Условие сравнения углов для неположительной кривизны** есть неравенство $\measuredangle(\gamma_1, a, \gamma_2) \leqslant \measuredangle(\bar{c}\bar{a}\bar{b})$ (для каждого из трех углов).

**Задача 8.33.** Рассмотрим шарнирный механизм из четырех стержней на плоскости. Пусть четырехугольники $A_1B_1D_1C_1$ и $A_2B_2D_2C_2$ на плоскости получены движением стержней этого механизма (математически, это означает, что $|A_1B_1| = |A_2B_2|$, $|B_1C_1| = |B_2C_2|$, $|C_1D_1| = |C_2D_2|$, $|D_1A_1| = |D_2A_2|$).




Предположим, что $\measuredangle(B_2D_2C_2) = \pi$, а $\measuredangle(B_1D_1C_1) \geqslant \pi$. Докажите, что $\measuredangle(B_2A_2C_2) \geqslant \measuredangle(B_1A_1C_1)$, $\measuredangle(A_2C_2D_2) \geqslant \measuredangle(A_1C_1D_2)$ и $\measuredangle(A_2B_2D_2) \geqslant \measuredangle(A_1B_1D_2)$.

**Указание.** Примените лемму Александрова.

**Задача 8.34.** Пусть $\triangle(a,b,c)$ – треугольник в пространстве Адамара, а $d$ – точка на кратчайшей $[b,c]$. Предположим, что для $\triangle(a,b,d)$ и $\triangle(a,c,d)$ выполнено условие сравнения углов. Нарисуем на плоскости треугольники сравнения $\triangle(\bar a,\bar d,\bar c)$ и $\triangle(\bar a,\bar d,\bar c)$, отложив их по разные стороны от $(\bar a,\bar d)$.

а. Докажите, что $\measuredangle(\bar a,\bar d,\bar c)+\measuredangle(\bar a,\bar d,\bar b)>\pi$.

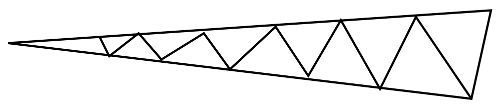
б. Пусть $\triangle(\tilde a,\tilde b,\tilde c)$ – треугольник сравнения для $\triangle(a,b,c)$. Докажите, что углы $\triangle(\tilde a,\tilde b,\tilde c)$ меньше, чем соответствующие углы в четырехугольнике $\bar a,\bar b,\bar d,\bar c$.

в. (!) Докажите, что для $\triangle(a,b,c)$ выполнено условие сравнения углов.

**Указание.** Во втором пункте, воспользуйтесь предыдущей задачей.

**Задача 8.35 (!).** Докажите неравенство сравнения углов в тонком треугольнике.

**Указание.** Разрежьте плоский треугольник на треугольники, лежащие в нормальных шарах, как на картинке,



и примените предыдущую задачу.

**Задача 8.36 (!).** (теорема Картана-Адамара) Пусть $M$ – пространство Адамара. Докажите, что $M$ – CAT(0)-пространство. Докажите, что оно стягиваемо.

**Задача 8.37 (*).** Приведите пример неполного пространства Александрова неположительной кривизны, где не выпонено CAT(0)-условие, либо докажите, что такого не бывает.

**Определение 8.13.** Функция $f:\ M\longrightarrow\mathbb{R}$ на метрическом пространстве называется **$\lambda$-выпуклая**, если для любой геодезической $\gamma:\ [0,t]\longrightarrow M$, фукция $u\longrightarrow f(\gamma(u))-\lambda^2u$ выпукла.

**Задача 8.38 (*).** Пусть $M$ – пространство Адамара, $z\in M$, а $d_z(x)=d(x,z)$. Докажите, что функция $d_z^2$ 1-выпуклая.

**Задача 8.39 (*).** Пусть $\lambda>0$. Докажите, что любая $\lambda$-выпуклая функция на полном пространстве имеет минимум.

**Задача 8.40 (*).** Пусть $Z\subset M$ – замкнутое, ограниченное подмножество пространства Адамара. **Описанный шар** для $Z$ есть шар $B_r(x)$ минимального радиуса, содержащий $Z$. Докажите, что для любого конечного подмножества $Z\subset M$, описанный шар существует и единственен.

**Задача 8.41 (**).** Пусть $Z\subset M$ – замкнутое, ограниченное подмножество локально компактного пространства Адамара. Докажите, что описанный шар для $Z$ существует и единственен.

**Определение 8.14. Луч** в метрическом пространстве есть изометрическое вложение $[0,\infty[\ \longrightarrow M$ **Параллельные лучи** суть лучи $\gamma,\gamma':\ [0,\infty[\ \longrightarrow M$ такие, что $d(\gamma(t),\gamma'(t))$ ограниченно.

**Задача 8.42 (**).** Пусть $\gamma:\ [0,\infty[\ \longrightarrow M$ – луч в локально компактном пространстве Адамара. Докажите, что для любой точки $z\in M$, существует и единственный луч, параллельный $\gamma$, и выходящий из $z$.

**Задача 8.43 (**).** Пусть $G$ – конечная подгруппа в группе изометрий пространства Адамара. Докажите, что $G$ оставляет неподвижной точку.