Классические неевклидовы геометрии

Саша Ананьин

UNICAMP, лаборатория Богомолова

01 ноября 2012

Примеры

4. При $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, форме $\langle -, - \rangle$ сигнатуры $+ \cdots +$ и настроении $+$, получаем проективное пространство $\mathbb{P}_{\mathbb{C}} V$, снабженное эрмитовой **метрикой Фубини-Штуди**.

5. При $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, форме $\langle -, - \rangle$ сигнатуры $+ + -$ и настроении $-$, абсолют $\mathrm{S}\, V$ является 3-сферой с естественной **CR-структурой**. Это означает, что в касательном расслоении $\mathrm{T}\,\mathrm{S}\, V$ задано **контактное распределение** из $\mathbb{C}$-линейных подпространств $D_p \leq \mathrm{T}_p \mathrm{S}\, V$, $\dim_{\mathbb{C}} D_p = 1$, гладкое по $p \in \mathrm{S}\, V$, а именно, $D_p := \mathrm{T}_p \mathrm{S}\, V \cap i\, \mathrm{T}_p \mathrm{S}\, V$. (В нечетномерных многообразиях, CR-структура играет роль комплексной структуры.) Абсолют $\mathrm{S}\, V$ ограничивает в комплексной проективной плоскости $\mathbb{P}_{\mathbb{C}} V$ **голоморфный 2-шар** $\mathrm{B}\, V$ (= вещественно четырехмерный шар с интегрируемой комплексной структурой), снабженный **комплексно-гиперболической геометрией**, т.е., соответствующей эрмитовой метрикой.

(Псевдо)эрмитова метрика имеет сигнатуру $++$ и $+-$ в $\mathrm{B}\, V$ и $\mathrm{E}\, V$, соответственно.

Примеры

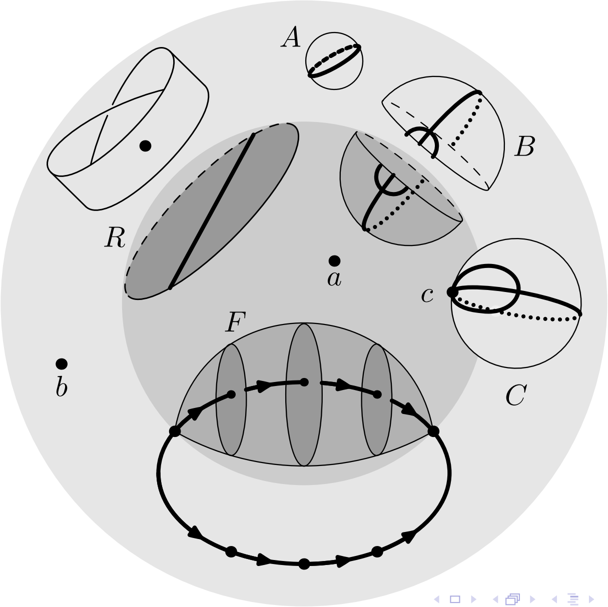
Каждая геодезическая Γ порождает проективную прямую $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}} V$, такую что $\Gamma \subset \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$. Причем $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ является "круглой" сферой (пример 1) в случае сферической Γ и сферой Римана-Пуанкаре (пример 2) в случае гиперболической Γ. Значит, сферическая геометрия деформируется в гиперболическую и "по дороге" встречается **евклидова проективная прямая** вида $\mathbb{P}_{\mathbb{C}} W$, где $W \leq V$ — $\mathbb{C}$-линейное подпространство сигнатуры $+0$. Очевидно, что $\mathrm{S}\, V \cap \mathbb{P}_{\mathbb{C}} W$ — одна точка. Обозначив её через ∞, легко видеть, что любая геодезическая $\Gamma \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}} W$ проходит через ∞, при этом, геодезические в $\mathbb{P}_{\mathbb{C}} W \setminus \{\infty\}$ устроены в точности, как прямые на вещественной аффинной плоскости. (Так что, правильнее называть $\mathbb{P}_{\mathbb{C}} W$ **аффинной**, а не евклидовой **проективной прямой**.)
Двойственность $p \mapsto p^{\perp}$ задает биекцию между точками $p \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}} V$ и проективными прямыми. Точкам $p \in \mathrm{B}\, V$, $p \in \mathrm{E}\, V$ и $p \in \mathrm{S}\, V$ отвечает соответственно сферическая, гиперболическая и евклидова проективная прямая $\mathbb{P}_{\mathbb{C}} p^{\perp}$.

Примеры

Пусть $V_0 \leq V$ — трехмерное $\mathbb{R}$-линейное подпространство, такое что $\langle V_0, V_0\rangle \subset \mathbb{R}$ и $V = V_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Тогда $\mathbb{P}_{\mathbb{C}} V_0$ является вещественной проективной плоскостью Мёбиуса-Бельтрами-Клейна-Лоренца (пример 3), называемой **$\mathbb{R}$-плоскостью**. Гладкое подмногообразие $N \subset M$ псевдориманова многообразия M называется **вполне геодезическим**, если вместе с каждой парой различных точек $p_1, p_2 \in N$ подмногообразие N содержит некоторую геодезическую Γ, соединяющую p_1, p_2, т.е., $p_1, p_2 \in \Gamma \subset N$. Можно доказать, что все вполне геодезические поверхности в $\mathbb{P}_{\mathbb{C}} V$ исчерпываются проективными прямыми $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ и $\mathbb{R}$-плоскостями $\mathbb{P}_{\mathbb{C}} V_0$ и что в $\mathbb{P}_{\mathbb{C}} V$ нет вполне геодезических подмногообразий вещественной коразмерности 1.

6. При $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, форме $\langle -, -\rangle$ сигнатуры $+ + + -$ и настроении $-$, метрика в 3-шаре $\mathrm{B}\, V$, называемом **вещественным гиперболическим пространством**, имеет сигнатуру $+ + +$, в то время как $\mathrm{E}\, V$ — лоренцево (сигнатура $+ + -$) **пространство де Ситтера**, используемое в общей теории относительности. Имеется очевидная двойственность между сферическими и гиперболическими геодезическими в $\mathbb{P}_{\mathbb{R}} V$.

Комплексно-гиперболический зоопарк (пример 5)



Задача. Проверьте аккуратно все детали приведенных примеров.

Вам может понадобиться следующая

Задача.* Пусть $W \le V$ — $\mathbb{R}$-линейное подпространство и $p \in W$. Если $\min\limits_{0 \ne w \in W} \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{K}w \cap W) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{K}p \cap W)$, то точка $p \in W$ называется **проективно гладкой в W**. Обозначим через $S \subset W$ множество всех проективно гладких точек в W. Докажите, что $\mathbb{P}_{\mathbb{K}} S \subset \mathbb{P}_{\mathbb{K}} V$ является гладким подмногообразием и что касательный вектор $t \in \mathrm{T}_p \mathbb{P}_{\mathbb{K}} V = \mathrm{Lin}_{\mathbb{K}}(p, V/p)$ в точке $p \in S$ принадлежит $\mathrm{T}_p \mathbb{P}_{\mathbb{K}} W$ тогда и только тогда, когда $tp \in W + \mathbb{K}p$.

Группа изометрий и матрица Грама

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{T}\,M & \xrightarrow[\mathrm{d}\varphi]{} & \mathrm{T}\,N \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_M} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_N} \\ M & \xrightarrow{\varphi} & N \end{array}$$

Определение. **Дифференциал** $\mathrm{T}\,M \overset{\mathrm{d}\varphi}{\to} \mathrm{T}\,N$ гладкого отображения $M \overset{\varphi}{\to} N$ является $\mathbb{K}$-линейным на **слоях** $\mathrm{T}_p\,M \overset{\mathrm{d}_p\varphi}{\to} \mathrm{T}_{\varphi p}\,N$, поскольку задан формулой $\big((\mathrm{d}_p\varphi)t\big)f := t(f \circ \varphi)$. Очевидно, $\mathrm{d}\varphi$ — гладкое отображение. Иногда мы будем писать φ вместо $\mathrm{d}\varphi$.

Группа изометрий и матрица Грама

В терминах отождествления $\mathrm{T}_p\,\mathbb{P}_{\mathbb{K}}V = \mathrm{Lin}_{\mathbb{K}}(p, V/p)$, дифференциал $\mathrm{Lin}_{\mathbb{K}}(p, V/p) \xrightarrow{\mathrm{d}_p g} \mathrm{Lin}_{\mathbb{K}}(gp, V/gp)$ отображения $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}V \xrightarrow{g} \mathbb{P}_{\mathbb{K}}V$, индуцированного $\mathbb{K}$-линейным $g \in \mathrm{GL}_{\mathbb{K}}\,V$, имеет вид $t \mapsto g \circ t \circ g^{-1}$ (для грассманианов, $t \mapsto g \circ t$). При отождествлении $\mathrm{T}_p\,\mathbb{P}_{\mathbb{K}}V = \langle -, p\rangle p^{\perp}$, для $p \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}V \setminus \mathrm{S}\,V$ и $v \in p^{\perp}$, имеем $\langle -, p\rangle v \overset{\mathrm{d}_p g}{\longmapsto} \langle -, gp\rangle \pi[gp](gv)$.

В частности, если $g \in \mathrm{U}\,V := \big\{g \in \mathrm{GL}_{\mathbb{K}}\,V \mid \langle gv_1, gv_2\rangle = \langle v_1, v_2\rangle$ **для всех** $v_1, v_2 \in V\big\}$, то дифференциал $\mathrm{d}_p g$ **сохраняет (псевдо)эрмитову метрику**. Другими словами, **группа** $\mathrm{U}\,V$ **действует на** $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}V$ **изометриями**. В случае $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, группа $\mathrm{U}\,V$ называется **унитарной**. Если же $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, она называется **ортогональной** и обозначается $\mathrm{O}\,V$. Ясно, что **группа** $\mathrm{U}\,V$ **сохраняет танцию**.

В случае $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, есть и другие изометрии. Например, если $V_0 \leq V$ — $\mathbb{R}$-линейное подпространство, такое что $\langle V_0, V_0\rangle \subset \mathbb{R}$ и $V = V_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, то комплексное сопряжение в $\mathbb{C}$ индуцирует полулинейную инволюцию $V \xrightarrow{\sigma} V$ и соответствующую инволюцию $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}V \xrightarrow{\sigma} \mathbb{P}_{\mathbb{C}}V$. Поскольку

$\langle \sigma v_1, \sigma v_2 \rangle = \langle v_2, v_1 \rangle$ для любых $v_1, v_2 \in V$, то σ сохраняет танцию. Кроме того, $\langle \sigma t_1, \sigma t_2 \rangle = \langle t_2, t_1 \rangle$ для любых $p \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}} V \setminus \mathrm{S}\, V$ и $t_1, t_2 \in \mathrm{T}_p \mathbb{P}_{\mathbb{C}} V$. Легко видеть, что $\sigma(\mathrm{U}\, V)\sigma = \mathrm{U}\, V$. Присоединяя σ к $\mathrm{U}\, V$, получаем **расширенную унитарную группу** $\widehat{\mathrm{U}}\, V$. При этом, результат $\widehat{\mathrm{U}}\, V$ не зависит от выбора σ, так как все такие σ сопряжены при помощи элементов из $\mathrm{U}\, V$ и $\mathrm{U}\, V \leq \widehat{\mathrm{U}}\, V$ — нормальная подгруппа индекса 2. (По определению, $\widehat{\mathrm{O}}\, V := \mathrm{O}\, V$ в случае $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.)

Умножение $V \xrightarrow{k} V$ на $k \in \mathbb{K}$, такой что $|k| = 1$, действует тривиально на уровне $\mathbb{P}_{\mathbb{K}} V$. Следовательно, фактор-группа $\widehat{\mathrm{PU}}\, V$ группы $\widehat{\mathrm{U}}\, V$ по нормальной подгруппе таких умножений, называемая **расширенной проективной унитарной группой** (соответственно, **проективной ортогональной группой**), действует изометриями на $\mathbb{P}_{\mathbb{K}} V$.

Определение. **Матрица Грама** $[g_{ij}]$ набора $p_1, \dots, p_n \in V$ имеет коэффициенты $g_{ij} := \langle p_i, p_j \rangle$.

Группа изометрий и матрица Грама

Лемма. *Предположим, что наборы $p_1, \dots, p_n \in V$ и $p'_1, \dots, p'_n \in V$ порождают невырожденные $\mathbb{K}$-линейные подпространства. Для существования элемента $g \in \mathrm{U}\,V$, такого что $gp_i = p'_i$ для всех i, необходимо и достаточно, чтобы матрицы Грама этих наборов совпадали.*

Задача. Докажите лемму.

Задача.** Сформулируйте и докажите лемму без предположения о невырожденности.

Следствие. *Предположим, что наборы $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}} V$ и $p'_1, \dots, p'_n \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}} V$ порождают невырожденные $\mathbb{K}$-линейные подпространства. Для того, чтобы наборы были* **$\mathrm{PU}\,V$-конгруэнтны**, *т.е., чтобы существовала изометрия $g \in \mathrm{PU}\,V$, такая что $gp_i = p'_i$ для всех i, необходимо и достаточно, чтобы матрицы Грама G, G' этих наборов были* **эквивалентны**, *т.е., чтобы $DG\overline{D} = G'$ для подходящей невырожденной диагональной матрицы D* ■

Задача. Докажите, что $\widehat{\mathrm{PU}}\,V$ — группа всех изометрий, т.е., что $\widehat{\mathrm{PU}}\,V = \mathrm{Isom}\,\mathbb{P}_{\mathbb{K}} V$.

Мораль, касающаяся танции, неполна: мы все еще не знаем смысл неравенства треугольника в терминах танции для римановой части $\mathbb{P}_{\mathbb{K}} V$. В неравенстве участвуют лишь 3 точки, поэтому достаточно рассмотреть примеры 4 и 5. Посмотрим на комплексно-гиперболический случай (пример 5), оставив эллиптический (пример 4) в качестве легкого **упражнения**, для решения которого достаточно заменить гиперболические функции на соответствующие тригонометрические.

Пусть $p_1, p_2, p_3 \in \mathrm{B}\, V$ с матрицей Грама $[g_{ij}]$. Выберем представители так, чтобы $g_{ii} = -1$. Поскольку дистанция d_{ij} задается равенством $\cosh d_{ij} = |g_{ij}|$ и функция $\cosh x$ возрастает при $x \geq 0$, то неравенство треугольника эквивалентно неравенству $\operatorname{arccosh}|g_{12}| \leq \operatorname{arccosh}|g_{23}| + \operatorname{arccosh}|g_{31}|$. Из формул $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$ и $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$, получаем $\cosh\big(\operatorname{arccosh}|g_{23}| + \operatorname{arccosh}|g_{31}|\big) = |g_{23}g_{31}| + \sqrt{\big(|g_{23}|^2 - 1\big)\big(|g_{31}|^2 - 1\big)}$. Следовательно, неравенство треугольника эквивалентно неравенству $\big(|g_{12}| - |g_{23}g_{31}|\big)^2 \leq \big(|g_{23}|^2 - 1\big)\big(|g_{31}|^2 - 1\big)$.

Неравенство треугольника

В силу критерия Сильвестра, $\det[g_{ij}] \leq 0$, что можно записать в виде $\big(|g_{12}|-|g_{23}g_{31}|\big)^2+2\big(|g_{12}g_{23}g_{31}|+\mathrm{Re}(g_{12}g_{23}g_{31})\big) \leq \big(|g_{23}|^2-1\big)\big(|g_{31}|^2-1\big)$, получая желаемый результат. Кроме того, мы видим, что равенство достигается в точности, когда $\det[g_{ij}] = 0$ (точки p_i лежат на проективной прямой) и $|g_{12}g_{23}g_{31}| + \mathrm{Re}(g_{12}g_{23}g_{31}) = 0$ (значит, $g_{12}g_{23}g_{31} \in \mathbb{R}$). Иными словами, равенство в неравенстве треугольника влечет, что точки лежат на геодезической.

“Чтобы не вставать дважды”, выполню

Домашнее задание.

Неравенство треугольника

В силу критерия Сильвестра, $\det[g_{ij}] \leq 0$, что можно записать в виде $\big(|g_{12}|-|g_{23}g_{31}|\big)^2+2\big(|g_{12}g_{23}g_{31}|+\mathrm{Re}(g_{12}g_{23}g_{31})\big) \leq \big(|g_{23}|^2-1\big)\big(|g_{31}|^2-1\big)$, получая желаемый результат. Кроме того, мы видим, что равенство достигается в точности, когда $\det[g_{ij}] = 0$ (точки p_i лежат на проективной прямой) и $|g_{12}g_{23}g_{31}| + \mathrm{Re}(g_{12}g_{23}g_{31}) = 0$ (значит, $g_{12}g_{23}g_{31} \in \mathbb{R}$). Иными словами, равенство в неравенстве треугольника влечет, что точки лежат на геодезической.

"Чтобы не вставать дважды", выполню

Домашнее задание.

[Не выполнил]

Углы и площадь треугольника

Здесь мы будем иметь дело с диском Пуанкаре $\overline{\mathrm{B}}V$ на сфере Римана-Пуанкаре (пример 2). Случай "круглой" 2-сферы (пример 1) рассматривается аналогично.

Пусть $p_1, p_2 \in \mathrm{B}\,V$ — различные точки, $p_1 \neq p_2$. Выберем представители так, чтобы матрица Грама точек p_1, p_2 имела вид $\begin{bmatrix} -1 & g \\ g & -1 \end{bmatrix}$, где $g \in]-\infty, -1[$. Тогда $\gamma(s) := (1-s)p_1 + sp_2$, $s \in [0,1]$, — параметризация геодезического сегмента $[p_1, p_2]$, соединяющего p_1, p_2. Поэтому $\dot\gamma(0) = -\langle -, p_1\rangle \pi[p_1](p_2 - p_1)$ и, следовательно, $t_2 := \langle -, p_1\rangle \frac{\pi[p_1]p_2}{\langle p_2, p_1\rangle}$ — касательный вектор к $[p_1, p_2]$ в точке p_1, безотносительно к выбору представителей.

Ориентированный угол $\angle(t_2, t_3)$ от t_2 до t_3 подсчитывается по формуле $\angle(t_2, t_3) = \operatorname{Arg}\langle t_3, t_2\rangle$, где функция Arg принимает значения на интервале $[0, 2\pi[$.

Возьмем попарно различные точки $p_1, p_2, p_3 \in \mathrm{B}\,V$ и обозначим через $[g_{ij}]$ их матрицу Грама. Положим $t_i := \langle -, p_1\rangle \frac{g_{11}p_i - g_{i1}p_1}{g_{i1}g_{11}}$, $i = 2, 3$. Тогда ориентированный угол α_1 треугольника $\Delta(p_1, p_2, p_3)$ в вершине p_1 ра-

Углы и площадь треугольника

вен $\alpha_1 = \mathrm{Arg}\langle t_3, t_2\rangle = \mathrm{Arg}\,\frac{g_{31}g_{12}-g_{32}g_{11}}{g_{31}g_{12}}$.

Определим **площадь ориентированного треугольника** $\Delta(p_1, p_2, p_3)$ с вершинами $p_1, p_2, p_3 \in \overline{\mathrm{B}}V$ по формуле

$$\mathrm{area}\,\Delta(p_1, p_2, p_3) := \frac{1}{2}\arg(-g_{12}g_{23}g_{31}),$$

где функция $\arg$ принимает значения на интервале $[-\pi, \pi]$. Если же две вершины совпадают и лежат на абсолюте, то площадь равна 0, по определению. Из

$$\det[g_{ij}] = g_{11}(g_{22}g_{33} - g_{23}g_{32}) - g_{22}g_{13}g_{31} - g_{33}g_{12}g_{21} + 2\,\mathrm{Re}(g_{12}g_{23}g_{31})$$

и $\det[g_{ij}] = 0$ заключаем, что $\mathrm{Re}(g_{12}g_{23}g_{31}) < 0$ если $p_1, p_2, p_3 \in \mathrm{B}\,V$ и $\mathrm{Re}(g_{12}g_{23}g_{31}) = 0$ если $p_1, p_2, p_3 \in \mathrm{S}\,V$. Поэтому $\mathrm{area}\,\Delta(p_1, p_2, p_3) \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ и $\mathrm{area}\,\Delta(p_1, p_2, p_3) = \pm\frac{\pi}{4}$ тогда и только тогда, когда все вершины попарно различны и лежат на абсолюте. Площадь равна нулю в точности, когда треугольник вырожден, т.е., все его вершины лежат на одной геодезической. Заметит, что площадь непрерывно зависит от вершин, в предположении, что $g_{ij} \neq 0$ для $i \neq j$.

Углы и площадь треугольника

Для любых $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \overline{\mathrm{B}}V$, справедлива формула

$$\operatorname{area}\Delta(p_1,p_2,p_3) + \operatorname{area}\Delta(p_3,p_4,p_1) =$$
$$= \operatorname{area}\Delta(p_2,p_3,p_4) + \operatorname{area}\Delta(p_4,p_1,p_2).$$

Действительно, можно предполагать, что $g_{ij} \neq 0$ для $i \neq j$. Имеем сравнения

$$\arg(-g_{12}g_{23}g_{31}) + \arg(-g_{34}g_{41}g_{13}) \underset{2\pi}{\equiv} \arg(g_{12}g_{23}g_{34}g_{41}) \underset{2\pi}{\equiv}$$
$$\underset{2\pi}{\equiv} \arg(-g_{23}g_{34}g_{42}) + \arg(-g_{41}g_{12}g_{24}).$$

По непрерывности, можно добиться, чтобы $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathrm{S}\,V$. Остается перебрать несколько вариантов.

При помощи доказанной формулы, можно корректно измерять ориентированную площадь многоугольника, ограниченного геодезическими сегментами. Для этого мы разбиваем многоугольник на треугольники и суммируем площади последних. Из формулы следует, что результат не зависит от разбиения в силу того, что два разных разбиения допускают общее подразбиение.

Углы и площадь треугольника

Обозначая через α_i внутренние углы треугольника $\Delta(p_1,p_2,p_3)$, покажем, что $\left|\operatorname{area}\Delta(p_1,p_2,p_3)\right| = \frac{1}{4}(\pi-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)$.

Тупо раскрывая скобки, получаем $(g_{31}g_{12}-g_{32}g_{11})(g_{12}g_{23}-g_{13}g_{22})$ $(g_{23}g_{31}-g_{21}g_{33}) = (g_{12}g_{23}g_{31}-g_{11}g_{22}g_{33})\det[g_{ij}] + (g_{11}g_{22}-g_{12}g_{21})$ $(g_{22}g_{33}-g_{23}g_{32})(g_{33}g_{11}-g_{31}g_{13}) < 0$, поскольку $\det[g_{ij}]=0$.
(Используя понятие связности, можно обойтись без вычислений. — Хорошая концепция экономит жизнь!)

Следовательно,

$$\pi-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3 = \operatorname{Arg}\frac{-g_{31}g_{12}g_{12}g_{23}g_{23}g_{31}}{(g_{31}g_{12}-g_{32}g_{11})(g_{12}g_{23}-g_{13}g_{22})(g_{23}g_{31}-g_{21}g_{33})} = \\ = 2\arg(-g_{12}g_{23}g_{31})$$

если $\operatorname{area}\Delta(p_1,p_2,p_3)>0$.

Формула $\left|\operatorname{area}\Delta(p_1,p_2,p_3)\right| = \frac{1}{4}(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-\pi)$ для “круглой” 2-сферы радиуса $\frac{1}{2}$ (пример 1) доказывается аналогично.

Примечание. На общепринятой гиперболической плоскости расстояние в 2 раза больше, а площадь — в 4.

Тригонометрия (на любителя)

Тригонометрия (на любителя)

There is no sin *south of the equator.*

`Chico Buarque`

Тригонометрия (на любителя)

There is no sin *south of the equator.*

Chico Buarque

Для разнообразия, познакомимся с тригонометрией на "круглой" 2-сфере $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}V$ радиуса $\frac{1}{2}$ (пример 1).

Пусть $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}V$ — попарно различные и попарно неортогональные точки. Представители можно выбрать так, чтобы их матрица Грама имела вид $G := \begin{bmatrix} 1 & r_1 & r_3\overline{\varepsilon} \\ r_1 & 1 & r_2 \\ r_3\varepsilon & r_2 & 1 \end{bmatrix}$, где $0 < r_i := \sqrt{\mathrm{ta}(p_i, p_{i+1})} < 1$ (индексы по модулю 3), $|\varepsilon| = 1$ и $\arg\varepsilon = 2\,\mathrm{area}\,\Delta(p_1, p_2, p_3)$. Ясно, что длины $l_i := \ell[p_i, p_{i+1}]$ сторон треугольника удовлетворяют неравенствам $l_i < \frac{\pi}{2}$. Поскольку $\det G = 0$, получаем

$$1 + 2r_1r_2r_3\,\mathrm{Re}\,\varepsilon - r_1^2 - r_2^2 - r_3^2 = 0.$$

Это и есть **основное тригонометрическое тождество** на сфере. Все остальные легко следуют из основного.

Тригонометрия (на любителя)

Задача. Выведите **первый закон косинусов** для сферы

$$\cos(2l_3) = \cos(2l_1)\cos(2l_2) + \cos\alpha \sin(2l_1)\sin(2l_2),$$

где $0 < \alpha < \pi$ внутренний угол треугольника в вершине p_2.

Задача. Выведите **закон синусов** для сферы

$$\frac{\sin(2l_1)}{\sin\alpha_3} = \frac{\sin(2l_2)}{\sin\alpha_1} = \frac{\sin(2l_3)}{\sin\alpha_2},$$

где α_i — внутренний угол треугольника при вершине p_i.

Задача. Выведите **первый и второй законы косинусов и закон синусов** для диска Пуанкаре

$$\cosh(2l_3) = \cosh(2l_1)\cosh(2l_2) - \cos\alpha_2 \sinh(2l_1)\sinh(2l_2),$$

$$\cos\alpha_2 + \cos\alpha_2\cos\alpha_3 = \cosh(2l_3)\sin\alpha_2\sin\alpha_3,$$

$$\frac{\sinh(2l_1)}{\sin\alpha_3} = \frac{\sinh(2l_2)}{\sin\alpha_1} = \frac{\sinh(2l_3)}{\sin\alpha_2}.$$

Публичная казнь тригонометрии

Публичная казнь тригонометрии

[Запрещено цензурой]

Публичная казнь тригонометрии

[Запрещено цензурой]

Спасибо за внимание!