

## Гиперболические группы 8: теорема Картана-Адамара

**Правила:** Зачеты по листкам бывают двух типов: когда сданы все (или 2/3) задачи со звездочками, либо все (или 2/3) задачи без звездочек. Задачи с двумя звездочками можно не сдавать. Сдавшим  $k$  задач с двумя звездочками разрешается не сдавать  $2k$  задач со звездочками или факториалом из того же листочка. Задачи, обозначенные (!), следует сдавать и тем и другим.

Если сданы 2/3 задач со звездочками и (!), студент получает  $6t$  баллов, если все, кроме (максимум) двух –  $10t$  баллов.

Если сданы 2/3 задач без звездочки и с (!), студент получает  $6t$  баллов, если все, кроме (максимум) трех –  $10t$  баллов.

Эти виды оценок не складываются, то есть больше  $10t$  за листочек получить нельзя.

Коэффициент  $t$  равен 1.5, если задачи сданы не позже, чем через 21 день после выдачи, 1, если между 21 и 35 днями, и 0.7, если позже.

Результаты сдачи записываются на листке ведомости, которая выдается студенту; просьба не терять ее, больше нигде результаты храниться не будут.

### 8.1. Выпуклые функции и САТ(0)-пространства.

**Замечание.** Все метрические пространства предполагаются по умолчанию наделенными строго внутренней метрикой (внутренней с кратчайшими). Кратчайшие же предполагаются наделенными геодезической параметризацией.

**Определение 8.1.** Пусть  $a, b, c$  – точки в метрическом пространстве  $(M, d)$ . Здесь и в дальнейшем  $\mathbb{R}^2$  предполагается метрическим пространством, с обычной (евклидовой) метрикой. **Треугольник сравнения**  $\Delta(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$  есть треугольник в  $\mathbb{R}^2$ , с вершинами  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ , и сторонами  $|\bar{a}, \bar{b}| = d(a, b)$ ,  $|\bar{a}, \bar{c}| = d(a, c)$ , и  $|\bar{b}, \bar{c}| = d(b, c)$  (такой треугольник, очевидно, существует, и определен единственно с точностью до конгруэнтности).

**Определение 8.2.** Пусть  $a, b, c$  – точки в пространстве  $(M, d)$  со строго внутренней метрикой, а  $\gamma : [0, d(a, b)] \rightarrow M$  – кратчайшая с геодезической параметризацией, соединяющая точки  $(a, b)$ . Рассмотрим функцию  $d_c : [0, d(a, b)] \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ , переводящую  $t$  в  $d(c, \gamma(t))$ . Пусть  $\Delta(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) \subset \mathbb{R}^2$  – треугольник сравнения, а  $d_{\bar{c}} : [0, d(a, b)] \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$  – функция, переводящая  $t$  в  $d(\bar{c}, \bar{\gamma}(t))$ , где  $\bar{\gamma} : [0, d(a, b)] \rightarrow \mathbb{R}^2$  обозначает сторону треугольника сравнения с нормальной параметризацией. Функция  $d_{\bar{c}}$  называется **функцией сравнения**. Пространство  $M$  называется **пространством неположительной кривизны в целом**, если для любых  $a, b, c$ , функция сравнения удовлетворяет неравенству  $d_c \geq d_{\bar{c}}$  (соответственно,  $d_c \leq d_{\bar{c}}$ ). Пространство  $M$  называется **пространством Александра неположительной кривизны**, если у каждой точки есть окрестность неположительной кривизны в целом. Пространства неположительной кривизны в целом также называются **САТ(0)-пространствами**.

**Определение 8.3.** Подмножество  $U \subset M$  метрического пространства называется **выпуклым**, если для любых точек  $x, y \in U$ , любая кратчайшая, соединяющая  $x$  и  $y$ , содержится в  $U$ . **Граница**  $U$  есть множество  $\bar{U} \cap (M \setminus U)$ , полученное как пересечение замыкания  $U$  и его дополнения. Выпуклое подмножество **строго выпукло**, если его граница не содержит нетривиальных кратчайших.

**Задача 8.1.** Докажите, что функция  $\phi : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$  выпукла тогда и только тогда, когда  $\{(x, y) \mid y \geq \phi(x)\}$  – выпуклое подмножество в  $\mathbb{R}^2$ .

**Задача 8.2.** Пусть  $f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$  – непрерывная функция, которая удовлетворяет  $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$ . Докажите, что  $f$  выпукла.

**Определение 8.4.** Функция на метрическом пространстве называется **выпуклой**, если ее ограничение на любой отрезок кратчайшей выпукло, и **строго выпуклой**, если ее ограничение на любой отрезок кратчайшей  $I = [0, a]$  не линейно ни на каком открытом подмножестве  $I_1 \subset I$ .

**Задача 8.3.** Пусть функция  $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$  выпукла (строго выпукла). Докажите, что  $\pi^{-1}(] - \infty, c])$  – выпуклое (строго выпуклое) множество.

**Задача 8.4.** Пусть  $\phi^{-1}(] - \infty, c])$  – выпуклое (строго выпуклое) множество для любого  $c \in \mathbb{R}$ . Докажите, что функция  $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$  выпукла (строго выпукла).

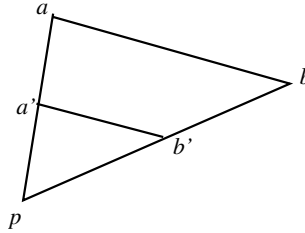
**Задача 8.5 (!).** Определим функцию  $d_z : M \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$  на метрическом пространстве формулой  $d_z(x) := d(z, x)$ .

- а. Пусть  $d_x$  строго выпукла для любого  $x \in M$ . Докажите, что  $z$  соединяется с любой точкой  $M$  не более чем одной кратчайшей.
- б. Найдите метрическое пространство  $M$ , в котором есть точка  $z$  такая, что  $d_z$  не строго выпукла ни в какой окрестности  $z$ . Опровергните или докажите единственность кратчайших в  $M$ .

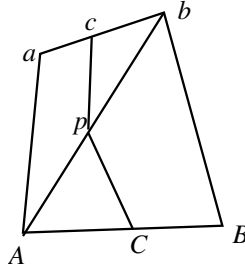
**Задача 8.6.** Пусть  $M$  – CAT(0)-пространство. Докажите, что функция  $d_z$  строго выпукла, для любой  $z \in M$ .

**Задача 8.7 (!).** Докажите, что в каждом CAT(0)-пространстве любые две точки соединяются единственной геодезической кратчайшей.

**Задача 8.8.** Пусть  $\gamma_i : [0, t_i] \rightarrow M$  – кратчайшие геодезические в CAT(0)-пространстве,  $\gamma_i(0) = p$ ,  $\gamma_1(t_1) = a$ ,  $\gamma_2(t_2) = b$ . Выберем  $0 < \lambda < 1$ , и пусть  $a' = \gamma_1(\lambda t_1)$ ,  $b' = \gamma_2(\lambda t_2)$ . Докажите, что  $d(a', b') \leq \lambda d(a, b)$ .



**Задача 8.9.** Пусть  $a, b, A, B$  – точки в CAT(0)-пространстве,  $c, C$  – середины кратчайших, соединяющих  $a, b$  и  $A, B$ , а  $p$  – середина кратчайшей, соединяющей  $A$  и  $b$ .



Докажите, что  $d(c, C) \leq \frac{1}{2}(d(a, A) + d(b, B))$

**Указание.** Убедитесь, что  $d(c, C) \leq d(c, p) + d(p, C)$ , и примените предыдущую задачу для случая  $\lambda = \frac{1}{2}$ .

**Определение 8.5.** Пусть в метрическом пространстве заданы два отображения  $\gamma_1 : [0, t_1] \rightarrow M$ ,  $\gamma_2 : [0, t_2] \rightarrow M$  с геодезической параметризацией. Рассмотрим отображения  $\tilde{\gamma}_i : [0, 1] \rightarrow M$ , полученные из  $\gamma_i$  линейной заменой параметра:  $\tilde{\gamma}_i(u) = \gamma_i(t_i u)$ . Расстояние  $d_\gamma(\gamma_1, \gamma_2)$  определяется по формуле

$$d_\gamma(\gamma_1, \gamma_2) := \sup_u d(\tilde{\gamma}_1(u), \tilde{\gamma}_2(u)).$$

**Задача 8.10.** Докажите, что  $d_\gamma$  – это метрика.

**Указание.** Это sup-метрика на отображениях из отрезка.

**Замечание.** В следующей задаче изучается функция  $u \mapsto d(\tilde{\gamma}_1(u), \tilde{\gamma}_2(u))$ , которая участвует в определении  $d_\gamma$ .

**Задача 8.11 (!).** Пусть  $\gamma_i : [0, t_i] \rightarrow M$  – кратчайшие геодезические в CAT(0)-пространстве, а  $\kappa : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$  переводит  $u \in [0, 1]$  в  $d(\gamma_1(t_1 u), \gamma_2(t_2 u))$ . Докажите, что  $\kappa$  выпукло.

**Указание.** Воспользуйтесь задачей 8.9.

**Задача 8.12.** Пусть  $\Gamma_p(M)$  – пространство кратчайших, начинающихся в  $p$ , снабженное метрикой  $d_\Gamma$ , а  $\pi : \Gamma_p(M) \rightarrow M$  отображение, переводящее кратчайшую в ее второй конец. Предположим, что  $M$  – CAT(0)-пространство. Докажите, что это изометрия.

**Указание.** Воспользуйтесь предыдущей задачей.

**Задача 8.13.** Зафиксируем точку  $p$  в CAT(0)-пространстве. Для какой-то точки  $x \in M$ , рассмотрим кратчайшую  $\gamma_x : [0, d(p, x)] \rightarrow M$ , соединяющую  $p$  с  $x$ . Пусть  $0 \leq \lambda \leq 1$ , и пусть  $P_\lambda : M \rightarrow M$  отображает  $x$  в  $\gamma_x(\lambda d(p, x))$ . Докажите, что  $P_\lambda$  задает непрерывное отображение из  $M \times [0, 1]$  в  $M$ .

**Указание.** Воспользуйтесь предыдущей задачей.

**Задача 8.14 (!).** Постройте гомотопию между тождественным отображением из  $M$  в себя и отображением, переводящим  $M$  в  $\{p\}$ .

**Указание.** Воспользуйтесь предыдущей задачей.

**Замечание.** Мы доказали, что все CAT(0)-пространства стягиваемы.

## 8.2. Радиус выпуклости

**Определение 8.6.** Пусть  $M$  – пространство Александера неположительной кривизны. **Нормальный шар** в  $M$  есть шар  $B_\varepsilon(x)$ , который является CAT(0)-пространством.

**Задача 8.15.** Докажите, что нормальный шар – строго выпуклый.

**Задача 8.16.** Докажите, что для каждой точки  $x \in M$  в пространстве Александера неположительной кривизны есть  $\varepsilon > 0$  такой, что  $B_\varepsilon(x)$  – нормальный шар.

**Определение 8.7.** Пусть  $M$  – пространство Александера неположительной кривизны. **Радиус выпуклости** в точке  $x \in M$  есть супремум всех  $\varepsilon$  таких, что  $B_\varepsilon(x)$  нормален. Обозначим радиус выпуклости за  $\rho(x)$ .

**Задача 8.17.** Пусть в какой-то точке  $M$  радиус выпуклости равен  $\infty$ . Докажите, что этот радиус равен  $\infty$  везде в  $M$ .

**Задача 8.18.** Докажите, что функция  $x \rightarrow \rho(x)$  1-липшицева.

**Задача 8.19.** Пусть  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  – функция на отрезке, причем у каждой точки  $x \in [0, 1]$  есть связная окрестность  $U_x$  такая, что  $f|_{U_x}$  выпукла. Докажите, что  $f$  выпукла.

**Задача 8.20.** Пусть  $\gamma : [0, t] \rightarrow M$  – кратчайшая в пространстве Александера неположительной кривизны, а  $\rho|_\gamma \geq \varepsilon$ . Рассмотрим кратчайшую  $\gamma' : [0, t'] \rightarrow M$ , которая лежит в  $\varepsilon$ -окрестности  $\gamma$ . Пусть  $\kappa : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$  переводит  $u \in [0, 1]$  в  $d(\gamma(ut), \gamma'(ut'))$ . Докажите, что  $\kappa$  выпукла.

**Указание.** Покройте  $\gamma(\varepsilon)$  нормальными шарами, примените задачу 8.11, и воспользуйтесь предыдущей задачей.

### 8.3. Кратчайшие и геодезические

**Определение 8.8.** Геодезическая есть путь  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  такой, что у каждой точки  $x \in [0, t]$  есть связная окрестность  $U_x$  такая, что  $\gamma|_{U_x}$  – кратчайшая геодезическая. Обозначим за  $\Gamma(M)$  пространство всех геодезических, с метрикой  $d_\Gamma$  (Определение 8.5), и за  $\Gamma_p(M)$  пространством геодезических с началом в  $p$ .

**Задача 8.21.** Приведите пример пространства Александрова неположительной кривизны и отображения  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ , которое является геодезической, но не кратчайшей.

**Задача 8.22.** Рассмотрим отображение  $\Gamma_p(M) \xrightarrow{\pi} M$ , переводящее геодезическую в ее второй конец. Докажите, что оно непрерывно.

**Задача 8.23.** (!) Предположим, что  $M$  – полное пространство Александрова неположительной кривизны.

- Докажите, что пространство геодезических кратчайших полное.
- Пусть  $\gamma_i$  – последовательность Коши в  $\Gamma(M)$ . Докажите, что  $\gamma_i$  сходится в метрике  $d_G$  к какому-то пути.
- Докажите, что пространство геодезических  $\Gamma(M)$  полно.

**Указание.** Докажите, что предел отображений, растягивающих метрику в  $C_i$  раз, растягивает метрику в  $\lim_i C_i$  раз. Выведите из этого, что пространство кратчайших полно, а предел геодезических определен. Чтоб убедиться в том, что это геодезическая, покройте  $M$  нормальными шарами; в каждом из них любая геодезическая является кратчайшей.

**Задача 8.24 (\*\*).** Решите предыдущую задачу без предположения о кривизне  $M$ , или найдите контрпример.

**Определение 8.9.** Радиус выпуклости для множества  $Z \subset M$  есть  $\inf_{z \in Z} \rho(z)$ , где  $\rho$  есть радиус выпуклости в точке  $z$ .

**Задача 8.25 (!).** Пусть  $\gamma : [0, t] \rightarrow M$ ,  $\gamma' : [0, t'] \rightarrow M$  – геодезические в пространстве Александрова неположительной кривизны, радиус выпуклости  $\gamma$  равен  $\varepsilon$ , а  $d_\Gamma(\gamma, \gamma') < \varepsilon$ . Определим  $\kappa : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$  по формуле  $\kappa(u) := d(\gamma(ut), \gamma'(ut'))$ . Докажите, что  $\kappa$  – выпуклая функция.

**Указание.** Задача 8.20 решается тем же самым рассуждением.

**Задача 8.26.** Пусть  $\gamma : [0, t] \rightarrow M$ ,  $\gamma' : [0, t'] \rightarrow M$  – геодезические в пространстве Александрова неположительной кривизны, радиус выпуклости  $\gamma$  равен  $\varepsilon$ , а  $d_\Gamma(\gamma, \gamma') < \varepsilon$ . Докажите, что расстояние между геодезическими есть максимум расстояния между концами.

$$d_\Gamma(\gamma, \gamma') = \max(d(\gamma(0), \gamma'(0)), d(\gamma(t), \gamma'(t'))).$$

**Задача 8.27.** Рассмотрим отображение  $\Gamma_p(M) \xrightarrow{\pi} M$ , переводящее геодезическую в ее второй конец. Пусть  $\varepsilon$  – радиус выпуклости для  $\gamma$ . Докажите, что для  $\varepsilon$ -шара  $B_\varepsilon(\gamma) \subset \Gamma_p(M)$ , ограничение  $\pi|_{B_\varepsilon(\gamma)}$  задает изометрия  $B_\varepsilon(\gamma)$  и шара  $B_\varepsilon(\pi(\gamma))$

**Указание.** Воспользуйтесь предыдущей задачей.

**Задача 8.28 (!).** Пусть  $M_1, M$  – полные метрические пространства,  $\rho : M \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$  – непрерывная функция, а  $\pi : M_1 \rightarrow M$  – отображение, которое задает изометрию

$$\pi : B_{\rho(\pi(x))}(x) \rightarrow B_{\rho(\pi(x))}(\pi(x))$$

для любой точки  $x \in M_1$ . Докажите, что  $\pi$  – накрытие.

**Задача 8.29.** Пусть  $M$  полное пространство Александрова неположительной кривизны. Рассмотрим отображение  $\Gamma_p(M) \xrightarrow{\pi} M$ , переводящее геодезическую в ее второй конец. Докажите, что это накрытие.

**Указание.** Воспользуйтесь предыдущей задачей.

**Задача 8.30.** Пусть  $M$  – полное пространство Александрова неположительной кривизны (как обычно, мы предполагаем, что метрика в  $M$  – строго внутренняя).

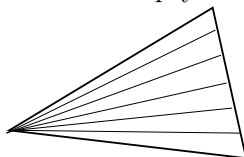
- а. Докажите, что любая геодезическая в  $M$  – кратчайшая.
- б. Докажите, что любые две точки  $M$  соединяются единственной геодезической.

### 8.4. Тонкие треугольники и пространства Адамара

**Определение 8.10.** Полное, односвязное пространство Александрова неположительной кривизны называется **пространством Адамара**.

**Определение 8.11.** Пусть  $M$  – пространство Александрова неположительной кривизны, а  $\Delta(a, p, b)$  – треугольник, составленный из кратчайших  $[a, b]$ ,  $[a, p]$  и  $[b, p]$ . Назовем  $\Delta(a, p, b)$  **тонким**, если  $d([a, p], [b, p]) < \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  есть радиус выпуклости множества  $[a, p] \cap [b, p]$ . Угол, образованный средней вершиной  $p$  и кратчайшими  $[a, p]$  и  $[b, p]$  называется **тонким**.

**Задача 8.31 (!).** Пусть  $M$  – пространство Адамара. Докажите, что любой треугольник, составленный из геодезических, можно разрезать на тонкие треугольники, как на картинке.



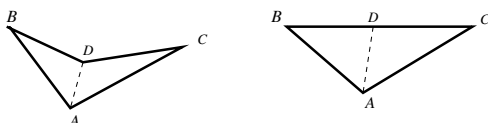
**Указание.** Воспользуйтесь гомотопией, построенной в задаче 8.13, приспособив ее констркцию для пространств Адамара.

**Задача 8.32 (!).** Пусть для каждого тонкого треугольника в  $M$  выполнено неравенство сравнения. Докажите, что  $M$  есть CAT(0)-пространство.

**Указание.** Воспользуйтесь предыдущей задачей.

**Определение 8.12.** Пусть  $a, b, c$  – три точки в метрическом пространстве, а  $\Delta(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$  – треугольник сравнения. Рассмотрим кратчайшие  $\gamma_1, \gamma_2$ , соединяющие  $a$  с  $b$  и  $a$  с  $c$ . **Условие сравнения углов для неположительной кривизны** есть неравенство  $\angle(\gamma_1, a, \gamma_2) \leq \angle(\bar{c}\bar{a}\bar{b})$  (для каждого из трех углов).

**Задача 8.33.** Рассмотрим шарнирный механизм из четырех стержней на плоскости. Пусть четырехугольники  $A_1B_1D_1C_1$  и  $A_2B_2D_2C_2$  на плоскости получены движением стержней этого механизма (математически, это означает, что  $|A_1B_1| = |A_2B_2|$ ,  $|B_1C_1| = |B_2C_2|$ ,  $|C_1D_1| = |C_2D_2|$ ,  $|D_1A_1| = |D_2A_2|$ ).



Предположим, что  $\angle(B_2D_2C_2) = \pi$ , а  $\angle(B_1D_1C_1) \geq \pi$ . Докажите, что  $\angle(B_2A_2C_2) \geq \angle(B_1A_1C_1)$ ,  $\angle(A_2C_2D_2) \geq \angle(A_1C_1D_2)$  и  $\angle(A_2B_2D_2) \geq \angle(A_1B_1D_2)$ .

**Указание.** Примените лемму Александрова.

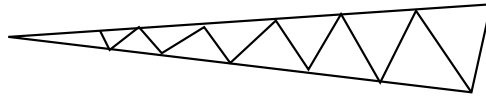
**Задача 8.34.** Пусть  $\Delta(a, b, c)$  – треугольник в пространстве Адамара, а  $d$  – точка на кратчайшей  $[b, c]$ . Предположим, что для  $\Delta(a, b, d)$  и  $\Delta(a, c, d)$  выполнено условие сравнения углов. Нарисуем на плоскости треугольники сравнения  $\Delta(\bar{a}, \bar{d}, \bar{c})$  и  $\Delta(\bar{a}, \bar{d}, \bar{c})$ , отложив их по разные стороны от  $(\bar{a}, \bar{d})$ .

- Докажите, что  $\angle(\bar{a}, \bar{d}, \bar{c}) + \angle(\bar{a}, \bar{d}, \bar{b}) > \pi$ .
- Пусть  $\Delta(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c})$  – треугольник сравнения для  $\Delta(a, b, c)$ . Докажите, что углы  $\Delta(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c})$  меньше, чем соответствующие углы в четырехугольнике  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{d}, \bar{c}$ .
- (!) Докажите, что для  $\Delta(a, b, c)$  выполнено условие сравнения углов.

**Указание.** Во втором пункте, воспользуйтесь предыдущей задачей.

**Задача 8.35 (!).** Докажите неравенство сравнения углов в тонком треугольнике.

**Указание.** Разрежьте плоский треугольник на треугольники, лежащие в нормальных шарах, как на картинке,



и примените предыдущую задачу.

**Задача 8.36 (!).** (теорема Картана-Адамара) Пусть  $M$  – пространство Адамара. Докажите, что  $M$  – CAT(0)-пространство. Докажите, что оно стягиваемо.

**Задача 8.37 (\*).** Приведите пример неполного пространства Александрова неположительной кривизны, где не выполнено CAT(0)-условие, либо докажите, что такого не бывает.

**Определение 8.13.** Функция  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  на метрическом пространстве называется  $\lambda$ -выпуклая, если для любой геодезической  $\gamma : [0, t] \rightarrow M$ , функция  $u \rightarrow f(\gamma(u)) - \lambda^2 u$  выпукла.

**Задача 8.38 (\*).** Пусть  $M$  – пространство Адамара,  $z \in M$ , а  $d_z(x) = d(x, z)$ . Докажите, что функция  $d_z^2$  1-выпуклая.

**Задача 8.39 (\*).** Пусть  $\lambda > 0$ . Докажите, что любая  $\lambda$ -выпуклая функция на полном пространстве имеет минимум.

**Задача 8.40 (\*).** Пусть  $Z \subset M$  – замкнутое, ограниченное подмножество пространства Адамара. **Описанный шар** для  $Z$  есть шар  $B_r(x)$  минимального радиуса, содержащий  $Z$ . Докажите, что для любого конечного подмножества  $Z \subset M$ , описанный шар существует и единственен.

**Задача 8.41 (\*\*).** Пусть  $Z \subset M$  – замкнутое, ограниченное подмножество локально компактного пространства Адамара. Докажите, что описанный шар для  $Z$  существует и единственен.

**Определение 8.14.** **Луч** в метрическом пространстве есть изометрическое вложение  $[0, \infty[ \rightarrow M$ . **Параллельные лучи** суть лучи  $\gamma, \gamma' : [0, \infty[ \rightarrow M$  такие, что  $d(\gamma(t), \gamma'(t))$  ограничено.

**Задача 8.42 (\*\*).** Пусть  $\gamma : [0, \infty[ \rightarrow M$  – луч в локально компактном пространстве Адамара. Докажите, что для любой точки  $z \in M$ , существует и единственный луч, параллельный  $\gamma$ , и выходящий из  $z$ .

**Задача 8.43 (\*\*).** Пусть  $G$  – конечная подгруппа в группе изометрий пространства Адамара. Докажите, что  $G$  оставляет неподвижной точку.