Гиперболические группы по Громову: внутренние метрики

Миша Вербицкий

28 сентября, 2012

НМУ

Спрямляемые пути (повторение).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (M, d) – метрическое пространство, а $\gamma : [a, b] \to M$ – путь. Рассмотрим разбиение отрезка $[a, b] = [a, _1] \cup [x_1, x_2] \cup ... \cup [x_{n-1}, b]$. Обозначим $x_0 := a, x_n := b$. Положим $L_\gamma(x_1, ...x_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} d(x_i, x_{i+1})$. Определим **длину пути** γ формулой

$$L_d(\gamma) := \sup_{a<x_1<...<x_{n-1}<b} L_\gamma(x_1, ...x_{n-1}).$$

где супремум берется по всем разбиениям отрезка. Путь γ называется **спрямляемым**, если $L_d(\gamma) < \infty$.

ПРИМЕР: Любой липшицев путь – спрямляемый **(докажите это).**

ЗАМЕЧАНИЕ: Любой кусочно гладкий путь – липшицев **(докажите это).**

Внутренние метрики (повторение).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (M,d) – метрическое пространство, а L_d – функционал длины на спрямляемых путях. Обозначим за $\hat{d}$ метрику $\hat{d}(x,y) := \inf_\gamma L(\gamma)$, где инфимум берется по всем спрямляемым путям, соединяющим x и y. Она называется **внутренней метрикой, индуцированной d.**

ТЕОРЕМА: Для любого метрического пространства, $\hat{\hat{d}} = \hat{d}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Метрика d на M называется **внутренней**, если $\hat{d} = d$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Финслеровы метрики и римановы метрики, построенные на прошлой лекции, **являются внутренними** (см. листочек).

Внутренняя метрика и локальность

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть M, M' – метрические пространства с внутренней метрикой, а $f: M \to M'$ – непрерывная биекция, такая, что у каждой точки $x \in M$ есть окрестность U_x, причем ограничение $f\big|_{U_x}: U_x \to f(U_x)$ – изометрия. **Тогда f – изометрия.**

Доказательство. Шаг 1: f – гомеоморфизм. Действительно, f переводит базу открытых множеств в базу открытых множеств.

Шаг 2: Длина пути – локальный инвариант. Значит, f **сохраняет длину пути.** ■

ЗАМЕЧАНИЕ: f **1-липшицево,** даже если M' не обязательно внутренняя. Действительно, f сохраняет длину пути, а $L_d(\gamma) \geqslant d(x, y)$ для любого пути, соединяющего x и y.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Метрика на M называется **локальной**, если для каждого открытого покрытия $\{U_\alpha\}$, и для каждой метрики d' на M такой, что $d\big|_{U_\alpha} = d'\big|_{U_\alpha}$, имеем $d \geqslant d'$.

СЛЕДСТВИЕ: Внутренняя метрика всегда локальна.

ЗАДАЧА: Докажите, что для полной метрики d,
d локальна $\Leftrightarrow$ d – внутренняя.

Топология фактора

Определение: Пусть M – топологическое пространство, а $\sim$ – отношение эквивалентности. Подмножество $U \subset M/\sim$ множества классов $M/\sim$ называется **открытым**, если его прообраз в M открыт. Это определяет **топологию фактора** на $M/\sim$, которое называется **факторпространством** по соотношению эквивалентности $\sim$.

Предостережение: Факторпространство может быть нехаусдорфово, даже если M хаусдорфово.

Определение: Пусть G – группа, действующая на топологическом пространстве M. **Факторпространством** по действию группы называется пространство классов эквивалентности $M/\sim$, где $x \sim y$, если x и y лежат в одной орбите G. Также факторпространство называют **пространство орбит действия G**.

Замечание: Пусть G - группа, действующая на топологическом пространстве M гомеоморфизмами. Тогда **естественная проекция $M \xrightarrow{\pi} M/G$ является открытым отображением.**

Топологическое пространство графа

Определение: Графом называется набор вершин и набор ребер, причем каждому ребру соответствует две вершины (возможно, одинаковые), которые называются его **концами**, или **концом и началом**, причем каждая вершина является концом хотя бы одного из ребер. Если двум ребрам соответствует одна и та же вершина, эти ребра называются **смежными**, а вершина – **общей вершиной** ребер. Граф называется **конечным**, если число его ребер и вершин конечно.

Замечание: С каждым графом ассоциировано топологическое пространство: набор отрезков, соединяющих набор отмеченных точек – вершин.

Определение: Пусть Γ – граф, а S – множество его ребер. Рассмотрим S как пространство с дискретной топологией, и пусть $X := S \times [0,1]$ – несвязное объединение S копий отрезка. В этом случае $x = s \times \{1\}$ или $x = s \times \{0\}$ – точки X, соответствующая началу или концу отрезка. Если у ребра s_1 и у ребра s_2 имеется общий конец, напишем $x_1 \sim x_2$, где $x_i = s_i \times \{1\}$ или $x_i = s_i \times \{1\}$ соответствующие точки X. **Топологическим пространством графа** называется факторпространство $X/\sim$ по такому отношению эквивалентности.

УПРАЖНЕНИЕ: Топологическое пространство любого графа хаусдорфово (докажите это).

Полуметрики

Определение:
Пусть $d: M \times M \to \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ функция, такая, что выполнены:
Рефлексивность: $d(x, x) = 0$
Симметричность: $d(x, y) = d(y, x)$
Неравенство треугольника: $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$

Тогда d называется **полуметрикой**

От определения метрики это отличается только отсутствием условия невырожденности: $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$.

Определение:
Открытым шаром в полуметрике d называется множество

$$B_{r,d}(x) = \{y \in M \quad | \quad d(x, y) < r\}.$$

Открытые шары задают на M топологию, **нехаусдорфову если M не метрика.**

Замечание:
Условие $d(x, y) = 0$ задает на M отношение эквивалентности.

Полуметрики и метрики

Если $d(x,y)=0$, то

$$d(z,x)+d(x,y)\geqslant d(y,z),\quad d(z,y)+d(y,x)\geqslant d(z,x),$$

поэтому $d(z,x)=d(y,z)$. **Следовательно, функция d корректно определена на множестве $\underline{M}$ классов эквивалентности по отношению $d(x,y)=0$. Она задает метрику на $\underline{M}$.**

Утверждение: Каждое пространство (M,d) с полуметрикой **наделено сюрьективным отображением** $\pi: M\to\underline{M}$ в метрическое пространство $(\underline{M},\underline{d})$, при этом

$$d(x,y)=\underline{d}(\pi(x),\pi(y)).\qquad (*)$$

Замечание: Если задано отображение $\pi: M\to\underline{M}$ в метрическое пространство, то формула (*) определяет на M полуметрику.

Полуметрика на факторпространстве

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\sim$ – отношение эквивалентности на метрическом пространстве (X, d). **Определим функцию $d_\sim : X/\!\sim \times X/\!\sim \to \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ на факторе $X/\!\sim$** по формуле

$$d_\sim(x,y) = \inf \sum_{i=0}^{n-1} d(p_i, q_{i+1}),$$

где инфимум берется по всем наборам точек $p_i, q_i \in X$ таким, что $p_0 \sim x, q_n \sim y$, и $p_i \sim q_i$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Эта функция – полуметрика.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Нетривиально только неравенство треугольника. Но $d(x,y)$ есть инфимум длины "ломаных" $p_0, p_1, q_1, p_2, q_2, \ldots$ соединяющих x с y, где расстояние между $p_i \sim q_i$ положено равным 0. **Но если x соединен с y, y с z подобными ломаными, то x соединен с z объединением этих ломаных,** что дает $d_\sim(x,z) \leqslant d_\sim(x,y) + d_\sim(y,z)$. ■

Метрический фактор

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\sim$ – отношение эквивалентности на метрическом пространстве (X, d). Определенная выше полуметрика $d_\sim$ на $X/\!\sim$ называется **полуметрикой факторпространства**. **Метрическое факторпространство** получается из $X/\!\sim$ дополнительным отождествлением всех точек x, y таких, что $d_\sim(x, y) = 0$, с метрикой, которая индуцирована с $d_\sim$.

ПРИМЕР: Пусть G – группа, действующая на метрическом пространстве (X, d) изометриями, а $x \sim y$, если x и y лежат в одной орбите G. **Тогда $d_\sim(a, b)$ есть инфимум расстояний между представителями a, b в X** (докажите это).

Метрические графы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Несвязное объединение** метрических пространств (X_α, d_α) есть $\coprod X_\alpha$ с метрикой $d(x,y)$ которая равна $d_\alpha(x,y)$, когда x и y лежат в X_α, и ∞ в противном случае.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть I_α – набор отрезков, изометричных $[0, x_\alpha]$, а $\sim$ – отношение эквивалентности, полученное склейкой некоторых вершин. Метрический фактор $\coprod_\alpha I_\alpha$ называется **метрическим графом**. Он называется **локально конечным**, если каждая точка отождествляется с конечным числом точек.

УТВЕРЖДЕНИЕ: **Метрика на метрическом графе - всегда внутренняя.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Каждую "ломаную" $p_0, p_1, q_1, p_2, q_2, ...$, соединяющую x и y, можно реализовать объединением отрезков в графе, такой же длины. ■

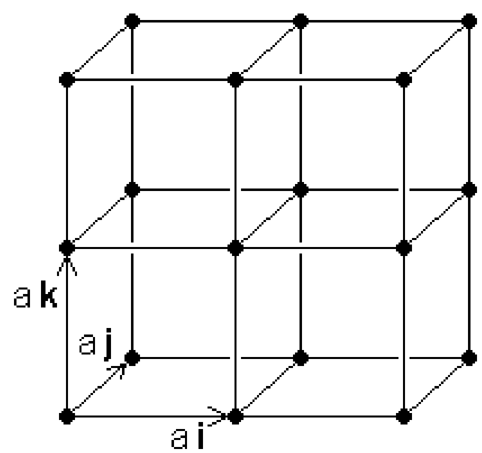
ЗАМЕЧАНИЕ: Естественое отображение из топологического пространства графа в метрический граф – **гомеоморфизм для локально конечного графа**. Для не локально конечных графов **это может быть не биекция**, или **биекция, но не гомеоморфизм.**

Граф Кэли

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Набор образующих** группы G есть множество элементов S, мультипликативно порождающих G. **В дальнейшем, мы будем всегда предполагать, что $s \in S \Leftrightarrow s^{-1} \in S$.**

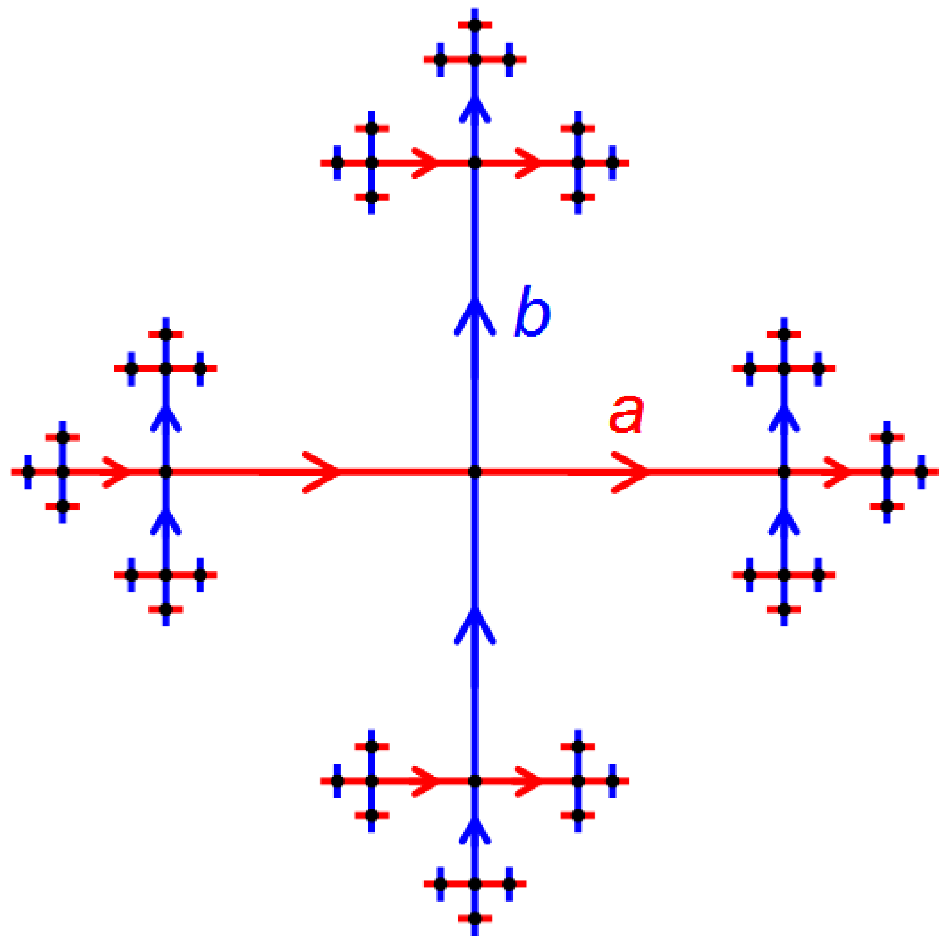
ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть G – группа, $\{s_i\}$ – набор образующих. **Граф Кэли** пары $(G, \{s_i\})$ есть граф, вершины которого – элементы G, а ребра соединяют точки вида g и gs_i. Полагая длину ребер графа равной 1, мы **определяем граф Кэли как метрическое пространство с внутренней метрикой.**

ПРИМЕР: Граф Кэли для $\mathbb{Z}^n$ с обычным набором образующих есть кубическая решетка.



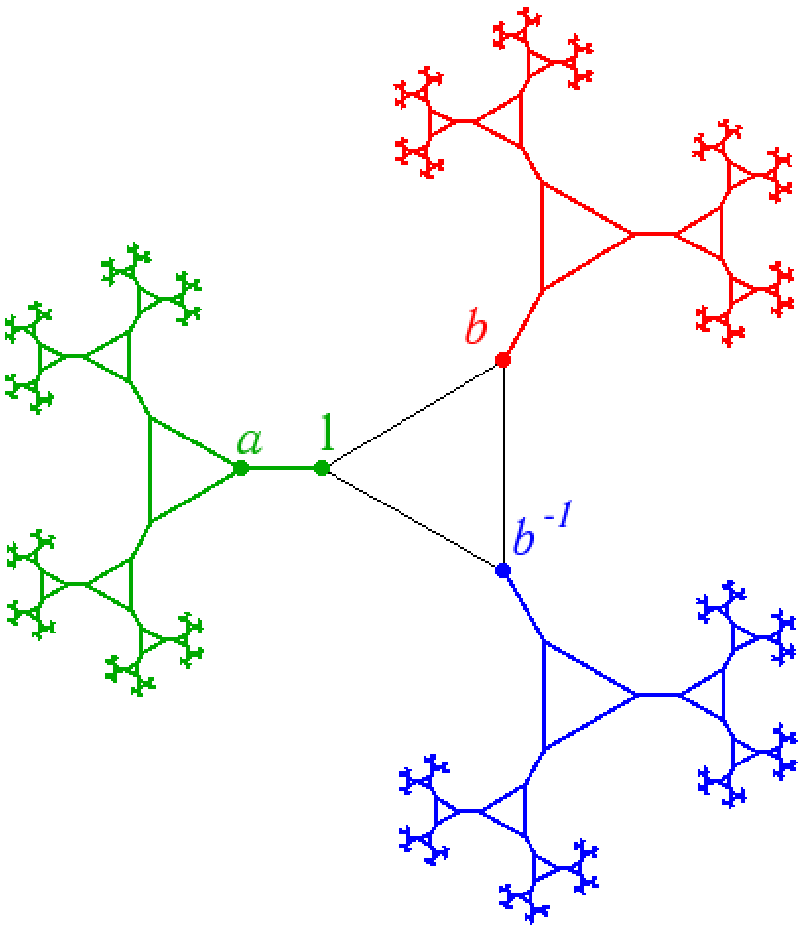
Граф Кэли для свободной группы

ПРИМЕР: Граф Кэли для свободной группы – регулярное дерево



Граф Кэли свободной группы $\mathbb{F}_2$ с образующими a, b, a^{-1}, b^{-1}.

Граф Кэли для $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$



Граф Кэли для $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Полиэдральные метрические пространства

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Полиэдральное метрическое пространство размерности 1** есть метрический граф.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Полиэдральное метрическое пространство размерности k определяется по индукции. Каждое k-мерное полиэдральное метрическое пространство получено объединением своих l-скелетов K_l, $l = 1, 2, 3, ..., k$, причем $K_k = K$, а каждое из K_l есть полиэдральное метрическое пространство размерности l. Каждое K_k получено из K_{k-1} приклеиванием выпуклых евклидовых многогранников, следующим образом.

Пусть задано полиэдральное метрическое пространство K размерности $k-1$ и набор выпуклых многоогранников V_i в k-мерном евклидовом пространстве. Пусть для каждого из V_i задано изометрическое вложение $\tau_i : \ \partial V_i \to {}_{k-1}$ границы V_i в K_{k-1}, переводящее l-мерные грани V_i в K_l. Метрический фактор $K_{k-1} \coprod_i V_i$ по соотношению, заданному таким склеиванием, называется **полиэдральным метрическим пространством размерности k.**

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что **метрика на полиэдральном метрическом пространстве - внутренняя.**

Локальная компактность

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **ε-сеть** в метрическом пространстве M есть такое множество $N \subset M$, что объединение ε-шаров с центрами в N равно M. Метрическое пространство называется **вполне ограниченным**, если для любого $\varepsilon > 0$ в M найдется конечная ε-сеть.

ТЕОРЕМА: Полное метрическое пространство компактно тогда и только тогда, когда оно вполне ограниченно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: См. в листочках. ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M – метрическое пространство. Говорят, что M **локально компактно**, если для любой точки $x \in M$ существует такое число $\varepsilon > 0$, что замкнутый шар $\overline{B}_\varepsilon(x)$ компактен.

Условие Хопфа-Ринова

ЛЕММА: Пусть (M, d) – пространство с внутренней метрикой, $x, y \in M$, а $r < d(x, y)$. **Тогда расстояние $d(y, B_r(x))$ от y до шара $B_r(x)$ равно $d(x, y) - r$.**

Доказательство. Шаг 1: Положим $\alpha := d(x, y)$. Рассмотрим путь $\gamma : [0, \alpha] \to M$, соединяющий x с y и длины $\alpha + \varepsilon$. Пусть

$$\lambda := \sup_t \{t \in [0, \alpha] \quad | \quad \gamma(t) \in B_r(x).\}$$

Обозначим $z := \gamma(\lambda)$. Поскольку z лежит в замыкании $M \backslash B_r(x)$ и в замыкании $B_r(x)$, имеем $d(z, x) = r$.

Шаг 2: По определению, $d(y, z) \geqslant d(y, B_r(x))$.

Шаг 3: $d(y, B_r(x)) \geqslant \alpha - r$ в силу неравенства треугольника. Поэтому $d(y, B_r(x)) = \alpha - r$ следует из $d(y, z) \leqslant \alpha - r + \varepsilon$.

Шаг 4: Поскольку $L_d(\gamma) = \alpha + \varepsilon$, имеем

$$r + d(y, z) = d(x, z) + d(z, y) \leqslant L_d(\gamma) = \alpha + \varepsilon.$$

■

Теорема Хопфа-Ринова

ТЕОРЕМА: Пусть M – полное, локально компактное пространство с внутренней метрикой. **Тогда каждый замкнутый шар в M компактен.**

Доказательство. Шаг 1: В ε-окрестности шара $\bar{B}_r(m)$ содержится шар $\bar{B}_{r+\varepsilon}(m)$ (следует из того, что метрика внутренняя).

Шаг 2: Пусть $m \in M$ точка, такая, что шары $B_{r-\varepsilon}(m)$ вполне ограничены для любого $\varepsilon > 0$. **Тогда $B_r(m)$ тоже вполне ограниченно.** Действительно, $\frac{1}{2}\varepsilon$-сеть в $B_{r-1/2\varepsilon}(m)$ будет ε-сетью в $B_r(m)$, в силу предыдущего шага.

Шаг 3: Определим функцию на метрическом пространстве $\rho(m) := \sup_r\{r \in \mathbb{R} \mid \bar{B}_r(m)$ компактен $\}$. **Тогда ρ 1-липшицева**, в частности, непрерывна.

Шаг 4: Пусть $\bar{B}_r(m)$ – компактный шар в локально компактном пространстве. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что **каждый замкнутый шар радиуса ε в с центром в $\bar{B}_r(m)$ компактен.** Действительно, ρ достигает минимума где-то на $B_r(m)$.

Теорема Хопфа-Ринова (продолжение)

Шаг 2: Пусть $m \in M$ точка, такая, что шары $B_{r-\varepsilon}(m)$ вполне ограничены для любого $\varepsilon > 0$. **Тогда $B_r(m)$ тоже вполне ограниченно.** Действительно, $\frac{1}{2}\varepsilon$-сеть в $B_{r-1/2\varepsilon}(m)$ будет ε-сетью в $B_r(m)$, в силу предыдущего шага.

Шаг 3: Определим функцию на метрическом пространстве $\rho(m) := \sup_r\{r \in \mathbb{R} \ \mid \ \bar{B}_r(m) \text{ компактен }\}$. **Тогда ρ 1-липшицева**, в частности, непрерывна.

Шаг 4: Пусть $\bar{B}_r(m)$ – компактный шар в локально компактном пространстве. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что **каждый замкнутый шар радиуса ε в с центром в $\bar{B}_r(m)$ компактен.** Действительно, ρ достигает минимума где-то на $B_r(m)$.

Шаг 5: Для такого шара, **$\bar{B}_{r+1/2\varepsilon}(m)$ тоже компактен.** Для доказательства, рассмотрим конечную $\frac{1}{3}\varepsilon$-сеть в $\bar{B}_r(m)$. Объединение замкнутых ε-шаров с центрами в этой сети компактно (конечное объединение компактов компактно) и содержит $\bar{B}_{r+1/2\varepsilon}(m)$ в силу шага 1.

Шаг 6: Из сравнение шага 5 и шага 2 заключаем, что $\rho = \infty$. ■

Кратчайшие в метрическом пространстве

Определение: Непрерывное отображение $\gamma: [0,\alpha] \to M$ называется **кратчайшей**, если его длина равна $d(\gamma(0), \gamma(\alpha))$.

Любой отрезок кратчайшей - снова кратчайшая.

Определение: Если $\varphi: [0,\alpha] \to [0,\alpha]$ – гомеоморфизм, а γ - путь из x в y, композиция $\varphi \circ \gamma$ - тоже путь из x в y. Такой путь называется **репараметризацией** γ.

Параметризация γ – выбор пути в классе путей, эквивалентных с точностью до репараметризации.

Определение: Пусть $\gamma: [0,\alpha] \to M$ - кратчайшая, соединяющая x и y, причем

$$d(\gamma(x), \gamma(y)) = |x - y|.$$

Такая кратчайшая называется **кратчайшей геодезической**, а соответствующая параметризация - **геодезической параметризацией**.

ЗАМЕЧАНИЕ: Геодезическая кратчайшая задается изометрическим вложением из отрезка в M.

Существование кратчайших

ТЕОРЕМА: Пусть M - локально компактное, полное пространство с внутренней метрикой а $x_0, x_1 \in M$. **Тогда существует кратчайшая геодезическая, соединяющая x_0 и x_1.**

Доказательство. Шаг 1: Пусть $d(x_0, x_1) = \alpha$. В силу компактности, **в шаре $\bar{B}_{\alpha/2}(x_1)$ есть точка $x_{1/2}$ такая, что $d(x_0, x_{1/2}) = d(x_{1/2}, x_1) = \alpha/2$.** В самом деле, функция $d(\cdot, x_0) : \bar{B}_{\alpha/2}(x_1) \to \mathbb{R}$ непрерывная на компакте, значит, достигает минимума, который равен $d(x_0, \bar{B}_{\alpha/2}(x_1)) = \alpha/2$ потому, что метрика внутренняя.

Шаг 2: Воспользовавшись индукцией, для каждого двоично-рационального числа $\lambda = \frac{n}{2^k}$ в $[0,1]$ **найдем точку x_λ, такую, что $d(x_\lambda, x_\mu) = \alpha|\lambda - \mu|$.**

Шаг 3: Мы получили **изометрическое вложение множества двоично-рациональных чисел в M. Продолжим на пополнение, получим геодезическую.** ■