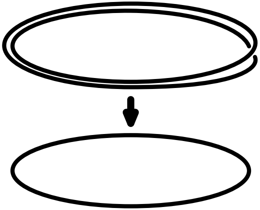
Классические неевклидовы геометрии

Саша Ананьин

UNICAMP, лаборатория Богомолова

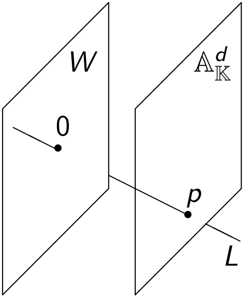
25 октября 2012

Проективное пространство и его родственники



Определение. Пусть $\mathbb{K}$ обозначает поле $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ и пусть V — конечномерное $\mathbb{K}$-линейное пространство размерности $\dim_{\mathbb{K}} V = d+1$. **Проективное пространство** $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}V$ или $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^d$ — это $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}V := V^\times/\mathbb{K}^\times$, где $X^\times := X \setminus \{0\}$ и, стало быть, $\mathbb{K}^\times$ — это мультипликативная группа поля $\mathbb{K}$.

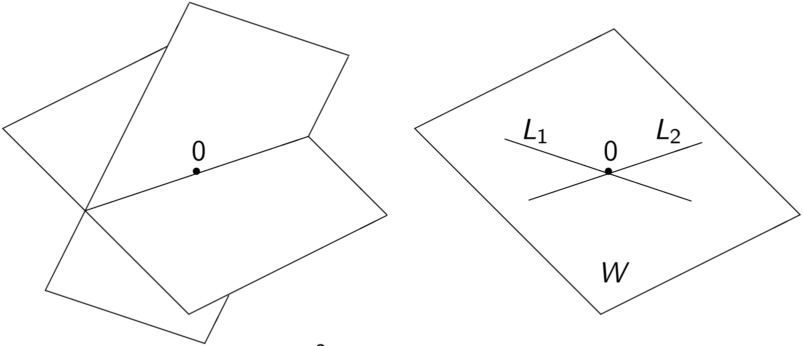
Другими словами, точки проективного пространства — это проходящие через 0 $\mathbb{K}$-прямые в V. Ясно, что $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ получается отождествлением диаметрально противоположных точек окружности и поэтому является окружностью.



$\mathbb{K}$-линейное подпространство $W \le V$ задает **линейное** подпространство $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}W \le \mathbb{P}_{\mathbb{K}}V$. Пусть $W \le V$ — $\mathbb{K}$-линейное подпространство коразмерности 1 и $0 \notin \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^d \le V$ — гиперплоскость параллельная W. Проектируя из 0, отождествим $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^d$ с частью проективного пространства $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}V$. Ясно, что $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}V = \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^d \sqcup \mathbb{P}_{\mathbb{K}}W$, т.е., $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^d = \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^d \sqcup \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{d-1}$.

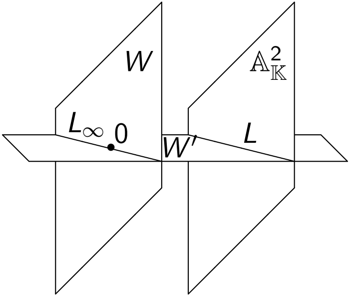
Проективное пространство (ликбез)

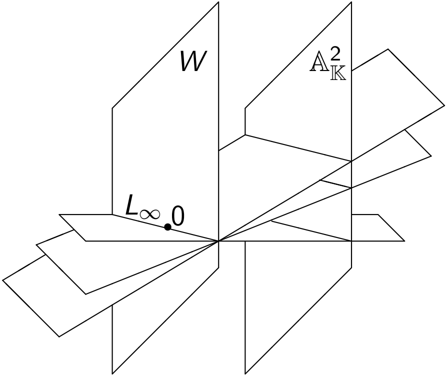
Значит $\mathbb{P}^d_{\mathbb{K}}$ — это "обычное" аффинное пространство $\mathbb{A}^d_{\mathbb{K}}$ плюс "бесконечноудаленная" гиперплоскость $\mathbb{P}^{d-1}_{\mathbb{K}}$. Отметим, что в таком разложении, мы можем выбрать произвольную гиперплоскость в качестве бесконечноудаленной.



На проективной плоскости $\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ нет параллельных прямых и через любые две различные точки проходит единственная прямая.

Проективное пространство (ликбез)





“Обычные” прямые в $\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$, будучи пополнены (каждая своей) бесконечноудаленной точкой, принадлежащей $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$, являются прямыми в $\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$. При этом бесконечноудаленная прямая $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ составлена из таких точек. Более того, прямые в $\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$ параллельны тогда и только тогда, когда соответствующие точки в $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ совпадают.

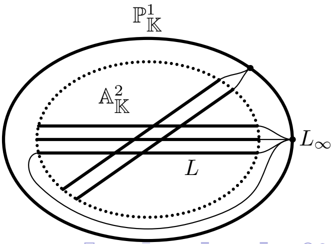
Проективное пространство (ликбез)

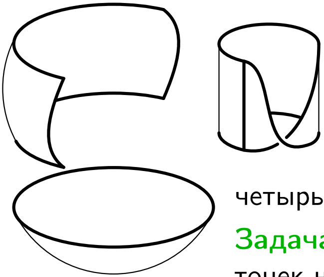
Используя при необходимости “проективную” линейку и выбирая подходящим образом бесконечноудаленную прямую, можно решить следующие задачи:

Задача. На обычной плоскости даны прямая L и точка p. Можно ли при помощи одной лишь линейки построить прямую, параллельную L и проходящую через p ?

Задача. На обычной плоскости даны две различные параллельные прямые L_1, L_2 и точка p. Можно ли при помощи одной лишь линейки построить прямую, параллельную L_1, L_2 и проходящую через p ?

Схематически получается нарисованная картинка для $\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$. Чтобы “увидеть” как на самом деле выглядит вещественная проективная плоскость $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$, мы отождествим диаметрально противоположные точки сферы $\mathbb{S}^2$, предварительно разрезав сферу на 4 куска и выкинув 2 ненужных, “повторяющихся” куска.





Получается диск и лента Мебиуса, склеенные вдоль границы.

Задача. Прямая разбивает обычную плоскость на две части. На сколько частей разбивается вещественная проективная плоскость четырьмя своими общими прямыми?

Задача. Опишите пространство неупорядоченных пар точек на окружности.

Соглашения. Пусть $V^{\times} \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}_{\mathbb{K}}V$ — проекция, и пусть $S \subset V$ — произвольное подмножество. Обозначаем через $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}S := \pi\big(S \setminus \{0\}\big) \subset \mathbb{P}_{\mathbb{K}}V$ **проективизацию** S. Мы будем часто обозначать одним и тем же символом p точку проективного пространства $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}V$, ее представитель в V и соответствующее одномерное $\mathbb{K}$-линейное подпространство в V.

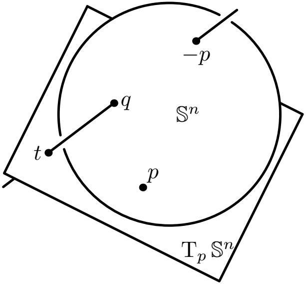
Линейные координаты $(x_0, x_1, \ldots, x_d)$ в V дают в $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}V$ **проективные координаты** $[x_0, x_1, \ldots, x_d]$. При этом $[x_0, x_1, \ldots, x_d] = [x'_0, x'_1, \ldots, x'_d]$ тогда и только тогда, когда $x'_i = kx_i$ для всех i и некоторого $k \in \mathbb{K}^{\times}$.

Сфера (ликбез)

Это позволяет считать проективное пространство $\mathbb{P}^d_{\mathbb{K}}$, склеенным из $d+1$ копии аффинного пространства $\mathbb{A}^d_{\mathbb{K}}$. Например, склеивая из двух копий пространства $\mathbb{A}^1_{\mathbb{K}} = \mathbb{K}$ с аффинными координатами x_0, x_1 и отождествляя при этом $\mathbb{K}^\times \subset (\mathbb{K}, x_0)$ и $\mathbb{K}^\times \subset (\mathbb{K}, x_0)$ при помощи соотношения $x_0 x_1 = 1$, получаем $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$.

Определение. Обозначим через $\mathbb{R}^{>0} := \{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}$ мультипликативную группу положительных вещественных чисел. Пусть V — $(d+1)$-мерное $\mathbb{R}$-линейное пространство. Пространство $\mathbb{S}^d := V^\times/\mathbb{R}^{>0}$ называется ***d*-мерной сферой**. Если V снабжено положительно определенной симметрической формой $\langle -, - \rangle$, то можно стандартно определить $\mathbb{S}^d := \{p \in V \mid \langle p, p \rangle = 1\}$ и задать **касательное пространство** к $\mathbb{S}^d$ в точке $p \in \mathbb{S}^d$ как $\mathbb{R}$-линейное подпространство $\mathrm{T}_p \mathbb{S}^d = p^\perp := \{t \in V \mid \langle t, p \rangle = 0\} \leq V$. При этом гиперплоскость в V, в самом деле касающаяся $\mathbb{S}^d$, имеет вид $p^\perp + p$. (На картинках будет изображаться именно эта последняя гиперплоскость.)

Стереографическая проекция (ликбез)



Определение. **Стереографическая проекция** $\varsigma_p : \mathbb{S}^n \setminus \{-p\} \to \mathrm{T}_p\,\mathbb{S}^n$ отображает точку $q \in \mathbb{S}^n \setminus \{-p\}$ в точку пересечения $L(-p,q) \cap \mathrm{T}_p\,\mathbb{S}^n$, где $L(-p,q)$ обозначает прямую соединяющую точки $-p$ и q.

Задача. Докажите, что

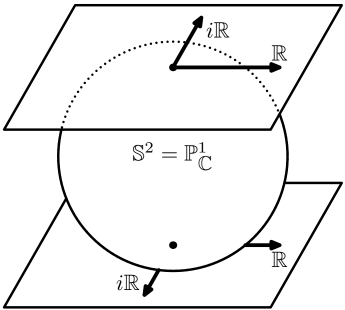
$$\varsigma_p : \mathbb{S}^n \setminus \{-p\} \ni q \mapsto \frac{q+p}{1+\langle q,p\rangle} - p \in \mathrm{T}_p\mathbb{S}^n,$$

$$\varsigma_p^{-1} : \mathrm{T}_p\mathbb{S}^n \ni t \mapsto \frac{2(t+p)}{1+\langle t,t\rangle} - p \in \mathbb{S}^n \setminus \{-p\}.$$

Задача. Докажите, что стереографическая проекция устанавливает взаимнооднозначное соответствие между сферами лежащими в $\mathbb{S}^d$ ($=$ пересечениями $\mathbb{S}^d$ с афинными подпространствами в V) и сферами или аффинными подпространствами в $\mathrm{T}_p\,\mathbb{S}^n$.

Задача. Докажите, что стереографическая проекция сохраняет углы между кривыми.

Сфера Римана (ликбез)



Легко доказать (непосредственно или пользуясь формулами для стереографической проекции), что композиция двух стереографических проекций на картинке отождествляет $\mathbb{C}^\times$ в двух копиях $\mathbb{C}$ в согласии с соотношением $x_0x_1 = 1$. Для этого достаточно заметить, что эта композиция обращает аргумент и модуль комплексного числа. Таким образом, $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ — это двумерная сфера. Она называется **сферой Римана**.

Определение. Зафиксируем конечномерные $\mathbb{K}$-линейные пространства P, V и обозначим через $M := \{p \in \mathrm{Lin}_{\mathbb{K}}(P, V) \mid \ker p = 0\}$ (открытое) подмножество всех мономорфизмов в $\mathbb{K}$-линейном пространстве $\mathrm{Lin}_{\mathbb{K}}(P, V)$. Группа $\mathrm{GL}_{\mathbb{K}}\,P$ всех невырожденных $\mathbb{K}$-линейных преобразований пространства P действует справа на $\mathrm{Lin}_{\mathbb{K}}(P, V)$ и на M. **Грассманиан $\mathrm{Gr}_{\mathbb{K}}(k, V)$** — это фактор

$$\mathrm{Gr}_{\mathbb{K}}(k, V) := M/\mathrm{GL}_{\mathbb{K}}P, \qquad M \xrightarrow{\pi} M/\mathrm{GL}_{\mathbb{K}}P,$$

где $k := \dim_{\mathbb{K}} P$. Он является пространством всех k-мерных $\mathbb{K}$-линейных подпространств в V. В случае $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, взяв группу $\mathrm{GL}_{\mathbb{R}}^+\,P := \{g \in \mathrm{GL}_{\mathbb{R}}\,P \mid \det g > 0\}$ вместо $\mathrm{GL}_{\mathbb{K}}\,P$, получаем **грассманиан ориентированных k-мерных $\mathbb{R}$-линейных подпространств в V**

$$\mathrm{Gr}_{\mathbb{R}}^+(k, V) := M/\mathrm{GL}_{\mathbb{R}}^+P, \qquad M \xrightarrow{\pi'} M/\mathrm{GL}_{\mathbb{R}}^+P.$$

(Приведенные выше соглашения, касающиеся проективных пространств, будут использоваться также и для грассманианов.)

Гладкие многообразия (ликбез)

Определение. Пусть M — топологическое пространство, и пусть для каждого открытого $U \subset\!\circ\, M$ фиксирована некоторая $\mathbb{K}$-алгебра $\mathcal{F}(U)$ $\mathbb{K}$-значных функций формата $U \xrightarrow{f} \mathbb{K}$, такая что

- из $W \subset\!\circ\, U \subset\!\circ\, M$ и $f \in \mathcal{F}(U)$ следует $f|_W \in \mathcal{F}(W)$
- для любой функции $U \xrightarrow{f} \mathbb{K}$ из того, что $f|_{U_i} \in \mathcal{F}(U_i)$ для всех $i \in I$, следует, что $f \in \mathcal{F}(U)$, где $U_i \subset\!\circ\, M$ и $U := \bigcup\limits_{i \in I} U_i$.

$(M, \mathcal{F})$ называется **пространством с пучком $\mathcal{F}$ $\mathbb{K}$-значных функций** или просто **пространством с пучком (функций)**.

Морфизм $(M_1, \mathcal{F}_1) \xrightarrow{\psi} (M_2, \mathcal{F}_2)$ между пространствами с пучками — это такое непрерывное отрображение $M_1 \xrightarrow{\psi} M_2$, что $f_2 \circ \psi \in \mathcal{F}_1\big(\psi^{-1}(U_2)\big)$ для любых $U_2 \subset\!\circ\, M_2$ и $f_2 \in \mathcal{F}_2(U_2)$.

Понятие пучка выражает какое-то локальное свойство функций.

Индуцированная структура (ликбез)

Пусть $(M_2, \mathcal{F}_2)$ — пространство с пучком и $M \overset{\varphi}{\to} M_2$ — произвольное отображение. Тогда существуют слабейшая (с наименьшим семейством открытых множеств) топология и наименьший пучок $\mathcal{F}$ на M, такие что φ — морфизм: открытые подмножества в M имеют вид $U = \varphi^{-1}(U_2)$, где $U_2 \subset\!\circ\, M_2$, а функция $M \circ\!\supset U \overset{f}{\to} \mathbb{K}$ принадлежит $\mathcal{F}(U)$ если она локально имеет вид $f_2 \circ \varphi$, т.е., существует открытое покрытие $U_2 = \bigcup\limits_{i \in I} U_i$ и функции $f_i \in \mathcal{F}_2(U_i)$, такие что $U = \varphi^{-1}(U_2)$ и $f|_{\varphi^{-1}(U_i)} = f_i \circ \varphi$ для всех $i \in I$. Такая структура на M называется **индуцированной**. Она универсальна: **если $\psi = \varphi \circ \vartheta$ для некоторых отображения**

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[rr, "\psi"'] \arrow[dr, "\vartheta"'] & & M_2 \\ & M \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

$M_1 \overset{\vartheta}{\to} M$ и морфизма $(M_1, \mathcal{F}_1) \overset{\psi}{\to} (M_2, \mathcal{F}_2)$, то ϑ — морфизм. На подмножествах $M \subset M_2$ обычно подразумевается индуцированная структура. В этом случае, она обозначается $\mathcal{F}_2|_M$. Если $M \subset\!\circ\, M_2$, то индуцированная структура очевидна.

Индуцированная структура и многообразия (ликбез)

Пусть $(M_1, \mathcal{F}_1)$ — пространство с пучком и $M_1 \xrightarrow{\varphi} M$ — произвольное отображение. Тогда существуют сильнейшая топология и наибольший пучок $\mathcal{F}$ на M, такие что φ — морфизм: $U \subset\!\circ\, M$, если $\varphi^{-1}(U) \subset\!\circ\, M_1$; а функция $M \circ\!\supset U \xrightarrow{f} \mathbb{K}$ принадлежит $\mathcal{F}(U)$, если $f \circ \varphi \in \mathcal{F}_1\big(\varphi^{-1}(U)\big)$. Такая структура тоже называется **индуцированной**. Она универсальна: **если $\psi = \vartheta \circ \varphi$ для некоторых отображения и морфизма, $M \xrightarrow{\vartheta} M_2$ и $(M_1, \mathcal{F}_1) \xrightarrow{\psi} (M_2, \mathcal{F}_2)$, то ϑ — морфизм**. Эта структура обычно подразумевается на факторах по отношению эквивалентности $\sim$, $M_1 \to M := M_1/\sim$.

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & M_2 \\ & M \arrow[ur, "\vartheta"'] & \end{tikzcd}$$

Определение. Хаусдорфово топологическое пространство M со счетной базой топологии и с пучком $\mathcal{F}$ называется **гладким многообразием**, если оно локально изоморфно открытым подмножествам конечномерных $\mathbb{K}$-линейных пространств с их пучками C^∞-функций, т.е., $M = \bigcup\limits_{i \in I} U_i$, $U_i \subset\!\circ\, M$ и $(U_i, \mathcal{F}|_{U_i}) \subset\!\circ (V_i, C^\infty)$, где V_i — конечномерные $\mathbb{K}$-линейные пространства.

Задача. Проверьте, что проективные пространства и сферы (и, более обще, грассманианы) являются гладкими многообразиями.

Задача. Докажите, что сфера, определенная как подпространство, изоморфна (=**диффеоморфна**) сфере, определенной как фактор-пространство.

Определение. **Касательный вектор** t к многообразию M в точке $p \in M$ — это дифференцирование C^∞-функций, определенных в p, со значениями в $\mathbb{K}$. Это означает, что для любой функции $f \in C^\infty(U)$ с $p \in U \subset\circ M$ определено $tf \in \mathbb{K}$, причем $t(f|_W) = tf$, если $p \in W \subset\circ U$. При этом t $\mathbb{K}$-линейно и удовлетворяет правилу Лейбница $t(f_1 f_2) = f_1(p)tf_2 + f_2(p)tf_1$. Для фиксированной точки p, все касательные векторы образуют $\mathbb{K}$-линейное **касательное пространство** $\mathrm{T}_p M$ к M в точке $p \in M$.

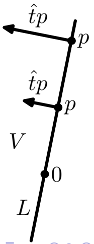
Интуитивно, касательный вектор — это дифференцирование гладких функций в направлении этого вектора: $t_p f := \lim\limits_{\mathbb{R}\ni\varepsilon\to 0} \frac{f(p+\varepsilon t)-f(p)}{\varepsilon}$.

Касательное пространство (ликбез)

Задача. Пусть V — конечномерное $\mathbb{K}$-линейное пространство. Проверьте, что формула $t_p f = \lim\limits_{\mathbb{R}\ni\varepsilon\to 0} \frac{f(p+\varepsilon t)-f(p)}{\varepsilon}$ для $p \in U \subset\!\circ\, V$ и $t \in V$ канонически отождествляет $\mathbb{R}$-линейные пространства $\mathrm{T}_p\, U = V$.

Задача. Пусть V — конечномерное $\mathbb{K}$-линейное пространство, и пусть $V^\times \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}_\mathbb{K} V$ обозначает проекцию. Проверьте, что формула $t_p f := \lim\limits_{\mathbb{R}\ni\varepsilon\to 0} \frac{f\circ\pi(p+\varepsilon\hat{t})-f\circ\pi(p)}{\varepsilon}$, где $\hat{t} \in \mathrm{Lin}_\mathbb{K}(p, V)$ — произвольный подъем элемента $t \in \mathrm{Lin}_\mathbb{K}(p, V/p)$, задает каноническое отождествление $\mathrm{T}_p\, \mathbb{P}_\mathbb{K} V = \mathrm{Lin}_\mathbb{K}(p, V/p)$ $\mathbb{R}$-линейных пространств. (Аналогичное утверждение справедливо для грассманианов.)

Замечание. Интуитивно, касательный вектор $t \in \mathrm{T}_p\, \mathbb{P}_\mathbb{K} V$ — это “(угловая) скорость вращения” прямой $L \subset V$ вокруг 0. Это объясняет, почему отождествление $\mathrm{T}_p\, \mathbb{P}_\mathbb{K} V = \mathrm{Lin}_\mathbb{K}(p, V/p)$ является более адекватным, чем отождествление $\mathrm{T}_p\, \mathbb{P}_\mathbb{K} V = V/p$: при изменении представителя $p \in L \subset V$, “перпендикулярный” прямой L вектор $\hat{t}p$ растягивается соответственно.



Касательное расслоение (ликбез)

То, что мы отождествляли $\mathrm{T}_p\,\mathbb{S}^d = p^\perp \simeq V/p$, объясняется наличием канонического представителя $p \in V$ с $\langle p, p\rangle = 1$.

Пусть M — гладкое многообразие. Определим $\mathrm{T}\,M := \bigsqcup\limits_{p\in M} \mathrm{T}_p\,M$ с очевидной проекцией $\mathrm{T}\,M \xrightarrow{\pi} M$. По одной из предыдущих задач, имеем естественное отождествление $\mathrm{T}\,U = V \times U$ в случае, если $U \subset\!\circ\, V$, где V — конечномерное $\mathbb{K}$-линейное пространство. Это позволяет определить структуру гладкого многообразия на $\mathrm{T}\,M$. При этом $\mathrm{T}\,M \xrightarrow{\pi} M$ — морфизм (= **гладкое отображение**). Иными словами, $\mathrm{T}\,M \xrightarrow{\pi} M$ — локально тривиальное **касательное расслоение**.

Для пространств и морфизмов $T_1 \xrightarrow{\pi_1} M \xleftarrow{\pi_2} T_2$ определим **расслоенное произведение** $T_1 \times_M T_2 \xrightarrow{\pi} M$ как $T_1 \times_M T_2 := \big\{(t_1, t_2) \in T_1 \times T_2 \mid \pi_1 t_1 = \pi_2 t_2\big\}$ с индуцированной структурой и очевидной проекцией. (Полезно представлять $T_1 \times_M T_2 \xrightarrow{\pi} M$ как семейство послойных произведений параметризованных M, т.е., $\pi^{-1}(p) = \pi_1^{-1}(p) \times \pi_2^{-1}(p)$ для всех $p \in M$.)

Ясно, что $\mathrm{T}\,M \times_M \mathrm{T}\,M \to M$ — гладкое отображение многообразий.

(Псевдо)риманово многообразие (ликбез)

Задача. Проверьте, что операции $+$ и $\cdot$ являются гладкими на $\mathrm{T}\,M$, т.е., что отображения $\mathrm{T}\,M \times_M \mathrm{T}\,M \overset{+}{\to} \mathrm{T}\,M$, $(t_1, t_2) \mapsto t_1 + t_2$, и $\mathbb{R} \times \mathrm{T}\,M \overset{\cdot}{\to} \mathrm{T}\,M$, $(r, t) \mapsto r \cdot t$, являются гладкими.

Определение. Пусть $]a, b[\overset{c}{\to} M$ — гладкая кривая в многообразии. **Касательный вектор $\dot{c}(s_0)$** к кривой c в точке $c(s_0)$ задается формулой $\dot{c}(s_0)f := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=s_0} f\big(c(s)\big)$. Очевидно, $\dot{c}(s_0) \in \mathrm{T}_{c(t_0)}\,M$.

Определение. Предположим, что, для каждой точки $p \in M$, $\mathbb{R}$-линейное пространство $\mathrm{T}_p\,M$ снабжено положительно определенной (невырожденной) симметрической билинейной формой $\langle -, - \rangle$, причем отображение $\mathrm{T}\,M \times_M \mathrm{T}\,M \xrightarrow{\langle -,- \rangle} \mathrm{T}\,M$, $(t_1, t_2) \mapsto \langle t_1, t_2 \rangle$, гладкое. Тогда M называется **римановым (псевдо-римановым) многообразием**.

В римановом многообразии кусочно-гладкие пути образуют естественный класс допустимых путей, а функционал длины задается формулой $\ell c := \int\limits_a^b \sqrt{\big\langle \dot{c}(s), \dot{c}(s) \big\rangle}\,\mathrm{d}s$, где $[a, b] \overset{c}{\to} M$ — допустимый путь.

Элементарная неевклидова геометрия

Фиксируем конечномерное $\mathbb{K}$-линейное пространство V, снабженное невырожденной эрмитовой формой $\langle -,-\rangle$, необязательно положительно определенной. Проективное пространство $\mathbb{P}_{\mathbb{K}} V$ распадается на три части $\mathrm{B}\,V := \big\{p \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}} V \mid \langle p,p\rangle < 0\big\}$, $\mathrm{E}\,V := \big\{p \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}} V \mid \langle p,p\rangle > 0\big\}$ и $\mathrm{S}\,V := \big\{p \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}} V \mid \langle p,p\rangle = 0\big\}$ (эта последняя называется **абсолютом**), в соответствии со **знаком** $-$, $+$ или 0 точки.

Для любой точки $p \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}} V \setminus \mathrm{S}\,V$ имеем ортогональное разложение $V = p \oplus p^\perp$, $p^\perp := \big\{v \in V \mid \langle v,p\rangle = 0\big\}$, и соответствующие ортогональные проекции $\pi'[p]$ и $\pi[p]$, $v = \pi'[p]v + \pi[p]v$, заданные формулами $\pi'[p]v := \frac{\langle v,p\rangle}{\langle p,p\rangle}p$ и $\pi[p]v := v - \frac{\langle v,p\rangle}{\langle p,p\rangle}p$. В частности, имеем естественные отождествления $\mathrm{T}_p\,\mathbb{P}_{\mathbb{K}} V = \mathrm{Lin}_{\mathbb{K}}(p,p^\perp) = \langle -,p\rangle p^\perp$.

Задача. Пусть $]a,b[\xrightarrow{c} \mathbb{P}_{\mathbb{K}} V$ — гладкая кривая, $]a,b[\xrightarrow{c_0} V$ — гладкое поднятие кривой c в V и $c(s) \notin \mathrm{S}\,V$. Покажите, что касательный вектор к кривой c в точке $c(s)$ соответствует $\mathbb{K}$-линейному отображению $\mathbb{K}c_0(s) \xrightarrow{\dot c(s)} c_0(s)^\perp$, такому что $c_0(s) \mapsto \pi\big[c_0(s)\big]\dot c_0(s)$.

Геодезические

Определение. Пусть $W \leq V$ — двумерное $\mathbb{R}$-линейное подпространство, такое что форма $\langle -, - \rangle$ принимает на W вещественные значения и не является тождественно нулевой, $0 \neq \langle W, W \rangle \subset \mathbb{R}$. Окружность $\Gamma := \mathbb{P}_{\mathbb{K}} W$ называется **геодезической**. В соответствии с сигнатурой формы $\langle -, - \rangle$, ограниченной на W, геодезическая является: **сферической** при сигнатуре $++$ **или** $--$, **евклидовой** при сигнатуре $+0$ **или** -0, **гиперболической** при сигнатуре $+-$.

Задача. Заметьте, что через точки $p_1, p_2 \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}} V$, $p_1 \neq p_2$,
• не проходит ни одной геодезической, если $p_1, p_2 \in \mathrm{S}\,V$ и точки **ортогональны**, т.е., $\langle p_1, p_2 \rangle = 0$;
• проходит единственная геодезическая, если точки неортогональны или если $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ и $p_1 \notin \mathrm{S}\,V$;
• проходит бесконечно много геодезических, если точки ортогональны, $p_1 \notin \mathrm{S}\,V$ и $\mathbb{K} = \mathbb{C}$; такие геодезические лежат на проективной прямой $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$, соединяющей p_1, p_2, причем любая геодезическая, содержащаяся в $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ и проходящая через p_1, обязательно проходит через p_2.

(Псевдо)эрмитова метрика

Задача. Пусть $p \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}} V \setminus \mathrm{S}\, V$ и $D \leq \mathrm{T}_p \mathbb{P}_{\mathbb{K}} V$ — одномерное $\mathbb{R}$-линейное подпространство. Докажите, что существует единственная геодезическая Γ, проходящая через p, с касательным вектором, принадлежащим D. Верно ли это утверждение без предположения $p \notin \mathrm{S}\, V$?

Замечание. Геодезическая Γ является сферической, евклидовой, гиперболической, когда пересечение $\mathrm{S}\, V \cap \Gamma$ состоит из $0, 1, 2$ точек, соответственно.

Определение. Пусть $p \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}} V \setminus \mathrm{S}\, V$ и $t_1, t_2 \in \mathrm{T}_p \mathbb{P}_{\mathbb{K}} V$, скажем, $t_i = \langle -, p \rangle v_i$, где $v_i \in p^\perp$. В зависимости от **настроения** $\pm$, определим **(псевдо)эрмитову метрику на** $\mathbb{P}_{\mathbb{K}} V \setminus \mathrm{S}\, V$ по формуле $\langle t_1, t_2 \rangle := \pm \langle p, p \rangle \langle v_1, v_2 \rangle$. Это же определение работает и для грассманианов: $\langle t_1, t_2 \rangle := \pm \operatorname{tr}(t_1 \circ t_2^*)$, где $\operatorname{tr} t$ и t^* обозначают след и сопряженный к $t \in \mathrm{Lin}_{\mathbb{K}}(V, V)$, предполагая, что $V = p + p^\perp$, поскольку, в этом случае, $\mathrm{T}_p \mathrm{Gr}_{\mathbb{K}}(k, V) = \mathrm{Lin}_{\mathbb{K}}(p, p^\perp) \leq \mathrm{Lin}_{\mathbb{K}}(V, V)$.

Длина геодезической и танция

Пусть $\Gamma := \mathbb{P}_{\mathbb{K}} W$ — гиперболическая геодезическая и $p_1, p_2 \in \Gamma$ — точки одинакового знака $\pm$. Поскольку $\mathrm{S}\, V \cap \Gamma = \{w_1, w_2\}$, то меняя местами w_1 и w_2, если необходимо, и выбирая подходящие представители $w_1, w_2, p_1, p_2 \in W$ и $d \geq 0$, имеем $\langle w_1, w_2 \rangle = \pm\frac{1}{2}$, $p_1 = w_1 + w_2$ и $p_2 = e^{-d} w_1 + e^d w_2$. Отображение $[0, d] \xrightarrow{\gamma} \Gamma$, $s \mapsto e^{-s} w_1 + e^s w_2$, гладко параметризует сегмент геодезической между p_1 и p_2, целиком состоящий из точек знака $\pm$, причем $\big\langle \gamma(s), \gamma(s) \big\rangle = \pm 1$. Пользуясь одной из предыдущих задач и находясь в хорошем настроении $-$, легко видеть, что $\dot\gamma(s) = \pm\big\langle -, \gamma(s) \big\rangle (-e^{-s} w_1 + e^s w_2)$ и $\big\langle \dot\gamma(s), \dot\gamma(s) \big\rangle = 1$. Поэтому длина сегмента γ геодезической Γ равна $\ell\gamma = \int\limits_0^d \sqrt{\big\langle \dot\gamma(s), \dot\gamma(s) \big\rangle}\, ds = d$.

Иными словами, параметризация γ — **натуральная**. Результат проделанного вычисления имеет инвариантный вид $\cosh^2 d = \mathrm{ta}(p_1, p_2)$, где $\mathrm{ta}(p_1, p_2) := \frac{\langle p_1, p_2 \rangle \langle p_2, p_1 \rangle}{\langle p_1, p_1 \rangle \langle p_2, p_2 \rangle}$ — **танция между p_1 и p_2**, а $\cosh s := \frac{e^{-s} + e^s}{2}$ — возрастающая функция при $s \geq 0$.

Длина геодезической и танция

Для сферической геодезической $\Gamma := \mathbb{P}_{\mathbb{K}}W$ и точек $p_1, p_2 \in \Gamma$ знака $\pm$, имеем натуральную параметризацию $[0, d] \xrightarrow{\gamma} \Gamma$, $s \mapsto p_1 \cos s + q_1 \sin s$, где $q_1 \in W \cap p_1^\perp$, $\langle p_1, p_1\rangle = \langle q_1, q_1\rangle = \pm 1$, $p_2 = p_1 \cos d + q_1 \sin d$ и $d \in [0, \frac{\pi}{2}]$ для подходящих представителей $p_1, p_2 \in W$. И снова, находясь в плохом настроении $+$, получаем $\ell\gamma = d$ и $\cos^2 d = \mathrm{ta}(p_1, p_2)$, причем $\cos s$ — убывающая функция при $s \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Длина геодезической и танция

Для сферической геодезической $\Gamma := \mathbb{P}_{\mathbb{K}} W$ и точек $p_1, p_2 \in \Gamma$ знака $\pm$, имеем натуральную параметризацию $[0, d] \xrightarrow{\gamma} \Gamma$, $s \mapsto p_1 \cos s + q_1 \sin s$, где $q_1 \in W \cap p_1^{\perp}$, $\langle p_1, p_1 \rangle = \langle q_1, q_1 \rangle = \pm 1$, $p_2 = p_1 \cos d + q_1 \sin d$ и $d \in [0, \frac{\pi}{2}]$ для подходящих представителей $p_1, p_2 \in W$. И снова, находясь в плохом настроении $+$, получаем $\ell\gamma = d$ и $\cos^2 d = \operatorname{ta}(p_1, p_2)$, причем $\cos s$ — убывающая функция при $s \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

В случае гиперболической геодезической, подобная же параметризация $\gamma(s) := p_1 \cosh s + q_1 \sinh s$ тоже работает.

Длина геодезической и танция

Для сферической геодезической $\Gamma := \mathbb{P}_{\mathbb{K}} W$ и точек $p_1, p_2 \in \Gamma$ знака $\pm$, имеем натуральную параметризацию $[0, d] \xrightarrow{\gamma} \Gamma$, $s \mapsto p_1 \cos s + q_1 \sin s$, где $q_1 \in W \cap p_1^{\perp}$, $\langle p_1, p_1 \rangle = \langle q_1, q_1 \rangle = \pm 1$, $p_2 = p_1 \cos d + q_1 \sin d$ и $d \in [0, \frac{\pi}{2}]$ для подходящих представителей $p_1, p_2 \in W$. И снова, находясь в плохом настроении $+$, получаем $\ell\gamma = d$ и $\cos^2 d = \mathrm{ta}(p_1, p_2)$, причем $\cos s$ — убывающая функция при $s \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

В случае гиперболической геодезической, подобная же параметризация $\gamma(s) := p_1 \cosh s + q_1 \sinh s$ тоже работает. (Да, простит меня Миша! Впрочем, я и сам ненавижу гиперболические функции, с тригонометрическими заодно.)

Длина геодезической и танция

Для сферической геодезической $\Gamma := \mathbb{P}_{\mathbb{K}} W$ и точек $p_1, p_2 \in \Gamma$ знака $\pm$, имеем натуральную параметризацию $[0, d] \xrightarrow{\gamma} \Gamma$, $s \mapsto p_1 \cos s + q_1 \sin s$, где $q_1 \in W \cap p_1^{\perp}$, $\langle p_1, p_1 \rangle = \langle q_1, q_1 \rangle = \pm 1$, $p_2 = p_1 \cos d + q_1 \sin d$ и $d \in [0, \frac{\pi}{2}]$ для подходящих представителей $p_1, p_2 \in W$. И снова, находясь в плохом настроении $+$, получаем $\ell\gamma = d$ и $\cos^2 d = \mathrm{ta}(p_1, p_2)$, причем $\cos s$ — убывающая функция при $s \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

В случае гиперболической геодезической, подобная же параметризация $\gamma(s) := p_1 \cosh s + q_1 \sinh s$ тоже работает. (Да, простит меня Миша! Впрочем, я и сам ненавижу гиперболические функции, с тригонометрическими заодно.)

Замечание. Хотя евклидовы геодезические и имеют нулевую длину, у них тоже есть натуральная параметризация: Пусть $\Gamma := \mathbb{P}_{\mathbb{K}} W$ — евклидова геодезическая и $p_1, p_2 \in \Gamma \setminus \mathrm{S}\, V$. Выберем представители $p_1, p_2 \in W$ так, что $\langle p_1, p_1 \rangle = \langle p_2, p_2 \rangle$. Тогда $[0, 1] \xrightarrow{\gamma} \Gamma$, $s \mapsto p_1 s + p_2(1 - s)$, — натуральная параметризация сегмента геодезической Γ, соединяющего $p_1, p_2 \in W$ и не содержащего точек абсолюта (настроение любое).

Мораль. Правильнее измерять не дистанцию, а танцию, поскольку последняя — первична, проще (алгебраическая) и, кроме того, может быть использована для точек разного знака.

Примеры

1. При $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, форме $\langle -, - \rangle$ сигнатуры $++$ и настроении $+$, получаем "круглую" сферу Римана $\mathrm{S}\,V = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ радиуса $\frac{1}{2}$.

2. При $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, форме $\langle -, - \rangle$ сигнатуры $+-$ и настроении $-$, получаем **сферу Римана-Пуанкаре** $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, разрезанную абсолютом (экватором) $\mathrm{S}\,V$ на два **диска Пуанкаре** $\mathrm{B}\,V$ и $\mathrm{E}\,V$.

При помощи стереографической проекции, мы можем отождествить каждый из них с единичным диском на плоскости $\mathbb{C}$: изометрия между $\mathrm{B}\,V$ и $\mathrm{E}\,V$ задается **двойственностью** $p \mapsto p^{\perp}$.

На картинке с двумя стереографическими проекциями сферы Римана, абсолют можно воспринимать как экватор, расположенный в горизонтальной плоскости. Тогда дуальные точки будут находиться на одной и той же вертикальной прямой. Поскольку геодезические замкнуты отно-

Примеры

сительно взятия дуальных точек, они являются пересечениями сферы $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ с "вертикальными" плоскостями. Следовательно, геодезические "ортогональны" абсолюту. В силу свойств стереографической проекции, геодезические на единичном диске в $\mathbb{C}$ — это окружности, ортогональные единичной окружности, или ее диаметры.

Эрмитова метрика положительно определена на дисках $\mathrm{B}\,V$ и $\mathrm{E}\,V$.

3. При $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, форме $\langle -,-\rangle$ сигнатуры $++-$ и настроении $-$, получаем **вещественную проективную плоскость Мёбиуса-Бельтрами-Клейна-Лоренца** $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$, разрезанную абсолютом $\mathrm{S}\,V$ на **диск Бельтрами-Клейна** $\mathrm{B}\,V$ и **ленту Мёбиуса-Лоренца** $\mathrm{E}\,V$.

В самом деле, выбрав в V ортонормальный базис сигнатуры $-++$, имеем проективные координаты $[x_0,x_1,x_2]$, в терминах которых $\mathrm{B}\,V=\big\{[1,x_1,x_2]\mid x_1^2+x_2^2<1\big\}$ — это единичный диск $\mathbb{D}$ в аффинной плоскости. Получается именно та картинка, при помощи которой мы поняли, что вещественная проективная плоскость $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ склеена из диска и ленты Мёбиуса.

Примеры

Геодезические — это в точности (проективные) прямые в $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$. При этом, геодезическая Γ — гиперболическая, если она пересекает единичный диск $\mathbb{D}$ по хорде; Γ — евклидова, если она касается абсолюта $\mathrm{S}\, V$; наконец, Γ — сферическая, если она целиком содержится в $\mathrm{E}\, V$.

На этот раз, **двойственность** $p \mapsto p^{\perp}$ превращает точки в геодезические (и vice-versa). При этом, гиперболическим геодезическим отвечают положительные точки, сферическим — отрицательные, а евклидовым — точки абслюта (их точки касания с абсолютом).

В частности, это означает, что $\mathrm{E}\, V$ — это пространство геодезических проходящих по диску $\mathrm{B}\, V$. (Поскольку такая геодезическая задается неупорядоченной парой точек на абсолюте, мы решили одну из предыдущих задач.)

Метрика положительно определена на диске $\mathrm{B}\, V$, а на ленте $\mathrm{E}\, V$ имеет в каждой точке сигнатуру $+-$, т.е., $\mathrm{E}\, V$ — **лоренцово многообразие**. **Лоренцова геометрия** вполне адекватна пространству геодезических: между непересекающимися геодезическими в диске $\mathrm{B}\, V$ имеется дистанция, а между пересекающимися — угол.

Примеры

Задача. Покажите, что отображение $z \mapsto \frac{2z}{1+|z|^2}$ задает изометрию (с точностью до постоянного множителя) между единичным диском в $\mathbb{C}$ и единичным диском $\mathbb{D}$ в аффинной плоскости.

Задача. Покажите, что отображение $z \mapsto \frac{2z}{1+|z|^2}$ задает изометрию (с точностью до постоянного множителя) между единичным диском в $\mathbb{C}$ и единичным диском $\mathbb{D}$ в аффинной плоскости.

Спасибо за внимание!