

# Классические неевклидовы геометрии

Саша Ананьин

UNICAMP, лаборатория Богомолова

01 ноября 2012

4. При  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , форме  $\langle -, - \rangle$  сигнатуры  $+\cdots+$  и настроении  $+$ , получаем проективное пространство  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}} V$ , снабженное эрмитовой **метрикой Фубини-Штуди**.
5. При  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , форме  $\langle -, - \rangle$  сигнатуры  $++-$  и настроении  $-$ , абсолютом  $S V$  является 3-сферой с естественной **CR-структурой**. Это означает, что в касательном расслоении  $TS V$  задано **контактное распределение** из  $\mathbb{C}$ -линейных подпространств  $D_p \leq T_p S V$ ,  $\dim_{\mathbb{C}} D_p = 1$ , гладкое по  $p \in S V$ , а именно,  $D_p := T_p S V \cap i T_p S V$ . (В нечетномерных многообразиях, CR-структура играет роль комплексной структуры.) Абсолют  $S V$  ограничивает в комплексной проективной плоскости  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}} V$  **голоморфный 2-шар  $B V$**  (= вещественно четырехмерный шар с интегрируемой комплексной структурой), снабженный **комплексно-гиперболической геометрией**, т.е., соответствующей эрмитовой метрикой.
- (Псевдо)эрмитова метрика имеет сигнатуру  $++$  и  $+-$  в  $B V$  и  $E V$ , соответственно.

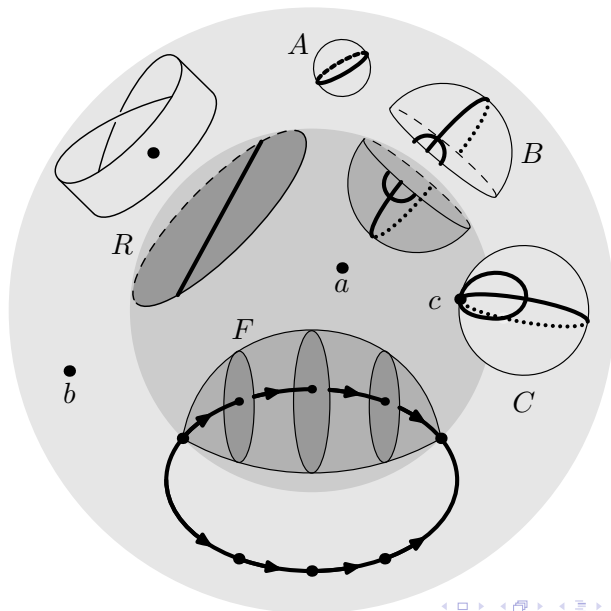
Каждая геодезическая  $\Gamma$  порождает проективную прямую  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}} V$ , такую что  $\Gamma \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ . Причем  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  является “круглой” сферой (пример 1) в случае сферической  $\Gamma$  и сферой Римана-Пуанкаре (пример 2) в случае гиперболической  $\Gamma$ . Значит, сферическая геометрия деформируется в гиперболическую и “по дороге” встречается **евклидова проективная прямая** вида  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}} W$ , где  $W \leq V$  —  $\mathbb{C}$ -линейное подпространство сигнатуры  $+0$ . Очевидно, что  $S V \cap \mathbb{P}_{\mathbb{C}} W$  — одна точка. Обозначив её через  $\infty$ , легко видеть, что любая геодезическая  $\Gamma \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}} W$  проходит через  $\infty$ , при этом, геодезические в  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}} W \setminus \{\infty\}$  устроены в точности, как прямые на вещественной аффинной плоскости. (Так что, правильнее называть  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}} W$  **аффинной**, а не евклидовой **проективной прямой**.) **Двойственность**  $p \mapsto p^{\perp}$  задает биекцию между точками  $p \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}} V$  и проективными прямыми. Точкам  $p \in B V$ ,  $p \in E V$  и  $p \in S V$  отвечает соответственно сферическая, гиперболическая и евклидова проективная прямая  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}} p^{\perp}$ .

## Примеры

Пусть  $V_0 \leq V$  — трехмерное  $\mathbb{R}$ -линейное подпространство, такое что  $\langle V_0, V_0 \rangle \subset \mathbb{R}$  и  $V = V_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ . Тогда  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}} V_0$  является вещественной проективной плоскостью Мёбиуса-Бельтрами-Клейна-Лоренца (пример 3), называемой  **$\mathbb{R}$ -плоскостью**. Гладкое подмногообразие  $N \subset M$  псевдориманова многообразия  $M$  называется **вполне геодезическим**, если вместе с каждой парой различных точек  $p_1, p_2 \in N$  подмногообразии  $N$  содержит некоторую геодезическую  $\Gamma$ , соединяющую  $p_1, p_2$ , т.е.,  $p_1, p_2 \in \Gamma \subset N$ . Можно доказать, что все вполне геодезические поверхности в  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}} V$  исчерпываются проективными прямыми  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  и  $\mathbb{R}$ -плоскостями  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}} V_0$  и что в  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}} V$  нет вполне геодезических подмногообразий вещественной коразмерности 1.

**6.** При  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , форме  $\langle -, - \rangle$  сигнатуры  $+++ -$  и настроении  $-$ , метрика в 3-шаре  $B V$ , называемом **вещественным гиперболическим пространством**, имеет сигнатуру  $+++$ , в то время как  $E V$  — лоренцево (сигнатура  $++ -$ ) **пространство де Ситтера**, используемое в общей теории относительности. Имеется очевидная двойственность между сферическими и гиперболическими геодезическими в  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}} V_{\pm}$ .

# Комплексно-гиперболический зоопарк (пример 5)



# Группа изометрий и матрица Грама

**Задача.** Проверьте аккуратно все детали приведенных примеров.

Вам может понадобиться следующая

**Задача.\*** Пусть  $W \leq V$  —  $\mathbb{R}$ -линейное подпространство и  $p \in W$ . Если  $\min_{0 \neq w \in W} \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{K}w \cap W) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{K}p \cap W)$ , то точка  $p \in W$  называется

**проективно гладкой в  $W$** . Обозначим через  $S \subset W$  множество всех проективно гладких точек в  $W$ . Докажите, что  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}S \subset \mathbb{P}_{\mathbb{K}}V$  является гладким подмногообразием и что касательный вектор  $t \in T_p \mathbb{P}_{\mathbb{K}}V = \text{Lin}_{\mathbb{K}}(p, V/p)$  в точке  $p \in S$  принадлежит  $T_p \mathbb{P}_{\mathbb{K}}W$  тогда и только тогда, когда  $tp \in W + \mathbb{K}p$ .

## Группа изометрий и матрица Грама

$T M \xrightarrow{d\varphi} T N$  **Определение.** Дифференциал  $T M \xrightarrow{d\varphi} T N$  гладкого отображения  $M \xrightarrow{\varphi} N$  является  $\mathbb{K}$ -линейным на **слоях**  
 $M \xrightarrow{\varphi} N$   $T_p M \xrightarrow{d_p\varphi} T_{\varphi p} N$ , поскольку задан формулой  $((d_p\varphi)t)f := t(f \circ \varphi)$ . Очевидно,  $d\varphi$  — гладкое отображение. Иногда мы будем писать  $\varphi$  вместо  $d\varphi$ .

# Группа изометрий и матрица Грама

В терминах отождествления  $T_p \mathbb{P}_{\mathbb{K}} V = \text{Lin}_{\mathbb{K}}(p, V/p)$ , дифференциал  $\text{Lin}_{\mathbb{K}}(p, V/p) \xrightarrow{d_p g} \text{Lin}_{\mathbb{K}}(gp, V/gp)$  отображения  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}} V \xrightarrow{g} \mathbb{P}_{\mathbb{K}} V$ , индуцированного  $\mathbb{K}$ -линейным  $g \in \text{GL}_{\mathbb{K}} V$ , имеет вид  $t \mapsto g \circ t \circ g^{-1}$  (для грассманианов,  $t \mapsto g \circ t$ ). При отождествлении  $T_p \mathbb{P}_{\mathbb{K}} V = \langle -, p \rangle p^{\perp}$ , для  $p \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}} V \setminus S V$  и  $v \in p^{\perp}$ , имеем  $\langle -, p \rangle v \xrightarrow{d_p g} \langle -, gp \rangle \pi[gp](gv)$ .

В частности, если  $g \in UV := \{g \in \text{GL}_{\mathbb{K}} V \mid \langle gv_1, gv_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle \text{ для всех } v_1, v_2 \in V\}$ , то дифференциал  $d_p g$  сохраняет (псевдо)эрмитову метрику. Другими словами, группа  $UV$  действует на  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}} V$  изометриями. В случае  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , группа  $UV$  называется унитарной. Если же  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , она называется ортогональной и обозначается  $OV$ . Ясно, что группа  $UV$  сохраняет танцию.

В случае  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , есть и другие изометрии. Например, если  $V_0 \leq V$  —  $\mathbb{R}$ -линейное подпространство, такое что  $\langle V_0, V_0 \rangle \subset \mathbb{R}$  и  $V = V_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ , то комплексное сопряжение в  $\mathbb{C}$  индуцирует полулинейную инволюцию  $V \xrightarrow{\sigma} V$  и соответствующую инволюцию  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}} V \xrightarrow{\sigma} \mathbb{P}_{\mathbb{C}} V$ . Поскольку

# Группа изометрий и матрица Грама

$\langle \sigma v_1, \sigma v_2 \rangle = \langle v_2, v_1 \rangle$  для любых  $v_1, v_2 \in V$ , то  $\sigma$  сохраняет танцию. Кроме того,  $\langle \sigma t_1, \sigma t_2 \rangle = \langle t_2, t_1 \rangle$  для любых  $p \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}} V \setminus S V$  и  $t_1, t_2 \in T_p \mathbb{P}_{\mathbb{C}} V$ . Легко видеть, что  $\sigma(U V)\sigma = U V$ . Присоединяя  $\sigma$  к  $U V$ , получаем **расширенную унитарную группу**  $\widehat{U} V$ . При этом, результат  $\widehat{U} V$  не зависит от выбора  $\sigma$ , так как все такие  $\sigma$  сопряжены при помощи элементов из  $U V$  и  $U V \leq \widehat{U} V$  — нормальная подгруппа индекса 2. (По определению,  $\widehat{O} V := O V$  в случае  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ .)

Умножение  $V \xrightarrow{k} V$  на  $k \in \mathbb{K}$ , такой что  $|k| = 1$ , действует тривиально на уровне  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}} V$ . Следовательно, фактор-группа  $\widehat{P} U V$  группы  $\widehat{U} V$  по нормальной подгруппе таких умножений, называемая **расширенной проективной унитарной группой** (соответственно, **проективной ортогональной группой**), действует изометриями на  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}} V$ .

**Определение.** Матрица Грама  $[g_{ij}]$  набора  $p_1, \dots, p_n \in V$  имеет коэффициенты  $g_{ij} := \langle p_i, p_j \rangle$ .



# Группа изометрий и матрица Грама

**Лемма.** Предположим, что наборы  $p_1, \dots, p_n \in V$  и  $p'_1, \dots, p'_n \in V$  порождают невырожденные  $\mathbb{K}$ -линейные подпространства. Для существования элемента  $g \in U V$ , такого что  $gp_i = p'_i$  для всех  $i$ , необходимо и достаточно, чтобы матрицы Грама этих наборов совпадали.

**Задача.** Докажите лемму.

**Задача.\*\*** Сформулируйте и докажите лемму без предположения о невырожденности.

**Следствие.** Предположим, что наборы  $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}} V$  и  $p'_1, \dots, p'_n \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}} V$  порождают невырожденные  $\mathbb{K}$ -линейные подпространства. Для того, чтобы наборы были **PU V-конгруэнтны**, т.е., чтобы существовала изометрия  $g \in PU V$ , такая что  $gp_i = p'_i$  для всех  $i$ , необходимо и достаточно, чтобы матрицы Грама  $G, G'$  этих наборов были **эквивалентны**, т.е., чтобы  $DG\bar{D} = G'$  для подходящей невырожденной диагональной матрицы  $D$  ■

**Задача.** Докажите, что  $\widehat{PU}V$  — группа всех изометрий, т.е., что  $\widehat{PU}V = \text{Isom } \mathbb{P}_{\mathbb{K}} V$ .

# Неравенство треугольника

Мораль, касающаяся танции, неполна: мы все еще не знаем смысл неравенства треугольника в терминах танции для римановой части  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}} V$ . В неравенстве участвуют лишь 3 точки, поэтому достаточно рассмотреть примеры 4 и 5. Посмотрим на комплексно-гиперболический случай (пример 5), оставив эллиптический (пример 4) в качестве легкого **упражнения**, для решения которого достаточно заменить гиперболические функции на соответствующие тригонометрические.

Пусть  $p_1, p_2, p_3 \in B V$  с матрицей Грама  $[g_{ij}]$ . Выберем представители так, чтобы  $g_{ii} = -1$ . Поскольку дистанция  $d_{ij}$  задается равенством  $\cosh d_{ij} = |g_{ij}|$  и функция  $\cosh x$  возрастает при  $x \geq 0$ , то неравенство треугольника эквивалентно неравенству  $\operatorname{arccosh} |g_{12}| \leq \operatorname{arccosh} |g_{23}| + \operatorname{arccosh} |g_{31}|$ . Из формул  $\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$  и  $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ , получаем  $\cosh(\operatorname{arccosh} |g_{23}| + \operatorname{arccosh} |g_{31}|) = |g_{23}g_{31}| + \sqrt{(|g_{23}|^2 - 1)(|g_{31}|^2 - 1)}$ . Следовательно, неравенство треугольника эквивалентно неравенству  $(|g_{12}| - |g_{23}g_{31}|)^2 \leq (|g_{23}|^2 - 1)(|g_{31}|^2 - 1)$ .

# Неравенство треугольника

В силу критерия Сильвестра,  $\det[g_{ij}] \leq 0$ , что можно записать в виде  $(|g_{12}| - |g_{23}g_{31}|)^2 + 2(|g_{12}g_{23}g_{31}| + \operatorname{Re}(g_{12}g_{23}g_{31})) \leq (|g_{23}|^2 - 1)(|g_{31}|^2 - 1)$ , получая желаемый результат. Кроме того, мы видим, что равенство достигается в точности, когда  $\det[g_{ij}] = 0$  (точки  $p_i$  лежат на проективной прямой) и  $|g_{12}g_{23}g_{31}| + \operatorname{Re}(g_{12}g_{23}g_{31}) = 0$  (значит,  $g_{12}g_{23}g_{31} \in \mathbb{R}$ ). Иными словами, равенство в неравенстве треугольника влечет, что точки лежат на геодезической.

“Чтобы не вставать дважды”, выполню

**Домашнее задание.**

# Неравенство треугольника

В силу критерия Сильвестра,  $\det[g_{ij}] \leq 0$ , что можно записать в виде  $(|g_{12}| - |g_{23}g_{31}|)^2 + 2(|g_{12}g_{23}g_{31}| + \operatorname{Re}(g_{12}g_{23}g_{31})) \leq (|g_{23}|^2 - 1)(|g_{31}|^2 - 1)$ , получая желаемый результат. Кроме того, мы видим, что равенство достигается в точности, когда  $\det[g_{ij}] = 0$  (точки  $p_i$  лежат на проективной прямой) и  $|g_{12}g_{23}g_{31}| + \operatorname{Re}(g_{12}g_{23}g_{31}) = 0$  (значит,  $g_{12}g_{23}g_{31} \in \mathbb{R}$ ). Иными словами, равенство в неравенстве треугольника влечет, что точки лежат на геодезической.

“Чтобы не вставать дважды”, выполню

**Домашнее задание.**

[Не выполнил]

## Углы и площадь треугольника

Здесь мы будем иметь дело с диском Пуанкаре  $\bar{B}V$  на сфере Римана-Пуанкаре (пример 2). Случай “круглой” 2-сферы (пример 1) рассматривается аналогично.

Пусть  $p_1, p_2 \in BV$  — различные точки,  $p_1 \neq p_2$ . Выберем представители так, чтобы матрица Грама точек  $p_1, p_2$  имела вид  $\begin{bmatrix} -1 & g \\ g & -1 \end{bmatrix}$ , где  $g \in ]-\infty, -1[$ . Тогда  $\gamma(s) := (1-s)p_1 + sp_2$ ,  $s \in [0, 1]$ , — параметризация геодезического сегмента  $[p_1, p_2]$ , соединяющего  $p_1, p_2$ . Поэтому  $\dot{\gamma}(0) = -\langle -, p_1 \rangle \pi[p_1](p_2 - p_1)$  и, следовательно,  $t_2 := \langle -, p_1 \rangle \frac{\pi[p_1]p_2}{\langle p_2, p_1 \rangle}$  — касательный вектор к  $[p_1, p_2]$  в точке  $p_1$ , безотносительно к выбору представителей.

Ориентированный угол  $\angle(t_2, t_3)$  от  $t_2$  до  $t_3$  подсчитывается по формуле  $\angle(t_2, t_3) = \text{Arg}\langle t_3, t_2 \rangle$ , где функция  $\text{Arg}$  принимает значения на интервале  $[0, 2\pi[$ .

Возьмем попарно различные точки  $p_1, p_2, p_3 \in BV$  и обозначим через  $[g_{ij}]$  их матрицу Грама. Положим  $t_i := \langle -, p_1 \rangle \frac{g_{11}p_i - g_{i1}p_1}{g_{i1}g_{11}}$ ,  $i = 2, 3$ . Тогда ориентированный угол  $\alpha_1$  треугольника  $\Delta(p_1, p_2, p_3)$  в вершине  $p_1$  ра-

# Углы и площадь треугольника

вен  $\alpha_1 = \text{Arg}\langle t_3, t_2 \rangle = \text{Arg} \frac{g_{31}g_{12} - g_{32}g_{11}}{g_{31}g_{12}}$ .

Определим **площадь ориентированного треугольника**  $\Delta(p_1, p_2, p_3)$  с вершинами  $p_1, p_2, p_3 \in \overline{BV}$  по формуле

$$\text{area } \Delta(p_1, p_2, p_3) := \frac{1}{2} \arg(-g_{12}g_{23}g_{31}),$$

где функция  $\arg$  принимает значения на интервале  $[-\pi, \pi]$ . Если же две вершины совпадают и лежат на абсолюте, то площадь равна 0, по определению. Из

$$\det[g_{ij}] = g_{11}(g_{22}g_{33} - g_{23}g_{32}) - g_{22}g_{13}g_{31} - g_{33}g_{12}g_{21} + 2 \text{Re}(g_{12}g_{23}g_{31})$$

и  $\det[g_{ij}] = 0$  заключаем, что  $\text{Re}(g_{12}g_{23}g_{31}) < 0$  если  $p_1, p_2, p_3 \in BV$  и  $\text{Re}(g_{12}g_{23}g_{31}) = 0$  если  $p_1, p_2, p_3 \in SV$ . Поэтому  $\text{area } \Delta(p_1, p_2, p_3) \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$  и  $\text{area } \Delta(p_1, p_2, p_3) = \pm \frac{\pi}{4}$  тогда и только тогда, когда все вершины попарно различны и лежат на абсолюте. Площадь равна нулю в точности, когда треугольник вырожден, т.е., все его вершины лежат на одной геодезической. Заметит, что площадь непрерывно зависит от вершин, в предположении, что  $g_{ij} \neq 0$  для  $i \neq j$ .

# Углы и площадь треугольника

Для любых  $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \overline{BV}$ , справедлива формула

$$\begin{aligned} \text{area } \Delta(p_1, p_2, p_3) + \text{area } \Delta(p_3, p_4, p_1) &= \\ &= \text{area } \Delta(p_2, p_3, p_4) + \text{area } \Delta(p_4, p_1, p_2). \end{aligned}$$

Действительно, можно предполагать, что  $g_{ij} \neq 0$  для  $i \neq j$ . Имеем сравнения

$$\begin{aligned} \arg(-g_{12}g_{23}g_{31}) + \arg(-g_{34}g_{41}g_{13}) &\equiv_{2\pi} \arg(g_{12}g_{23}g_{34}g_{41}) \equiv_{2\pi} \\ &\equiv_{2\pi} \arg(-g_{23}g_{34}g_{42}) + \arg(-g_{41}g_{12}g_{24}). \end{aligned}$$

По непрерывности, можно добиться, чтобы  $p_1, p_2, p_3, p_4 \in S V$ . Остается перебрать несколько вариантов.

При помощи доказанной формулы, можно корректно измерять ориентированную площадь многоугольника, ограниченного геодезическими сегментами. Для этого мы разбиваем многоугольник на треугольники и суммируем площади последних. Из формулы следует, что результат не зависит от разбиения в силу того, что два разных разбиения допускают общее подразбиение.

# Углы и площадь треугольника

Обозначая через  $\alpha_i$  внутренние углы треугольника  $\Delta(p_1, p_2, p_3)$ , покажем, что  $|\text{area } \Delta(p_1, p_2, p_3)| = \frac{1}{4}(\pi - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)$ .

Тупо раскрывая скобки, получаем  $(g_{31}g_{12} - g_{32}g_{11})(g_{12}g_{23} - g_{13}g_{22})(g_{23}g_{31} - g_{21}g_{33}) = (g_{12}g_{23}g_{31} - g_{11}g_{22}g_{33}) \det[g_{ij}] + (g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21})(g_{22}g_{33} - g_{23}g_{32})(g_{33}g_{11} - g_{31}g_{13}) < 0$ , поскольку  $\det[g_{ij}] = 0$ .

(Используя понятие связности, можно обойтись без вычислений. — Хорошая концепция экономит жизнь!)

Следовательно,

$$\begin{aligned}\pi - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 &= \text{Arg} \frac{-g_{31}g_{12}g_{12}g_{23}g_{23}g_{31}}{(g_{31}g_{12} - g_{32}g_{11})(g_{12}g_{23} - g_{13}g_{22})(g_{23}g_{31} - g_{21}g_{33})} = \\ &= 2 \arg(-g_{12}g_{23}g_{31})\end{aligned}$$

если  $\text{area } \Delta(p_1, p_2, p_3) > 0$ .

Формула  $|\text{area } \Delta(p_1, p_2, p_3)| = \frac{1}{4}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi)$  для “круглой” 2-сферы радиуса  $\frac{1}{2}$  (пример 1) доказывается аналогично.

**Примечание.** На общепринятой гиперболической плоскости расстояние в 2 раза больше, а площадь — в 4.



# Тригонометрия (на любителя)

*There is no sin south of the equator.*

Chico Buarque

*There is no sin south of the equator.*

Chico Buarque

Для разнообразия, познакомимся с тригонометрией на “круглой” 2-сфере  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}V$  радиуса  $\frac{1}{2}$  (пример 1).

Пусть  $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}V$  — попарно различные и попарно неортогональные точки. Представители можно выбрать так, чтобы их матрица Грама имела вид  $G := \begin{bmatrix} 1 & r_1 & r_3 \bar{\varepsilon} \\ r_1 & 1 & r_2 \\ r_3 \varepsilon & r_2 & 1 \end{bmatrix}$ , где  $0 < r_i := \sqrt{\text{ta}(p_i, p_{i+1})} < 1$  (индексы по модулю 3),  $|\varepsilon| = 1$  и  $\arg \varepsilon = 2 \text{area } \Delta(p_1, p_2, p_3)$ . Ясно, что длины  $l_i := \ell[p_i, p_{i+1}]$  сторон треугольника удовлетворяют неравенствам  $l_i < \frac{\pi}{2}$ . Поскольку  $\det G = 0$ , получаем

$$1 + 2r_1 r_2 r_3 \operatorname{Re} \varepsilon - r_1^2 - r_2^2 - r_3^2 = 0.$$

Это и есть **основное тригонометрическое тождество** на сфере. Все остальные легко следуют из основного.

# Тригонометрия (на любителя)

**Задача.** Выведите **первый закон косинусов** для сферы

$$\cos(2l_3) = \cos(2l_1) \cos(2l_2) + \cos \alpha \sin(2l_1) \sin(2l_2),$$

где  $0 < \alpha < \pi$  внутренний угол треугольника в вершине  $p_2$ .

**Задача.** Выведите **закон синусов** для сферы

$$\frac{\sin(2l_1)}{\sin \alpha_3} = \frac{\sin(2l_2)}{\sin \alpha_1} = \frac{\sin(2l_3)}{\sin \alpha_2},$$

где  $\alpha_i$  — внутренний угол треугольника при вершине  $p_i$ .

**Задача.** Выведите **первый и второй законы косинусов и закон синусов** для диска Пуанкаре

$$\cosh(2l_3) = \cosh(2l_1) \cosh(2l_2) - \cos \alpha_2 \sinh(2l_1) \sinh(2l_2),$$

$$\cos \alpha_2 + \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 = \cosh(2l_3) \sin \alpha_2 \sin \alpha_3,$$

$$\frac{\sinh(2l_1)}{\sin \alpha_3} = \frac{\sinh(2l_2)}{\sin \alpha_1} = \frac{\sinh(2l_3)}{\sin \alpha_2}.$$



# Публичная казнь тригонометрии

[Запрещено цензурой]

[Запрещено цензурой]

Спасибо за внимание!