

Гиперболические группы по Громову: функционал длины

Миша Вербицкий

21 сентября, 2012

НМУ

Топологические пространства (предполагается известным).

Феликс Хаусдорф, "Grundzüge der Mengenlehre", 1914

Определение: Пусть M - множество, а $\mathcal{U} \subset 2^M$ набор подмножеств, называемых **открытыми**. Тогда \mathcal{U} **задает топологию** на M , если

- Любое объединение открытых подмножеств открыто
- Конечное пересечение открытых подмножеств открыто
- M и пустое множество \emptyset открыты.

Такое M называется **топологическим пространством**.

Определение: **Замкнутым множеством** называется множество, дополнение которого открыто.

Определение: **Базой топологии** на M называется набор $\mathcal{U} \subset 2^M$ подмножеств M , состоящий из открытых множеств, и такой, что любое открытое подмножество M получено из элементов \mathcal{U} взятием объединений.

Простейшие понятия топологии (предполагается известным).

Определение: **Окрестностью** подмножества $Z \subset M$ называется любое открытое множество, содержащее Z . **Замыканием** подмножества $Z \subset M$ называется пересечение всех замкнутых подмножеств, содержащих Z .

Определение: Отображение $\varphi : M \rightarrow N$ называется **непрерывным**, если прообраз любого открытого множества открыт.

Определение: **Пределом** $\{x_i\}$ называется такая точка $x \in M$, что в любой окрестности x содержатся почти все элементы $\{x_i\}$.

Определение: Топологическое пространство M называется **отделимым**, или **хаусдорфовым**, если любые две точки $x \neq y \in M$ имеют непересекающиеся окрестности $U \ni x, V \ni y$.

ЗАМЕЧАНИЕ: В дальнейшем, все топологические пространства **по умолчанию предполагаются метризуемыми**.

Связные топологические пространства.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M – топологическое пространство, а $A \subset M$ – его подмножество, которое открыто и замкнуто. Тогда A называется **открыто-замкнутым** (clopen).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Топологическое пространство M называется **связным** (connected), если верно одно из равносильных условий

1. M не содержит открыто-замкнутых подмножеств, кроме M и \emptyset .
2. M не может быть разбит в объединение двух непересекающихся, непустых, открытых подмножеств.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что любое **связное подмножество** отрезка $[0, 1]$ – это отрезок, интервал или полуинтервал.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что **замыкание** \bar{Z} **связного подмножества** $Z \subset M$ **всегда связно**.

УПРАЖНЕНИЕ: Пусть X связно, а $f : X \rightarrow Y$ – непрерывное отображение. **Докажите, что $f(X)$ тоже связно**.

СЛЕДСТВИЕ: Если $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная функция на связном множестве то, **$f(X)$ это отрезок, интервал или полуинтервал**.

Линейно связные топологические пространства.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Путем** в топологическом пространстве M называется непрерывное отображение $[a, b] \xrightarrow{\varphi} M$. В этом случае говорится, что путь φ **соединяет точки $\varphi(a)$ и $\varphi(b)$** . M называется **линейно связным**, если любые две точки M можно соединить путем $[a, b] \xrightarrow{\varphi} M$.

ЗАМЕЧАНИЕ: **Из линейной связности следует связность.** Действительно, отрезок $[0, 1]$ связан, образ связного множества связан, объединение пересекающихся связных множеств связано.

УПРАЖНЕНИЕ: Постройте топологическое пространство, которое **связно, но не линейно связно**.

УПРАЖНЕНИЕ: (весьма трудное) **Постройте хаусдорфово топологическое пространство M , которое связно и счетно.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Такое пространство не линейно связно; более того, любое отображение из отрезка в M постоянно (**докажите это**).

Локально линейно связные топологические пространства.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Топологическое пространство M называется **локально связным (локально линейно связным)**, если каждая окрестность точки $x \in M$ содержит связную (линейно связную) окрестность x .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Компонента связности (линейной связности)** точки x в топологическом пространстве есть объединение всех связных (линейно связных) подмножеств, содержащих x .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть X, Y – топологические пространства. **Несвязное объединение** $X \sqcup Y$ есть объединение непересекающихся множеств, отождествляемых с X и Y , с базой топологии, которая состоит из открытых множеств X и Y .

УТВЕРЖДЕНИЕ: Каждое локально связное (локально линейно связное) пространство **является несвязным объединением своих компонент связности (линейной связности)**.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите это.

Метрические пространства.

Определение: Пусть M - множество. **Метрикой** на M называется функция $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0} \cup \infty$, удовлетворяющая следующим условиям

* **[Невырожденность:]** $d(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$.

* **[Симметричность:]** $d(x, y) = d(y, x)$

* **[Неравенство треугольника:]** $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

для любых точек $x, y, z \in M$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Если $x \in X$ – точка, а ε – вещественное число, множество $B_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$ называется **(открытый) шар радиуса ε с центром в x** , или **ε -шар**. **Замкнутый шар** это $\bar{B}_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid d(x, y) \leq \varepsilon\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Открытое множество** в метрическом пространстве M есть объединение открытых шаров.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что это задает топологию на M .

Допустимые пути.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M – топологическое пространство. Говорится, что на M **задан класс допустимых путей**, если задано множество путей $[a, b] \rightarrow M$ такое, что

1. Для любых двух путей $[a, b] \xrightarrow{\gamma_1} M$ и $[b, c] \xrightarrow{\gamma_2} M$, удовлетворяющих $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$, путь $\gamma : [a, c] \rightarrow M$, равный γ_1 на $[a, b]$ и γ_2 на $[b, c]$, тоже допустим. Такая операция называется "**склейка путей**".
2. **(замена параметра)** Если $\varphi : [a, b] \rightarrow [c, d]$ – линейное отображение, а путь $\gamma : [c, d] \rightarrow M$ допустим, путь $\varphi \circ \gamma$ тоже допустим.
3. **Ограничение:** Для каждого пути $[a, b] \xrightarrow{\gamma} M$, и отрезка $[c, d] \subset [a, b]$, ограничение $\gamma|_{[c, d]}$ – тоже допустимый путь.

Допустимые пути (примеры).

ПРИМЕР: **Кусочно-линейные пути** (ломаные) в \mathbb{R}^n образуют допустимый класс путей.

ПРИМЕР: **Кусочно-полиномиальный путь** получен склейкой конечного числа путей $\gamma_i : [x_i, x_{i+1}]$, заданных полиномиальными отображениями. **Кусочно-полиномиальные пути в \mathbb{R}^n образуют допустимый класс путей.**

ПРИМЕР: **Кусочно-гладкий путь** получен склейкой конечного числа путей $\gamma_i : [x_i, x_{i+1}]$, заданных гладкими отображениями. **Кусочно-гладкие пути в \mathbb{R}^n образуют допустимый класс путей.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **C -Липшицево отображение** есть отображение метрических пространств $\varphi : M \rightarrow M'$, удовлетворяющее $Cd(x, y) \geq d(\varphi(x), \varphi(y))$. **Липшицево отображение** есть C -липшицево с какой-то константой X .

ПРИМЕР: **Липшицевы пути** образуют допустимый класс.

Функционал длины.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M – топологическое пространство, снабженное допустимым классом путей. Функционал $L(\gamma)$, отображающий допустимые пути в числа, называется **функционалом длины**, если он удовлетворяет следующим условиям.

1. **(аддитивность длины)** Для любого пути $\gamma : [a, c] \rightarrow M$, и любого $b \in [a, c]$, $L(\gamma) = L(\gamma|_{[a,b]}) + L(\gamma|_{[b,c]})$, где $\gamma|_{[c,d]}$ обозначает **ограничение пути**, то есть функции $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ на отрезок $[c, d] \subset [a, b]$.
2. **(непрерывность длины пути как функции от координат концов)** Для любого пути $\gamma : [a, c] \rightarrow M$, **функция $L(\gamma|_{[a,b]})$ непрерывно зависит от $b \in [a, c]$.**
3. **Замена параметра:** Если $\varphi : [a, b] \rightarrow [c, d]$ – гомеоморфизм отрезков, а $\gamma : [c, d] \rightarrow M$ и $\varphi \circ \gamma : [a, b] \rightarrow M$ – допустимые пути, то $L(\gamma) = L(\varphi \circ \gamma)$.
4. **(длина пути согласована с топологией)** Пусть Z – замкнутое подмножество M , а $x \notin Z$ точка, не лежащая на Z . Тогда **существует число $\varepsilon > 0$ такое, что любой путь, соединяющий x с какой-то точкой Z , имеет длину $\geq \varepsilon$.**

Метрика, построенная по функционалу длины.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M – топологическое пространство, снабженное классом допустимых путей и функционалом длины. **Внутренняя метрика** $d_L : M \times M \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ определяется как $d_L(x, y) := \inf_{\gamma} L(\gamma)$, где инфимум берется по всем путям, соединяющим x и y .

УТВЕРЖДЕНИЕ: Это метрика.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Симметричность d_L следует из замены параметра $t \rightarrow (b - t) + a$ в пути $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ (из пути, соединяющего a и b , получаем путь, соединяющий b и a , той же длины).

Положительность $d_L(x, y)$, $x \neq y$ следует из условия 4, примененного к $Z = y$. В самом деле, существует такое $\varepsilon > 0$, что любой путь, соединяющий x и Z , имеет длину $\geq \varepsilon$.

Неравенство треугольника доказывается через склейку путей. Пусть γ_1 – путь, соединяющий x и y , длины $d_L(x, y) + \varepsilon$, а γ_2 – путь, соединяющий y и z , длины $d_L(y, z) + \varepsilon$. Склеив γ_1 и γ_2 , получим путь γ , соединяющий x и z , длины $d_L(x, y) + d_L(y, z) + 2\varepsilon$, что дает $d_L(x, y) + d_L(y, z) \geq d_L(x, z) + 2\varepsilon$.

■

Примеры функционала длины.

ПРИМЕР: $M = \mathbb{R}^n$ с обычной топологией, класс допустимых путей - кусочно-линейные пути (то есть ломаные), со звеньями $[x_i, x_{i+1}]$, а длина пути определяется формулой $L(\gamma) = \sum |d(x_i, x_{i+1})|$ ("**длина ломаной**").

УТВЕРЖДЕНИЕ: Построенная по этому функционалу метрика d_L равна обычной метрике.

Действительно, **самая короткая ломаная, соединяющая две точки – это отрезок прямой.**

ПРИМЕР: "переход болота" (конформно плоская метрика): $M = \mathbb{R}^n$, класс допустимых путей - кусочно-линейные пути (то есть ломаные), со звеньями $[x_i, x_{i+1}]$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{>0}$ непрерывная, положительная функция, а длина пути определяется формулой

$$L(\gamma) = \sum \int_{[x_i, x_{i+1}]} f$$

(интеграл от f по отрезку $[x_i, x_{i+1}]$).

УПРАЖНЕНИЕ: Проверьте, что это функционал длины.

Финслерова метрика.

ПРИМЕР: Длина кусочно-гладкого пути $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ с евклидовой метрикой вычисляется по формуле $L(\gamma(t)) := \int_a^b |\gamma'(t)| dt$

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что это функционал длины, и **соответствующая метрика L_d – обычная, плоская.**

ПРИМЕР: "Финслерова метрика" Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ открытое подмножество, а $\nu_x : Tx\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ – норма на касательном пространстве, непрерывно зависящая от x . Для кусочно-гладкого пути $\gamma : [a, b] \rightarrow U$, определим

$$L_\nu(\gamma(t)) := \int_a^b \nu_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt$$

УТВЕРЖДЕНИЕ: Это функционал длины.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Аддитивность и непрерывность L очевидны.

Чтобы доказать согласованность с топологией, выберем такую константу δ , что $\nu_x(v) \geq \delta|v|$ в замкнутом $V \ni$, не пересекающем Z . **Тогда каждый путь γ , соединяющий x и границу ∂V , удовлетворяет $L_\nu(\gamma) \geq \delta L(\gamma)$,** где L – длина γ в евклидовой метрике. Но $L(\gamma) \geq d(x, \partial V)$, а это число положительно, так как ∂V замкнуто.

Финслерова метрика и риманова метрика.

Инвариантность L_ν при репараметризации следует из формулы

$$\begin{aligned} L_\nu(\varphi \circ \gamma) &= \int_a^b \nu_{\gamma(\varphi(t))}(\varphi \circ \gamma)'(t) dt = \\ &= \int_a^b \nu_{\gamma(\varphi(t))}(\varphi'(t)\gamma'(\varphi(t))) dt = \int_a^b \varphi'(t) \nu_{\gamma(\varphi(t))}(\gamma'(\varphi(t))) dt = \\ &= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \nu_{\gamma(\varphi(t))}(\gamma'(\varphi(t))) d\varphi(t) = L_\nu(\gamma) \end{aligned}$$

■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Финслерова метрика на U определяется как внутренняя метрика, определенная функционалом длины L_ν .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ – открытое подмножество, а норма $\nu_x : T_x\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ задается формулой $\nu_x(v) = \sqrt{g_x(v, v)}$, где $g_x \in \text{Sym}^2 T_x^*\mathbb{R}^n$ – положительно определенное скалярное произведение, заданное гладким отображением $U \rightarrow \text{Sym}^2 \mathbb{R}^n = \text{Sym}^2 T_x^*\mathbb{R}^n$. В такой ситуации g_x называется **римановой формой** на U , а соответствующая внутренняя метрика **внутренней метрикой** на U .

Спрямяемые пути.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (M, d) – метрическое пространство, а $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ – путь. Рассмотрим разбиение отрезка $[a, b] = [a, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \dots \cup [x_{n-1}, b]$. Обозначим $x_0 := a, x_n := b$. Положим $L_\gamma(x_1, \dots, x_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} d(x_i, x_{i+1})$. Определим **длину пути** γ формулой

$$L_d(\gamma) := \sup_{a < x_1 < \dots < x_{n-1} < b} L_\gamma(x_1, \dots, x_{n-1}).$$

где супремум берется по всем разбиениям отрезка. Путь γ называется **спрямяемым**, если $L_d(\gamma) < \infty$.

ПРИМЕР: Любой липшицев путь – спрямяемый (**докажите это**).

ЗАМЕЧАНИЕ: Любой кусочно гладкий путь – липшицев (**докажите это**).

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть M – произвольное метрическое пространство. Тогда спрямяемые пути образуют допустимый класс, а L_d является функционалом длины.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите это.

Внутренняя метрика.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (M, d) – метрическое пространство, а L_d – функционал длины на спрямляемых путях. Обозначим соответствующую внутреннюю метрику d_{L_d} за \hat{d} . Она называется **внутренней метрикой, индуцированной d** .

ТЕОРЕМА: Для любого метрического пространства, $\hat{\hat{d}} = \hat{d}$.

Доказательство. Шаг 1: Длина пути, соединяющего x и y , не может превышать $d(x, y)$, в силу неравенства треугольника. Поэтому $\hat{d} \geq d$.

Шаг 2: Поскольку $\hat{d} \geq d$, имеем $L_d(\gamma) \leq L_{\hat{d}}(\gamma)$ для любого пути.

Шаг 3: Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ – спрямляемый путь. Выберем такое разбиение отрезка $[a, b]$, что $L_{\hat{d}}(\gamma) - \sum d(\gamma(x_i), \gamma(x_{i+1})) < \varepsilon$. Тогда

$$L_{\hat{d}}(\gamma) - \varepsilon = \sum_i \hat{d}(\gamma|_{[x_i, x_{i+1}]}) \leq \sum_i L_d(\gamma|_{[x_i, x_{i+1}]}) = L_d(\gamma).$$

Устремляя ε к нулю, получаем $L_{\hat{d}}(\gamma) \leq L_d(\gamma)$. ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Метрика d на M называется **внутренней**, если $\hat{d} = d$.