

# Гиперболические группы по Громову: углы и кратчайшие

Миша Вербицкий

4 октября, 2012

НМУ

## Внутренние метрики (повторение).

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Пусть  $(M, d)$  – метрическое пространство, а  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  – путь. Рассмотрим разбиение отрезка  $[a, b] = [a, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \dots \cup [x_{n-1}, b]$ . Обозначим  $x_0 := a, x_n := b$ . Положим  $L_\gamma(x_1, \dots, x_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} d(x_i, x_{i+1})$ . Определим **длину пути**  $\gamma$  формулой

$$L_d(\gamma) := \sup_{a < x_1 < \dots < x_{n-1} < b} L_\gamma(x_1, \dots, x_{n-1}).$$

где супремум берется по всем разбиениям отрезка.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Пусть  $(M, d)$  – метрическое пространство, а  $L_d$  – функционал длины на спрямляемых путях. Обозначим за  $\hat{d}$  метрику  $\hat{d}(x, y) := \inf_\gamma L(\gamma)$ , где инфимум берется по всем путям, соединяющим  $x$  и  $y$ . Она называется **внутренней метрикой, индуцированной  $d$** .

**ТЕОРЕМА:** Для любого метрического пространства,  $\hat{\hat{d}} = \hat{d}$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Метрика  $d$  на  $M$  называется **внутренней**, если  $\hat{d} = d$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Финслеровы, римановы, полиэдральные метрики, построенные раньше, **являются внутренними**.

## $\varepsilon$ -середины

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Точка  $z$  называется  $\varepsilon$ -серединой пары  $(x, y)$ , если  $|d(x, z) - \frac{1}{2}d(x, y)| \leq \varepsilon$  и  $|d(y, z) - \frac{1}{2}d(x, y)| \leq \varepsilon$ . Говорится, что в  $(M, d)$  **существуют  $\varepsilon$ -середины**, если для любых  $x, y$  и любого  $\varepsilon > 0$ , существует  $\varepsilon$ -середина.

**УТВЕРЖДЕНИЕ:** В любом пространстве с внутренней метрикой **существуют  $\varepsilon$ -середины**.

**Доказательство. Шаг 1:** Пусть  $\gamma$  – путь длины  $d(x, y) + \varepsilon$ , соединяющий  $x$  и  $y$ . В силу непрерывности функции  $d(x, \gamma(t))$ , принимающей значения от 0 до  $d(x, y)$ , **существует точка  $z = \gamma(t_0)$  такая, что  $d(x, z) = \frac{d(x, y)}{2}$ .**

**Шаг 2:**  $d(y, z) + d(z, y) \leq L_d(\gamma) = d(x, y) + \varepsilon$ . **Значит,  $d(y, z) \leq \frac{d(x, y)}{2} + \varepsilon$ .** ■

**$\varepsilon$ -середины и двоично-рациональные дроби**

**ТЕОРЕМА:** Пусть  $M$  – пространство, где существуют  $\varepsilon$ -середины, а  $x_0, x_1 \in M$ . Тогда для любого  $\lambda \in [0, 1]$ , найдется  $x_\lambda \in M$  такая, что  $|d(x_0, x_\lambda) - \lambda d(x_0, x_1)| \leq \varepsilon$  и  $|d(x_1, x_\lambda) - (1 - \lambda)d(x_0, x_1)| \leq \varepsilon$ .

**Доказательство. Шаг 1:** Пусть  $\lambda = \frac{2n-1}{2^m}$ ,  $0 < \lambda < 1$ . Возьмем за  $x_\lambda \in M$   $\frac{\varepsilon}{2^{m+1}}$ -середину между  $x_{\frac{n}{2^{m-1}}}$  и  $x_{\frac{n-1}{2^{m-1}}}$ . **Воспользовавшись индукцией по  $m$ , построим  $x_\lambda$  для каждого двоично-рационального числа  $\lambda = \frac{2n-1}{2^m}$ .**

**Шаг 2:** Пусть  $P(\lambda)$  переводит  $\lambda = \frac{2n-1}{2^m}$  в  $\frac{n-1}{2^{m-1}}$ . По построению,

$$|d(x_\lambda, x_{P(\lambda)}) - (\lambda - P(\lambda))d(x_0, x_1)| < \frac{\varepsilon}{2^{m+1}}.$$

Суммируя ряд

$$d(x_\lambda, x_{P(\lambda)}) + d(x_{P(\lambda)}, x_{P(P(\lambda))}) + \dots$$

получим число, которое отличается от  $\lambda d(x_0, x_1)$  на  $\sum_{i=0}^m \frac{\varepsilon}{2^{m+1}} \leq \varepsilon$ . **Значит,**

$$d(x_0, x_\lambda) \leq d(x_\lambda, x_{P(\lambda)}) + d(x_{P(\lambda)}, x_{P(P(\lambda))}) + \dots \leq \lambda d(x_0, x_1) + \varepsilon.$$

**Аналогично,**  $d(x_1, x_\lambda) \leq (1 - \lambda)d(x_0, x_1) + \varepsilon$ .

**$\varepsilon$ -середины и двоично-рациональные дроби (продолжение)**

**Шаг 3:** Уже доказано:

$$d(x_1, x_\lambda) \leq (1 - \lambda)d(x_0, x_1) + \varepsilon \quad \text{и} \quad d(x_0, x_\lambda) \leq \lambda d(x_0, x_1) + \varepsilon.$$

Осталось доказать, что  $d(x_1, x_\lambda) \geq \lambda d(x_0, x_1) - \varepsilon$  и  $d(x_1, x_\lambda) \geq (1 - \lambda)d(x_0, x_1) - \varepsilon$ . Но если это неверно, имеем (например)  $d(x_1, x_\lambda) \leq \lambda d(x_0, x_1) - \varepsilon$ , что дает

$$d(x_1, x_\lambda) + d(x_1, x_\lambda) < \lambda d(x_0, x_1) - \varepsilon + (1 - \lambda)d(x_0, x_1) + \varepsilon = d(x_0, x_1)$$

**Противоречие с неравенством треугольника! ■**

**СЛЕДСТВИЕ: ("Условие Хопфа-Ринова")** Пусть  $M$  – метрическое пространство, в котором существуют  $\varepsilon$ -середины. **Тогда для любых  $x, y \in M$ , и  $r \leq d(x, y)$ , расстояние от шара  $B_r(x)$  до  $y$  равно  $d(x, y) - r$ .**

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:** Выберем точку  $z = z_\lambda$  такую, что  $|d(x, z) - (r - \varepsilon)| < \varepsilon$  и  $|d(y, z) - d(x, y) - r| < \varepsilon$ . Тогда  $z \in B_r(x)$  и  $d(B_r(x), y) \leq d(y, z) \leq d(x, y) - r + \varepsilon$ . ■

## $\varepsilon$ -середины и внутренние метрики

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Из шага 2 предыдущей теоремы следует, что отображение  $\lambda \rightarrow x_\lambda$  является  $d(x_0, x_1)(1 + \varepsilon)$ -липшицевым.

**УТВЕРЖДЕНИЕ:** Пусть  $X, Y$  – метрические пространства, а  $\varphi : X \rightarrow Y$  –  $C$ -липшицево отображение. Тогда  $\varphi$  продолжается до  $C$ -липшицевого отображения пополнений  $\bar{\varphi} : \bar{X} \rightarrow \bar{Y}$ .

**ТЕОРЕМА:** Пусть  $M$  – полное метрическое пространство, в котором существуют  $\varepsilon$ -середины. Тогда метрика в  $M$  внутренняя.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:** В силу предыдущего утверждения, отображение  $\lambda \rightarrow x_\lambda$  продолжается до  $d(x_0, x_1)(1 + \varepsilon)$ -липшицевого отображения  $[0, 1] \xrightarrow{\gamma} M$ , то есть пути, соединяющего  $x_0$  и  $x_1$ . Длина сего пути ограничена  $d(x_0, x_1)(1 + \varepsilon)$  в силу липшицевости.

## Локальная компактность

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:**  $\varepsilon$ -**сеть** в метрическом пространстве  $M$  есть такое множество  $N \subset M$ , что объединение  $\varepsilon$ -шаров с центрами в  $N$  равно  $M$ . Метрическое пространство называется **вполне ограниченным**, если для любого  $\varepsilon > 0$  в  $M$  найдется конечная  $\varepsilon$ -сеть.

**ТЕОРЕМА:** Полное метрическое пространство компактно тогда и только тогда, когда оно вполне ограничено.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:** См. в листочках. ■

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Пусть  $M$  – метрическое пространство. Говорят, что  $M$  **локально компактно**, если для любой точки  $x \in M$  существует такое число  $\varepsilon > 0$ , что замкнутый шар  $\overline{B}_\varepsilon(x)$  компактен.

## Теорема Хопфа-Ринова

**ТЕОРЕМА:** Пусть  $M$  – полное, локально компактное пространство с внутренней метрикой. **Тогда каждый замкнутый шар в  $M$  компактен.**

**Доказательство. Шаг 1:** В  $\varepsilon$ -окрестности шара  $\bar{B}_r(m)$  содержится шар  $\bar{B}_{r+\varepsilon}(m)$  (следует из условия Хопфа-Ринова).

**Шаг 2:** Пусть  $m \in M$  точка, такая, что шары  $B_{r-\varepsilon}(m)$  вполне ограничены для любого  $\varepsilon > 0$ . **Тогда  $B_r(m)$  тоже вполне ограничено.** Действительно,  $\frac{1}{2}\varepsilon$ -сеть в  $B_{r-\frac{1}{2}\varepsilon}(m)$  будет  $\varepsilon$ -сетью в  $B_r(m)$ , в силу предыдущего шага.

**Шаг 3:** Определим функцию на метрическом пространстве  $\rho(m) := \sup_r \{r \in \mathbb{R} \mid \bar{B}_r(m) \text{ компактен}\}$ . **Тогда  $\rho$  1-липшицева**, в частности, непрерывна.

**Шаг 4:** Пусть  $\bar{B}_r(m)$  – компактный шар в локально компактном пространстве. Тогда существует  $\varepsilon > 0$  такое, что **каждый замкнутый шар радиуса  $\varepsilon$  в с центром в  $\bar{B}_r(m)$  компактен.** Действительно,  $\rho$  достигает минимума где-то на  $B_r(m)$ .



## Теорема Хопфа-Ринова (продолжение)

**Шаг 2:** Пусть  $m \in M$  точка, такая, что шары  $B_{r-\varepsilon}(m)$  вполне ограничены для любого  $\varepsilon > 0$ . **Тогда  $B_r(m)$  тоже вполне ограничено.** Действительно,  $\frac{1}{2}\varepsilon$ -сеть в  $B_{r-\frac{1}{2}\varepsilon}(m)$  будет  $\varepsilon$ -сетью в  $B_r(m)$ , в силу предыдущего шага.

**Шаг 3:** Определим функцию на метрическом пространстве  $\rho(m) := \sup_r \{r \in \mathbb{R} \mid \bar{B}_r(m) \text{ компактен}\}$ . **Тогда  $\rho$  1-липшицева**, в частности, непрерывна.

**Шаг 4:** Пусть  $\bar{B}_r(m)$  – компактный шар в локально компактном пространстве. Тогда существует  $\varepsilon > 0$  такое, что **каждый замкнутый шар радиуса  $\varepsilon$  в с центром в  $\bar{B}_r(m)$  компактен.** Действительно,  $\rho$  достигает минимума где-то на  $B_r(m)$ .

**Шаг 5:** Для такого шара,  $\bar{B}_{r+\frac{1}{2}\varepsilon}(m)$  **тоже компактен.** Для доказательства, рассмотрим конечную  $\frac{1}{3}\varepsilon$ -сеть в  $\bar{B}_r(m)$ . Объединение замкнутых  $\varepsilon$ -шаров с центрами в этой сети компактно (конечное объединение компактов компактно) и содержит  $\bar{B}_{r+\frac{1}{2}\varepsilon}(m)$  в силу шага 1.

**Шаг 6:** Из сравнение шага 5 и шага 2 заключаем, что  $\rho = \infty$ . ■

## Кратчайшие в метрическом пространстве

**Определение:** Непрерывное отображение  $\gamma : [0, \alpha] \rightarrow M$  называется **кратчайшей**, если его длина равна  $d(\gamma(0), \gamma(\alpha))$ .

**Любой отрезок кратчайшей - снова кратчайшая.**

**Определение:** Если  $\varphi : [0, \alpha] \rightarrow [0, \alpha]$  – гомеоморфизм, а  $\gamma$  – путь из  $x$  в  $y$ , композиция  $\varphi \circ \gamma$  – тоже путь из  $x$  в  $y$ . Такой путь называется **репараметризацией**  $\gamma$ .

**Параметризация**  $\gamma$  – выбор пути в классе путей, эквивалентных с точностью до репараметризации.

**Определение:** Пусть  $\gamma : [0, \alpha] \rightarrow M$  – кратчайшая, соединяющая  $x$  и  $y$ , причем

$$d(\gamma(x), \gamma(y)) = |x - y|.$$

Такая кратчайшая называется **кратчайшей геодезической**, а соответствующая параметризация – **геодезической параметризацией**.

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Геодезическая кратчайшая задается изометрическим вложением из отрезка в  $M$ .

## Существование кратчайших

**ТЕОРЕМА:** Пусть  $M$  - локально компактное, полное пространство с внутренней метрикой а  $x_0, x_1 \in M$ . **Тогда существует кратчайшая геодезическая, соединяющая  $x_0$  и  $x_1$ .**

**Доказательство. Шаг 1:** Пусть  $d(x_0, x_1) = \alpha$ . В силу компактности, **в шаре  $\bar{B}_{\alpha/2}(x_1)$  есть точка  $x_{\frac{1}{2}}$  такая, что  $d(x_0, x_{\frac{1}{2}}) = d(x_{\frac{1}{2}}, x_1) = \alpha/2$ .** В самом деле, функция  $d(\cdot, x_0) : \bar{B}_{\alpha/2}(x_1) \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывная на компакте, значит, достигает минимума, который равен  $d(x_0, \bar{B}_{\alpha/2}(x_1)) = \alpha/2$  потому, что метрика внутренняя.

**Шаг 2:** Воспользовавшись индукцией, для каждого двоично-рационального числа  $\lambda = \frac{n}{2^k}$  в  $[0, 1]$  **найдем точку  $x_\lambda$ , такую, что  $d(x_\lambda, x_\mu) = \alpha|\lambda - \mu|$ .**

**Шаг 3:** Мы получили **изометрическое вложение множества двоично-рациональных чисел в  $M$ . Продолжим на пополнение, получим геодезическую. ■**

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Метрика в  $M$  называется **внутренней с кратчайшими**, если любые две точки можно соединить кратчайшей с геодезической параметризацией.

## Углы

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Пусть  $a, b, c$  – точки в метрическом пространстве  $(M, d)$ . **Здесь и в дальнейшем  $\mathbb{R}^2$  предполагается метрическим пространством, с обычной (евклидовой) метрикой.** **Треугольник сравнения**  $\Delta(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$  есть треугольник в  $\mathbb{R}^2$ , с вершинами  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ , и сторонами  $|\bar{a}, \bar{b}| = d(a, b)$ ,  $|\bar{a}, \bar{c}| = d(a, c)$ , и  $|\bar{b}, \bar{c}| = d(b, c)$  (такой треугольник, очевидно, существует, и определен единственно с точностью до конгруэнтности). Угол  $\sphericalangle(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$  в треугольнике  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  обозначается  $\theta(a, b, c)$ ; он называется **углом сравнения**.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Пусть  $\gamma_1 : [0, a] \rightarrow M$ ,  $\gamma_2 : [0, b] \rightarrow M$  два пути в метрическом пространстве  $M$ ,  $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$ . **Угол** между путями  $\gamma_1, \gamma_2$  в  $p$  есть число

$$\sphericalangle(\gamma_1, p, \gamma_2) := \lim_{t, s \rightarrow 0} \theta(\gamma_1(t), p, \gamma_2(s)),$$

если такой предел существует (в противном случае, говорится, что **угол между  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  не существует**). **Верхний угол** есть

$$\sphericalangle_{\sup}(\gamma_1, p, \gamma_2) := \limsup_{t, s \rightarrow 0} \theta(\gamma_1(t), p, \gamma_2(s)),$$

где  $\limsup$  **обозначает супремум всех предельных точек последовательностей  $\theta(\gamma_1(t_i), p, \gamma_2(s_j))$ , для всех  $t_i, s_j$  сходящихся к 0.**

## Неравенство треугольника для углов

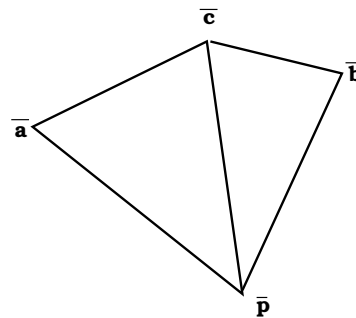
**УПРАЖНЕНИЕ:** Проверьте, что **угол между гладкими путями в  $\mathbb{R}^n$  существует и равен углу между их касательными.**

**УПРАЖНЕНИЕ:**  $\gamma : [0, a] \rightarrow M$  – кратчайшая, наделенная геодезической параметризацией, а  $\gamma(0) = p$ . **Тогда угол  $\angle_{\text{sup}}(\gamma, p, \gamma)$  существует и равен нулю.**

**ТЕОРЕМА:** Пусть  $\gamma_i : [0, a] \rightarrow M$  – пути в  $M$ , Тогда верно **неравенство треугольника для верхних углов:**

$$\angle_{\text{sup}}(\gamma_1, p, \gamma_2) + \angle_{\text{sup}}(\gamma_2, p, \gamma_3) \geq \angle_{\text{sup}}(\gamma_1, p, \gamma_3).$$

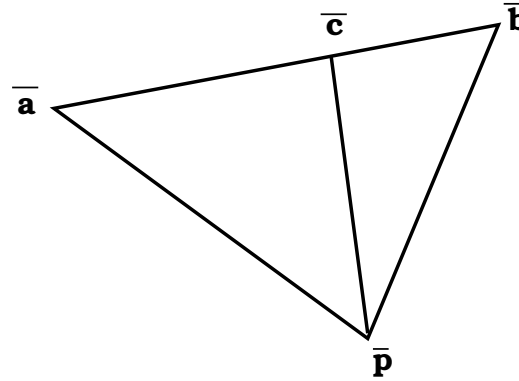
**Доказательство. Шаг 1:** Пусть  $\gamma_i(0) = p$ ,  $a = \gamma_1(s)$ ,  $b = \gamma_3(t)$ ,  $c = \gamma_2(u)$ . Рассмотрим треугольники сравнения  $\Delta(\bar{p}, \bar{a}, \bar{c})$  и  $\Delta(\bar{p}, \bar{c}, \bar{b})$ , и нарисуем их на плоскости, с общей стороной  $|\bar{p}, \bar{c}|$ , чтобы они лежали по разные стороны от прямой  $(\bar{p}, \bar{c})$ .



В силу непрерывности  $d(p, \gamma_2(u))$ , **для любых заданных  $s, t$ , можно подобрать  $u$  таким образом, что  $\bar{c}$  лежит на отрезке  $[\bar{a}, \bar{b}]$ .**

## Неравенство треугольника для углов (продолжение)

**Шаг 2:** Из рассмотрения треугольников сравнения



убеждаемся, что

$$\theta(a, p, b) + \theta(b, p, c) = \angle(\bar{a}, \bar{p}, \bar{c}) = \arccos\left(\frac{s^2 + t^2 - |\bar{a}, \bar{c}|^2}{2st}\right)$$

где  $s = d(p, a)$  и  $t = d(p, c)$ .

**Шаг 3:** По определению,  $|\bar{a}, \bar{c}| = |\bar{a}, \bar{b}| + |\bar{b}, \bar{c}| = d(a, b) + d(b, c) \geq d(a, c)$ . В силу монотонности арккосинуса, получаем

$$\angle(\bar{a}, \bar{p}, \bar{c}) = \arccos\left(\frac{s^2 + t^2 - |\bar{a}, \bar{c}|^2}{2st}\right) \geq \arccos\left(\frac{s^2 + t^2 - d(a, c)^2}{2st}\right) = \theta(a, p, c).$$

**Шаг 4:** Сравнивая формулы, полученные в шаге 2 и шаге 3, получаем  $\theta(a, p, b) + \theta(b, p, c) \geq \theta(a, p, c)$ ; неравенство для  $\angle_{\text{sup}}$  следует немедленно. ■

## Пространство направлений

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Путь  $\gamma : [0, a] \rightarrow M$  **имеет направление**, если угол  $\angle(\gamma, \gamma(0), \gamma)$  существует. Пути  $\alpha, \beta : [0, a] \rightarrow M$ ,  $\alpha(0) = \beta(0) = p$  **имеют одинаковое направление**, если  $\angle_{\text{sup}}(\alpha, p, \beta) = 0$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ:** В силу неравенства треугольника для углов, отношение « $\alpha \sim \beta$ , если  $\angle_{\text{sup}}(\alpha, p, \beta) = 0$ » **задает отношение эквивалентности на множестве всех путей  $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ ,  $\gamma(0) = p$ , имеющих направление.**

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** **Пространство направлений** в точке  $p$  есть множество классов эквивалентности путей  $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ ,  $\gamma(0) = p$ , имеющих направление, по отношению  $\sim$ .

**УТВЕРЖДЕНИЕ:**  $\angle_{\text{sup}}(\alpha, p, \beta)$  **задает метрику на пространстве направлений.** ■

## Произведения метрических пространств

**УТВЕРЖДЕНИЕ:** Пусть  $(M, d)$  и  $(M', d')$  - метрические пространства, а  $\rho : (\mathbb{R}^{\geq 0})^2 \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$  функция, удовлетворяющая следующим условиям:

**невырожденность:**  $\rho(\lambda, \mu) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \mu = 0$

**субаддитивность:**  $\rho(x + y) \leq \rho(x) + \rho(y)$

**МОНОТОННОСТЬ:**  $\rho(a, b) \geq \rho(a_1, b_1)$ , если  $a \geq a_1$ , а  $b \geq b_1$ .

Тогда

$$d_\rho((x, x'), (y, y')) := \rho(d(x, y), d'(x', y'))$$

задает метрику на  $M \times M'$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:** Неравенство треугольника в  $(M \times M', d_\rho)$  доказывается так:

$$\begin{aligned} d_\rho((x, x'), (z, z')) &= \rho(d(x, z), d'(x', z')) \\ &\leq \rho(d(x, y) + d(y, z), d'(x', y') + d'(y', z')) \\ &\leq \rho(d(x, y), d'(x', y')) + \rho(d(y, z), d'(y', z')) \\ &= d_\rho((x, x'), (y, y')) + d_\rho((y, y'), (z, z')). \end{aligned}$$

■



## Произведение метрических пространств (продолжение).

Примеры функций  $\rho$ , удовлетворяющих этим условиям:

1.  $\rho_1(x, y) = x + y$
2.  $\rho_2(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
3.  $\rho_\infty(x, y) = \max(x, y)$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Метрика

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{d_X(x_1, x_2)^2 + d_Y(y_1, y_2)^2}.$$

называется **метрикой произведения**, а  $(X \times Y, d)$  – **прямым произведением** метрических пространств.

**УТВЕРЖДЕНИЕ:** Для любых кратчайших с геодезической параметризацией  $\gamma_X, \gamma_Y$ , **ограничение  $d$  на квадрат  $\gamma_X \times \gamma_Y \subset X \times Y$  изометрично квадрату.**

**СЛЕДСТВИЕ:** Для пространств со внутренней метрикой и кратчайшими метрика произведения тоже внутренняя с кратчайшими.

## Конус

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** **Диаметр** метрического пространства  $M$  есть число  $\sup_{x,y \in M} d(x,y)$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Пусть  $(X, d)$  – метрическое пространство,  $\text{diam} X \leq \pi$ . Рассмотрим топологическое пространство  $C(X)$  с топологией фактора, полученное из  $X \times [0, \infty[$  склеиванием  $X \times \{0\}$  в точку. Определим функцию  $d_C : C(X) \times C(X) \rightarrow \mathbb{R}^{>0}$  по формуле

$$d(p, q) = \sqrt{t^2 + s^2 - 2ts \cos(d(x, y))},$$

где  $p = (x, t), q = (y, s)$ . **В скором времени будет доказано, что  $d_C$  есть метрика.** Пространство  $C(X)$  с вышеописанной метрикой называется **метрическим конусом**, или просто **конусом** над  $X$ .

**ТЕОРЕМА:** **Функция  $d_C$  удовлетворяет неравенству треугольника.**

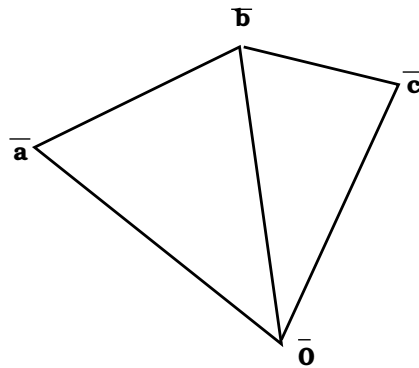
**Доказательство. Шаг 1:** Пусть  $(\alpha, t), (\beta, s)$  – точки в конусе  $C(X)$ , а  $\Delta(\bar{0}, \bar{a}, \bar{b})$  – треугольник сравнения со сторонами  $t, s$  и углом  $\angle(\bar{a}, \bar{0}, \bar{b}) = d(\alpha, \beta)$ . **Тогда  $d_C(a, b) = |\bar{a}, \bar{b}|$ .**

## Конус (продолжение)

**ТЕОРЕМА:** Функция  $d_C$  удовлетворяет неравенству треугольника.

**Доказательство. Шаг 1:** Пусть  $(\alpha, t), (\beta, s)$  – точки в конусе  $C(X)$ , а  $\Delta(\bar{0}, \bar{a}, \bar{b})$  – треугольник сравнения со сторонами  $t, s$  и углом  $\angle(\bar{a}, \bar{0}, \bar{b}) = d(\alpha, \beta)$ . Тогда  $d_C(a, b) = |\bar{a}, \bar{b}|$ .

**Шаг 2:** Пусть  $a = (\alpha, r), b = (\beta, s), c = (\gamma, t)$  – три точки на  $C(X)$ , а  $\Delta(\bar{0}, \bar{a}, \bar{b}), \Delta(\bar{0}, \bar{b}, \bar{c})$  соответствующие треугольники сравнения, с общей стороной  $[\bar{0}, \bar{b}]$ , и отложенные по разные стороны от  $(\bar{0}, \bar{b})$ .



Тогда  $d_C(a, c) = |\bar{a}, \bar{c}| \leq |\bar{a}, \bar{b}| + |\bar{b}, \bar{c}| = d_C(a, b) + d_C(b, c)$ . ■

## Свойства конуса

**СВОЙСТВА КОНУСА:** 1. Для каждого  $x \in X$ , путь  $\gamma : [0, a] \rightarrow C(X)$ , переводящий  $a$  в  $(x, a)$  – кратчайшая.

2.  $x, y \in X$ , а  $\gamma_1 := (x, [0, a])$ ,  $\gamma_2 := (y, [0, b]) \subset C(X)$  – соответствующие кратчайшие в конусе. Тогда  $\angle(\gamma_1, 0, \gamma_2) = d(x, y)$ .

3. Конус над отрезком длины  $\alpha$  изометричен плоскому углу в  $\mathbb{R}^2$  величины  $\alpha$ .

**УТВЕРЖДЕНИЕ:** Предположим, что  $X$  – пространство с внутренней метрикой и кратчайшими. Тогда метрика на  $C(X)$  – тоже внутренняя и с кратчайшими.

**Доказательство. Шаг 1:** Для каждой кратчайшей  $\gamma \in X$ , конус  $C(\gamma)$  изометричен плоскому углу, значит, метрика на  $C(\gamma)$  внутренняя и с кратчайшими.

**Шаг 2:** Любые две точки на конусе лежат на  $C(\gamma)$  для подходящей кратчайшей  $\gamma$ . ■