Гиперболические группы по Громову: углы и кратчайшие

Миша Вербицкий

4 октября, 2012

НМУ

Внутренние метрики (повторение).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (M,d) – метрическое пространство, а $\gamma: [a,b] \to M$ – путь. Рассмотрим разбиение отрезка $[a,b] = [a,{}_1]\cup[x_1,x_2]\cup...\cup[x_{n-1},b]$. Обозначим $x_0 := a, x_n := b$. Положим $L_\gamma(x_1,...x_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} d(x_i,x_{i+1})$. Определим **длину пути** γ формулой

$$L_d(\gamma) := \sup_{a<x_1<...<x_{n-1}<b} L_\gamma(x_1,...x_{n-1}).$$

где супремум берется по всем разбиениям отрезка.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (M,d) – метрическое пространство, а L_d – функционал длины на спрямляемых путях. Обозначим за $\hat{d}$ метрику $\hat{d}(x,y) := \inf_\gamma L(\gamma)$, где инфимум берется по всем путям, соединяющим x и y. Она называется **внутренней метрикой, индуцированной d.**

ТЕОРЕМА: Для любого метрического пространства, $\hat{\hat{d}} = \hat{d}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Метрика d на M называется **внутренней**, если $\hat{d} = d$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Финслеровы, римановы, полиэдральные метрики, построенные раньше, **являются внутренними**.

ε-середины

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Точка z называется **ε-серединой** пары (x, y), если $|d(x, z) - \frac{1}{2}d(x, y)| \leqslant \varepsilon$ и $|d(y, z) - \frac{1}{2}d(x, y)| \leqslant \varepsilon$. Говорится, что в (M, d) **существуют ε-середины**, если для любых x, y и любого $\varepsilon > 0$, существует ε-середина.

УТВЕРЖДЕНИЕ: В любом пространстве с внутренней метрикой существуют ε-середины.

Доказательство. Шаг 1: Пусть γ – путь длины $d(x, y) + \varepsilon$, соединяющий x и y. В силу непрерывности функции $d(x, \gamma(t))$, принимающей значения от 0 до $d(x, y)$, **существует точка $z = \gamma(t_0)$ такая, что $d(x, z) = \frac{d(x,y)}{2}$.**

Шаг2: $d(y, z) + d(z, y) \leqslant L_d(\gamma) = d(x, y) + \varepsilon$. **Значит, $d(y, z) \leqslant \frac{d(x,y)}{2} + \varepsilon$.** ■

ε-середины и двоично-рациональные дроби

ТЕОРЕМА: Пусть M – пространство, где существуют ε-середины, а $x_0, x_1 \in M$. Тогда для любого $\lambda \in [0,1]$, найдется $x_\lambda \in M$ такая, что $|d(x_0, x_\lambda) - \lambda d(x_0, x_1)| \leqslant \varepsilon$ и $|d(x_1, x_\lambda) - (1-\lambda) d(x_0, x_1)| \leqslant \varepsilon$.

Доказательство. Шаг 1: Пусть $\lambda = \frac{2n-1}{2^m}$, $0 < \lambda < 1$. Возьмем за $x_\lambda \in M$ $\frac{\varepsilon}{2^{m+1}}$-середину между $x_{\frac{n}{2^{m-1}}}$ и $x_{\frac{n-1}{2^{m-1}}}$. **Воспользовавшись индукцией по m, построим x_λ для каждого двоично-рационального числа $\lambda = \frac{2n-1}{2^m}$.**

Шаг 2: Пусть $P(\lambda)$ переводит $\lambda = \frac{2n-1}{2^m}$ в $\frac{n-1}{2^{m-1}}$. По построению,

$$|d(x_\lambda, x_{P(\lambda)}) - (\lambda - P(\lambda)) d(x_0, x_1)| < \frac{\varepsilon}{2^{m+1}}.$$

Суммируя ряд

$$d(x_\lambda, x_{P(\lambda)}) + d(x_{P(\lambda)}, x_{P(P(\lambda))}) + ...$$

получим число, которое отличается от $\lambda d(x_0, x_1)$ на $\sum_{i=0}^m \frac{\varepsilon}{2^{m+1}} \leqslant \varepsilon$. **Значит,**

$$d(x_0, x_\lambda) \leqslant d(x_\lambda, x_{P(\lambda)}) + d(x_{P(\lambda)}, x_{P(P(\lambda))}) + ... \leqslant \lambda d(x_0, x_1) + \varepsilon.$$

Аналогично, $d(x_1, x_\lambda) \leqslant (1-\lambda) d(x_0, x_1) + \varepsilon$.

ε-середины и двоично-рациональные дроби (продолжение)

Шаг 3: Уже доказано:

$$d(x_1, x_\lambda) \leqslant (1-\lambda)d(x_0, x_1) + \varepsilon \quad \text{и} \quad d(x_0, x_\lambda) \leqslant \lambda d(x_0, x_1) + \varepsilon.$$

Осталось доказать, что $d(x_1, x_\lambda) \geqslant \lambda d(x_0, x_1) - \varepsilon$ и $d(x_1, x_\lambda) \geqslant (1-\lambda)d(x_0, x_1) - \varepsilon$. Но если это неверно, имеем (например) $d(x_1, x_\lambda) \leqslant \lambda d(x_0, x_1) - \varepsilon$, что дает

$$d(x_1, x_\lambda) + d(x_1, x_\lambda) < \lambda d(x_0, x_1) - \varepsilon + (1-\lambda)d(x_0, x_1) + \varepsilon = d(x_0, x_1)$$

Противоречие с неравенством треугольника! ∎

СЛЕДСТВИЕ: ("Условие Хопфа-Ринова") Пусть M – метрическое пространство, в котором существуют ε-середины. **Тогда для любых $x, y \in M$, и $r \leqslant d(x,y)$, расстояние от шара $B_r(x)$ до y равно $d(x,y) - r$.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Выберем точку $z = z_\lambda$ такую, что $|d(x,z) - (r - \varepsilon)| < \varepsilon$ и $|d(y,z) - d(x,y) - r| < \varepsilon$. Тогда $z \in B_r(x)$ и $d(B_r(x), y) \leqslant d(y,z) \leqslant d(x,y) - r + \varepsilon$. ∎

ε-середины и внутренние метрики

ЗАМЕЧАНИЕ: Из шага 2 предыдущей теоремы следует, что отображение $\lambda \to x_\lambda$ **является $d(x_0, x_1)(1+\varepsilon)$-липшицевым.**

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть X, Y – метрические пространства, а $\varphi: X \to Y$ – C-липшицево отображение. **Тогда φ продолжается до C-липшицева отображения пополнений $\bar{\varphi}: \bar{X} \to \bar{Y}$.**

ТЕОРЕМА: Пусть M – полное метрическое пространство, в котором существуют ε-середины. **Тогда метрика в M внутренняя**.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: В силу предыдущего утверждения, отображение $\lambda \to x_\lambda$ продолжается до $d(x_0, x_1)(1+\varepsilon)$-липшицева отображения $[0,1] \xrightarrow{\gamma} M$, то есть пути, соединяющего x_0 и x_1. **Длина сего пути ограничена $d(x_0, x_1)(1+\varepsilon)$ в силу липшицевости.**

Локальная компактность

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **ε-сеть** в метрическом пространстве M есть такое множество $N \subset M$, что объединение ε-шаров с центрами в N равно M. Метрическое пространство называется **вполне ограниченным**, если для любого $\varepsilon > 0$ в M найдется конечная ε-сеть.

ТЕОРЕМА: Полное метрическое пространство компактно тогда и только тогда, когда оно вполне ограниченно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: См. в листочках. ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M – метрическое пространство. Говорят, что M **локально компактно**, если для любой точки $x \in M$ существует такое число $\varepsilon > 0$, что замкнутый шар $\overline{B}_\varepsilon(x)$ компактен.

Теорема Хопфа-Ринова

ТЕОРЕМА: Пусть M – полное, локально компактное пространство с внутренней метрикой. **Тогда каждый замкнутый шар в M компактен.**

Доказательство. Шаг 1: В ε-окрестности шара $\bar{B}_r(m)$ содержится шар $\bar{B}_{r+\varepsilon}(m)$ (следует из условия Хопфа-Ринова).

Шаг 2: Пусть $m \in M$ точка, такая, что шары $B_{r-\varepsilon}(m)$ вполне ограничены для любого $\varepsilon > 0$. **Тогда $B_r(m)$ тоже вполне ограниченно.** Действительно, $\frac{1}{2}\varepsilon$-сеть в $B_{r-\frac{1}{2}\varepsilon}(m)$ будет ε-сетью в $B_r(m)$, в силу предыдущего шага.

Шаг 3: Определим функцию на метрическом пространстве $\rho(m) := \sup_r\{r \in \mathbb{R} \ \ | \ \ \bar{B}_r(m)$ компактен $\}$. **Тогда ρ 1-липшицева**, в частности, непрерывна.

Шаг 4: Пусть $\bar{B}_r(m)$ – компактный шар в локально компактном пространстве. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что **каждый замкнутый шар радиуса ε в с центром в $\bar{B}_r(m)$ компактен.** Действительно, ρ достигает минимума где-то на $B_r(m)$.

Теорема Хопфа-Ринова (продолжение)

Шаг 2: Пусть $m \in M$ точка, такая, что шары $B_{r-\varepsilon}(m)$ вполне ограниченны для любого $\varepsilon > 0$. **Тогда $B_r(m)$ тоже вполне ограниченно.** Действительно, $\frac{1}{2}\varepsilon$-сеть в $B_{r-\frac{1}{2}\varepsilon}(m)$ будет ε-сетью в $B_r(m)$, в силу предыдущего шага.

Шаг 3: Определим функцию на метрическом пространстве $\rho(m) := \sup_r\{r \in \mathbb{R} \ \mid \ \bar{B}_r(m)$ компактен $\}$. **Тогда ρ 1-липшицева**, в частности, непрерывна.

Шаг 4: Пусть $\bar{B}_r(m)$ – компактный шар в локально компактном пространстве. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что **каждый замкнутый шар радиуса ε в с центром в $\bar{B}_r(m)$ компактен.** Действительно, ρ достигает минимума где-то на $B_r(m)$.

Шаг 5: Для такого шара, $\bar{B}_{r+\frac{1}{2}\varepsilon}(m)$ **тоже компактен.** Для доказательства, рассмотрим конечную $\frac{1}{3}\varepsilon$-сеть в $\bar{B}_r(m)$. Объединение замкнутых ε-шаров с центрами в этой сети компактно (конечное объединение компактов компактно) и содержит $\bar{B}_{r+\frac{1}{2}\varepsilon}(m)$ в силу шага 1.

Шаг 6: Из сравнение шага 5 и шага 2 заключаем, что $\rho = \infty$. ■

Кратчайшие в метрическом пространстве

Определение: Непрерывное отображение $\gamma : [0, \alpha] \to M$ называется **кратчайшей**, если его длина равна $d(\gamma(0), \gamma(\alpha))$.

Любой отрезок кратчайшей - снова кратчайшая.

Определение: Если $\varphi : [0, \alpha] \to [0, \alpha]$ – гомеоморфизм, а γ - путь из x в y, композиция $\varphi \circ \gamma$ - тоже путь из x в y. Такой путь называется **репараметризацией γ**.

Параметризация γ – выбор пути в классе путей, эквивалентных с точностью до репараметризации.

Определение: Пусть $\gamma : [0, \alpha] \to M$ - кратчайшая, соединяющая x и y, причем

$$d(\gamma(x), \gamma(y)) = |x - y|.$$

Такая кратчайшая называется **кратчайшей геодезической**, а соответствующая параметризация - **геодезической параметризацией**.

ЗАМЕЧАНИЕ: Геодезическая кратчайшая задается изометрическим вложением из отрезка в M.

Существование кратчайших

ТЕОРЕМА: Пусть M - локально компактное, полное пространство с внутренней метрикой а $x_0, x_1 \in M$. **Тогда существует кратчайшая геодезическая, соединяющая x_0 и x_1.**

Доказательство. Шаг 1: Пусть $d(x_0, x_1) = \alpha$. В силу компактности, **в шаре $\bar{B}_{\alpha/2}(x_1)$ есть точка $x_{\frac{1}{2}}$ такая, что $d(x_0, x_{\frac{1}{2}}) = d(x_{\frac{1}{2}}, x_1) = \alpha/2$.** В самом деле, функция $d(\cdot, x_0) : \bar{B}_{\alpha/2}(x_1) \to \mathbb{R}$ непрерывная на компакте, значит, достигает минимума, который равен $d(x_0, \bar{B}_{\alpha/2}(x_1)) = \alpha/2$ потому, что метрика внутренняя.

Шаг 2: Воспользовавшись индукцией, для каждого двоично-рационального числа $\lambda = \frac{n}{2^k}$ в $[0,1]$ **найдем точку x_λ, такую, что $d(x_\lambda, x_\mu) = \alpha|\lambda - \mu|$.**

Шаг 3: Мы получили **изометрическое вложение множества двоично-рациональных чисел в M. Продолжим на пополнение, получим геодезическую.** ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Метрика в M называется **внутренней с кратчайшими**, если любые две точки можно соединить кратчайшей с геодезической параметризацией.

Углы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть a, b, c – точки в метрическом пространстве (M, d). **Здесь и в дальнейшем $\mathbb{R}^2$ предполагается метрическим пространством, с обычной (евклидовой) метрикой.** **Треугольник сравнения** $\triangle(\bar a, \bar b, \bar c)$ есть треугольник в $\mathbb{R}^2$, с вершинами $\bar a, \bar b, \bar c$, и сторонами $|\bar a, \bar b| = d(a, b)$, $|\bar a, \bar c| = d(a, c)$, и $|\bar b, \bar c| = d(b, c)$ (такой треугольник, очевидно, существует, и определен единственно с точностью до конгруэнтности). Угол $\measuredangle(\bar a, \bar b, \bar c)$ в треугольнике $\bar a, \bar b, \bar c$ обозначается $\theta(a, b, c)$; он называется **углом сравнения**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\gamma_1 : [0, a] \to M$, $\gamma_2 : [0, b] \to M$ два пути в метрическом пространстве M, $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$. **Угол** между путями γ_1, γ_2 в p есть число

$$\measuredangle(\gamma_1, p, \gamma_2) := \lim_{t,s\to 0} \theta(\gamma_1(t), p, \gamma_2(s)),$$

если такой предел существует (в противном случае, говорится, что **угол между γ_1 и γ_2 не существует**). **Верхний угол** есть

$$\measuredangle_{\sup}(\gamma_1, p, \gamma_2) := \limsup_{t,s\to 0} \theta(\gamma_1(t), p, \gamma_2(s)),$$

где $\limsup$ **обозначает супремум всех предельных точек последовательностей $\theta(\gamma_1(t_i), p, \gamma_2(s_j))$, для всех t_i, s_j сходящихся к 0.**

Неравенство треугольника для углов

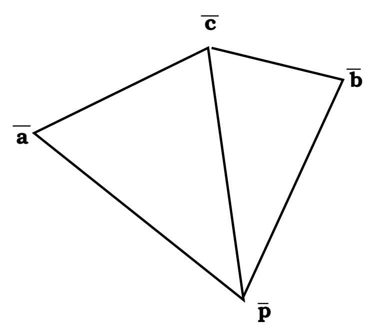
УПРАЖНЕНИЕ: Проверьте, что **угол между гладкими путями в $\mathbb{R}^n$ существует и равен углу между их касательными.**

УПРАЖНЕНИЕ: $\gamma : : [0,a] \to M$ – кратчайшая, наделенная геодезической параметризацией, а $\gamma(0) = p$. **Тогда угол $\measuredangle_{\sup}(\gamma, p, \gamma)$ существует и равен нулю.**

ТЕОРЕМА: Пусть $\gamma_i : [0,a] \to M$ – пути в M, Тогда верно **неравенство треугольника для верхних углов:**

$$\measuredangle_{\sup}(\gamma_1, p, \gamma_2) + \measuredangle_{\sup}(\gamma_2, p, \gamma_3) \geqslant \measuredangle_{\sup}(\gamma_1, p, \gamma_3).$$

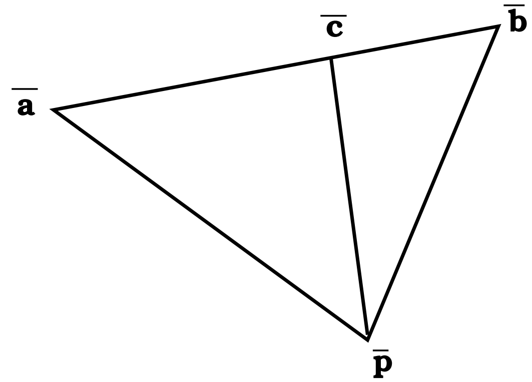
Доказательство. Шаг 1: Пусть $\gamma_i(0) = p$, $a = \gamma_1(s), b = \gamma_3(t)$, $c = \gamma_2(u)$. Рассмотрим треугольники сравнения $\triangle(\bar{p}, \bar{a}, \bar{c})$ и $\triangle(\bar{p}, \bar{c}, \bar{b})$, и нарисуем их на плоскости, с общей стороной $|\bar{p}, \bar{c}|$, чтобы они лежали по разные стороны от прямой $(\bar{p}, \bar{c})$.



В силу непрерывности $d(p, \gamma_2(u))$, **для любых заданных s, t, можно подобрать u таким образом, что $\bar{c}$ лежит на отрезке $[\bar{a}, \bar{b}]$.**

Неравенство треугольника для углов (продолжение)

Шаг 2: Из рассмотрения треугольников сравнения



убеждаемся, что

$$\theta(a,p,b)+\theta(b,p,c)=\measuredangle(\bar{a},\bar{p},\bar{c})=\arccos\left(\frac{s^2+t^2-|\bar{a},\bar{c}|^2}{2st}\right)$$

где $s=d(p,a)$ и $t=d(p,c)$.

Шаг 3: По определению, $|\bar{a},\bar{c}|=|\bar{a},\bar{b}|+|\bar{b},\bar{c}|=d(a,b)+d(b,c)\geqslant d(a,c)$. В силу монотонности арккосинуса, получаем

$$\measuredangle(\bar{a},\bar{p},\bar{c})=\arccos\left(\frac{s^2+t^2-|\bar{a},\bar{c}|^2}{2st}\right)\geqslant\arccos\left(\frac{s^2+t^2-d(a,c)^2}{2st}\right)=\theta(a,p,c).$$

Шаг 4: Сравнивая формулы, полученные в шаге 2 и шаге 3, получаем $\theta(a,p,b)+\theta(b,p,c)\geqslant\theta(a,p,c)$; неравенство для $\measuredangle_{\mathsf{sup}}$ следует немедленно. ■

Пространство направлений

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Путь $\gamma : [0,a] \to M$ **имеет направление**, если угол $\measuredangle(\gamma, \gamma(0), \gamma)$ существует. Пути $\alpha, \beta : [0,a] \to M$, $\alpha(0) = \beta(0) = p$ **имеют одинаковое направление**, если $\measuredangle_{\mathsf{sup}}(\alpha, p, \beta) = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ: В силу неравенства треугольника для углов, оотношение «$\alpha \sim \beta$, если $\measuredangle_{\mathsf{sup}}(\alpha, p, \beta) = 0$» **задает отношение эквивалентности на множестве всех путей $\gamma : [0,a] \to M$, $\gamma(0) = p$, имеющих направление.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Пространство направлений** в точке p есть множество классов эквивалентности путей $\gamma : [0,a] \to M$, $\gamma(0) = p$, имеющих направление, по отношению $\sim$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: $\measuredangle_{\mathsf{sup}}(\alpha, p, \beta)$ **задает метрику на пространстве направлений.** ■

Произведения метрических пространств

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть (M,d) и (M',d') - метрические пространства, а $\rho:\ (\mathbb{R}^{\geqslant 0})^2 \to \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ функция, удовлетворяющая следующим условиям:

невырожденность: $\rho(\lambda,\mu)=0 \Leftrightarrow \lambda=\mu=0$

субаддитивность: $\rho(x+y)\leqslant\rho(x)+\rho(y)$

монотонность: $\rho(a,b)\geqslant\rho(a_1,b_1)$, если $a\geqslant a_1$, а $b\geqslant b_1$.

Тогда

$$d_\rho((x,x'),(y,y')) := \rho(d(x,y),d'(x',y'))$$

задает метрику на $M\times M'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Неравенство треугольника в $(M\times M', d_\rho)$ доказывается так:

$$\begin{aligned} d_\rho((x,x'),(z,z')) &= \rho(d(x,z),d'(x',z')) \\ &\leqslant \rho(d(x,y)+d(y,z),d'(x',y')+d'(y',z')) \\ &\leqslant \rho(d(x,y),d'(x',y'))+\rho(d(y,z),d'(y',z')) \\ &= d_\rho((x,x'),(y,y'))+d_\rho((y,y'),(z,z')). \end{aligned}$$

■

Произведение метрических пространств (продолжение).

Примеры функций ρ, удовлетворяющих этим условиям:

1. $\rho_1(x, y) = x + y$
2. $\rho_2(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
3. $\rho_\infty(x, y) = \max(x, y)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Метрика

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{d_X(x_1, x_2)^2 + d_Y(y_1, y_2)^2}.$$

называется **метрикой произведения**, а $(X \times Y, d)$ – **прямым произведением** метрических пространств.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Для любых кратчайших с геодезической параметризацией γ_X, γ_Y, **ограничение d на квадрат $\gamma_X \times \gamma_Y \subset X \times Y$ изометрично квадрату.**

СЛЕДСТВИЕ: Для пространств со внутренней метрикой и кратчайшими метрика произведения тоже внутренняя с кратчайшими.

Конус

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Диаметр** метрического пространства M есть число $\sup_{x,y\in M} d(x,y)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (X,d) – метрическое пространство, $\operatorname{diam} X \leqslant \pi$. Рассмотрим топологическое пространство $C(X)$ с топологией фактора, полученное из $X \times [0,\infty[$ склеиванием $X\times\{0\}$ в точку. Определим функцию $d_C:\ C(X)\times C(X)\to \mathbb{R}^{>0}$ по формуле

$$d(p,q) = \sqrt{t^2+s^2-2ts\cos(d(x,y))},$$

где $p=(x,t), q=(y,s)$. **В скором времени будет доказано, что d_C есть метрика.** Пространство $C(X)$ с вышеописанной метрикой называется **метрическим конусом**, или просто **конусом** над X.

ТЕОРЕМА: **Функция d_C удовлетворяет неравенству треугольника.**

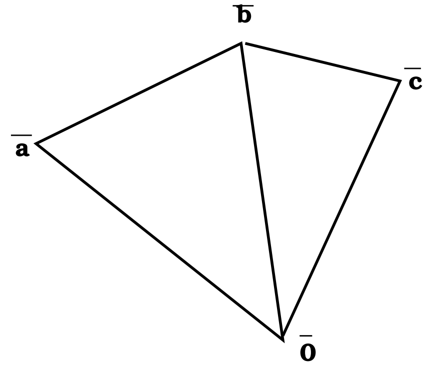
Доказательство. Шаг 1: Пусть $(\alpha,t),(\beta,s)$ – точки в конусе $C(X)$, а $\triangle(\bar{0},\bar{a},\bar{b})$ – треугольник сравнения со сторонами t,s и углом $\measuredangle(\bar{a},\bar{0},\bar{b}) = d(\alpha,\beta)$. **Тогда $d_C(a,b) = |\bar{a},\bar{b}|$.**

Конус (продолжение)

ТЕОРЕМА: Функция d_C удовлетворяет неравенству треугольника.

Доказательство. Шаг 1: Пусть $(\alpha, t), (\beta, s)$ – точки в конусе $C(X)$, а $\triangle(\bar{0}, \bar{a}, \bar{b})$ – треугольник сравнения со сторонами t, s и углом $\measuredangle(\bar{a}, \bar{0}, \bar{b}) = d(\alpha, \beta)$. **Тогда $d_C(a, b) = |\bar{a}, \bar{b}|$.**

Шаг 2: Пусть $a = (\alpha, r), b = (\beta, s), c = (\gamma, t)$ – три точки на $C(X)$, а $\triangle(\bar{0}, \bar{a}, \bar{b})$, $\triangle(\bar{0}, \bar{b}, \bar{c})$ соответствующие треугольники сравнения, с общей стороной $[\bar{0}, \bar{b}]$, и отложенные по разные стороны от $(\bar{0}, \bar{b})$.



Тогда $d_C(a, c) = |\bar{a}, \bar{c}| \leqslant |\bar{a}, \bar{b}| + |\bar{b}, \bar{c}| = d_C(a, b) + d_C(b, c)$. ∎

Свойства конуса

СВОЙСТВА КОНУСА: 1. Для каждого $x \in X$, **путь $\gamma : [0, a] \to C(X)$, переводящий a в (x, a) – кратчайшая.**

2. $x, y \in X$, а $\gamma_1 := (x, [0, a])$, $\gamma_2 := (y, [0, b]) \subset C(X)$ – соответствующие кратчайшие в конусе. **Тогда $\measuredangle(\gamma_1, 0, \gamma_2) = d(x, y)$.**

3. **Конус над отрезком длины α изометричен плоскому углу в $\mathbb{R}^2$ величины α.**

УТВЕРЖДЕНИЕ: Предположим, что X – пространство с внутренней метрикой и кратчайшими. **Тогда метрика на $C(X)$ – тоже внутренняя и с кратчайшими.**

Доказательство. Шаг 1: Для каждой кратчайшей $\gamma \in X$, конус $C(\gamma)$ изометричен плоскому углу, значит, **метрика на $C(\gamma)$ внутренняя и с кратчайшими.**

Шаг 2: **Любые две точки на конусе лежат на $C(\gamma)$** для подходящей кратчайшей γ. ■