Гиперболические группы по Громову: пространства, гиперболичные по Громову

Миша Вербицкий

9 ноября, 2012

НМУ

Кратчайшие в метрическом пространстве (повторение)

Определение: Непрерывное отображение $\gamma: [0,\alpha] \to M$ называется **кратчайшей**, если его длина равна $d(\gamma(0), \gamma(\alpha))$.

Любой отрезок кратчайшей - снова кратчайшая.

Определение: Если $\varphi: [0,\alpha] \to [0,\alpha]$ – гомеоморфизм, а γ - путь из x в y, композиция $\varphi \circ \gamma$ - тоже путь из x в y. Такой путь называется **репараметризацией** γ.

Параметризация γ – выбор пути в классе путей, эквивалентных с точностью до репараметризации.

Определение: Пусть $\gamma: [0,\alpha] \to M$ - кратчайшая, соединяющая x и y, причем

$$d(\gamma(x), \gamma(y)) = |x - y|.$$

Такая кратчайшая называется **кратчайшей геодезической**, а соответствующая параметризация - **геодезической параметризацией**.

Геодезические кратчайшие (повторение)

ЗАМЕЧАНИЕ: Геодезическая кратчайшая – то же самое, что изометрическое вложение из отрезка в M.

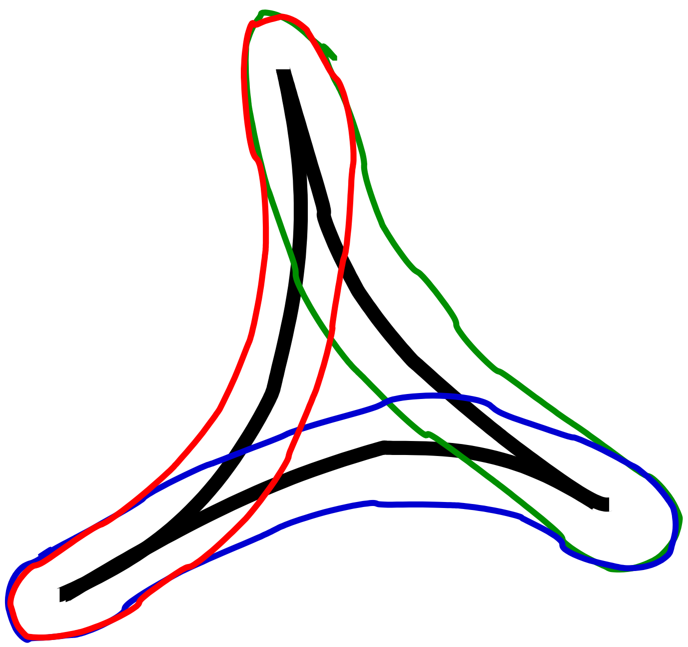
ТЕОРЕМА: Пусть M - локально компактное, полное пространство с внутренней метрикой, а $x_0, x_1 \in M$. **Тогда существует кратчайшая геодезическая, соединяющая x_0 и x_1.** ■

ЗАМЕЧАНИЕ: Если не оговорено противного, **все метрические пространства предполагаются наделенными внутренней метрикой,** а **любые две точки соединяются кратчайшими с геодезической параметризацией.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Кратчайшая, соединяющая две точки a, b метрического пространства, обозначается $[a, b]$, а ее длина обозначается $|ab| := d(a, b)$.

Тонкие треугольники

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Геодезический треугольник** $\triangle(abc)$ в метрическом пространстве есть треугольник, составленный из трех вершин a, b, c, соединенных кратчайшими, которые я буду обозначать за $[a, b], [b, c]$ и $[c, a]$ **Талия** *(en: minsize, fr: taille minimale)* треугольника есть супремум расстояния от точки z, лежащей на одной из сторон, до объединения двух других. Треугольник называется δ-**тонким** (по Рипсу), если его талия не больше δ.



Гиперболические пространства

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Метрическое пространство X со строго внутренней метрикой называется **δ-гиперболическим**, если все геодезические треугольники δ-тонкие. Будем говорить, что X **гиперболично**, если оно δ-гиперболично, для какой-то константы δ.

ЗАМЕЧАНИЕ: Есть много разных определений гиперболичности. При этом, величина константы δ не имеет значения; когда говорят **"определение А гиперболичности эквивалентно определению Б"** это значит, что **для какого-то числа $C > 0$ из δ-гиперболичности в смысле А следует $C\delta$-гиперболичность в смысле Б, а из δ-гиперболичности в смысле Б следует $C\delta$-гиперболичность в смысле А.**

ЗАМЕЧАНИЕ: В конце этой лекции я определю δ-гиперболичность **для произвольных метрических пространств** (не обязательно с внутренней метрикой). Определение с тонкими треугольниками станет частным случаем более общего.

Eliyahu Rips (born 12 December 1948)

A mathematician has discovered a hidden code in The Bible that appears to reveal the details of events that have taken place thousands of years after The Bible was written, Eliyahu Rips disclosed in a letter to Yitzhak Rabin, the Prime Minister of Israel.

"The reason I'm telling you about this is that the only time your full name - Yitzhak Rabin - is encoded in The Bible, the words «assassin that will assassinate» cross your name.

That should not be ignored, because the assassinations of both John and Robert Kennedy and Anwar Sadat are also encoded in The Bible - in the case of Sadat with the first and last names of his killer, the date of the murder, the place, and how it was done.

I think you are in real danger, but that the danger can be averted."

Метрические графы (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Несвязное объединение** метрических пространств (X_α, d_α) есть $\coprod X_\alpha$ с метрикой $d(x,y)$ которая равна $d_\alpha(x,y)$, когда x и y лежат в X_α, и ∞ в противном случае.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть I_α – набор отрезков, изометричных $[0, x_\alpha]$, а $\sim$ – отношение эквивалентности, полученное склейкой некоторых вершин. Метрический фактор $\coprod_\alpha I_\alpha$ называется **метрическим графом**.

УТВЕРЖДЕНИЕ: **Метрика на метрическом графе всегда внутренняя.**

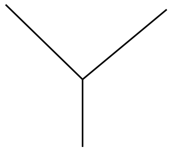
ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Дерево** есть связный метрический граф с тривиальной фундаментальной группой.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что любой связный подграф в дереве – **снова дерево.**

Модельный гиперболический треугольник

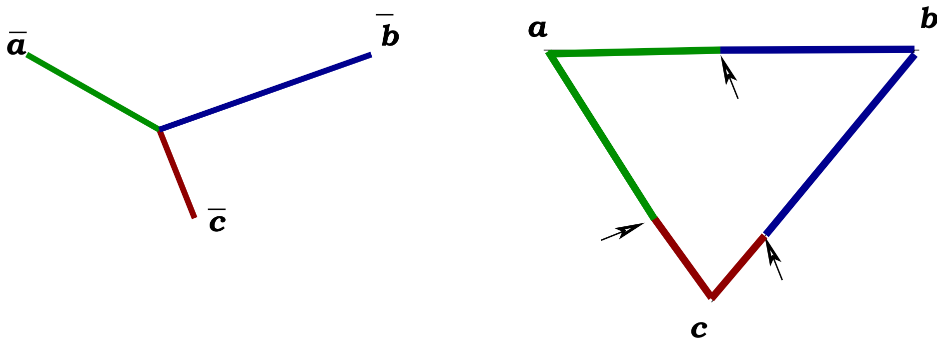
УТВЕРЖДЕНИЕ: Любое дерево Γ 0-гиперболично.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Пусть $\triangle(abc)$ – геодезический треугольник в Γ. Поскольку кратчайшие суть объединения сегментов, $\triangle(abc)$ **– связный подграф, то есть снова дерево:**



δ-тонкость такого графа очевидна из картинки. ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\triangle(abc)$ – геодезический треугольник. Определим **модельный 0-гиперболический треугольник**, или же **модельное дерево**, $\triangle(\bar{a}\bar{b}\bar{c})$ как дерево с тремя вершинами



и тремя ребрами, соединенными в четвертой вершине, **таким образом, что соответствующие расстояния равны:** $|ab| = |\bar{a}\bar{b}|$, $|ac| = |\bar{a}\bar{c}|$, $|bc| = |\bar{b}\bar{c}|$.

Отображение сравнения

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть $\triangle(abc)$ – геодезический треугольник в метрическом пространстве, а $\triangle(\bar{a}\bar{b}\bar{c})$ – модельное дерево. **Тогда существует отображение $\Psi: \triangle(abc) \to \triangle(\bar{a}\bar{b}\bar{c})$, задающее изометрию на каждой стороне, и переводящее вершины в соответствующие им вершины.** ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Это отображение называется **отображением сравнения**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\varphi: X \to Y$ – отображение метрических пространств. **Кодиаметр** $\operatorname{codiam}\varphi$ определяется формулой

$$\operatorname{codiam}(\varphi) := \sup_{a,b \in X} |d(x,y) - d(\varphi(x), \varphi(y))|.$$

Он измеряет то, насколько φ отличается от изометрии.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть $\Psi: \triangle(abc) \to \triangle(\bar{a}\bar{b}\bar{c})$ – отображение в модельный треугольник, построенное выше. Тогда

(а) **Если $\operatorname{codiam}\Psi \leqslant \delta$, то $\triangle(abc)$ δ-тонкий.**

(б) **Если $\triangle(abc)$ δ-тонкий, то $\operatorname{codiam}\Psi \leqslant 2\delta$.**

Отображение сравнения (продолжение)

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть $\Psi: \triangle(abc) \to \triangle(\bar{a}\bar{b}\bar{c})$ – отображение в модельный треугольник, построенное выше. Тогда

(а) **Если $\operatorname{codiam}\Psi \leqslant \delta$, то $\triangle(abc)$ δ-тонкий.**

(б) **Если $\triangle(abc)$ δ-тонкий, то $\operatorname{codiam}\Psi \leqslant 2\delta$.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: (а) очевидно. Чтобы доказать (б), рассмотрим точки $b' \in [ab]$, $c', c_1 \in [ac]$ на сторонах треугольника.

Шаг 1: $|b'c_1| < \delta$ влечет $|d(a,b') - d(a,c_1)| < \delta$ в силу неравенства треугольника.

Шаг 2: Пусть $d(b',[ac]) < \delta$, $|ac'| = |ab'|$, а $c_1 \in [ac]$ – точка, отстоящая от b' на расстояние $\leqslant \delta$. В силу предыдущего шага, $|d(a,b') - d(ac_1)| < \delta$, значит, $d(c_1,c') < \delta$, но тогда $d(c',b') < 2\delta$. ■

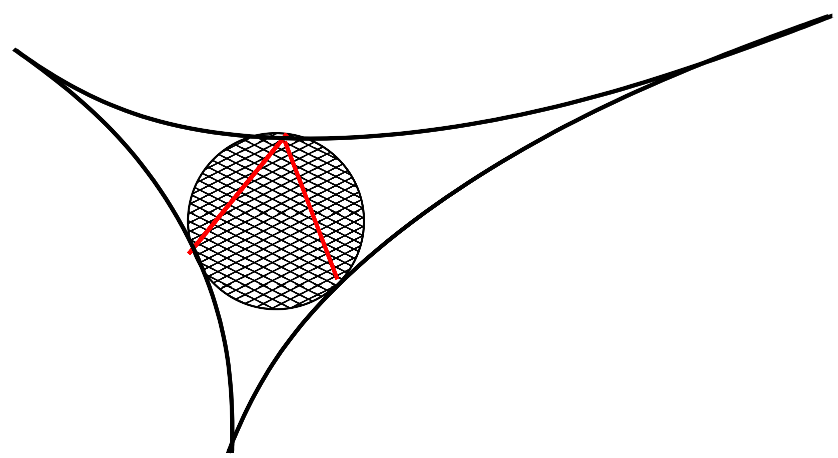
ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Треугольник называется **δ-тонким (по Громову)**, если $\operatorname{codiam}\Psi \leqslant \delta$.

Гиперболичность пространства Лобачевского

ТЕОРЕМА: Пространство Лобачевского гиперболично.

Доказательство. Шаг 1: Поскольку любой геодезический треугольник лежит в плоскости, можно ограничиться плоскостью Лобачевского.

Шаг 2: Пусть $\triangle(abc)$ – геодезический треугольник на плоскости Лобачевского, а B – вписанная в него окружность. На каждой стороне треугольника (например, $[ab]$) максимум расстояния до объединения двух других сторон ограничен максимумом расстияния в точках касания вписанной окружности.



Из этого следует, что **талия треугольника удовлетворяет $T(abc) < 2R$, где R – радиус вписанной окружности.**

Гиперболичность пространства Лобачевского (продолжение)

Шаг 2 (повтор): Талия треугольника удовлетворяет $T(abc) < 2R$, где R – радиус вписанной окружности.

Шаг 3: Площадь круга радиуса R растет с увеличением R неограниченно, потому что **площадь плоскости Лобачевского бесконечна** (ее можно замостить бесконечным количеством прямоугольных шестиугольников).

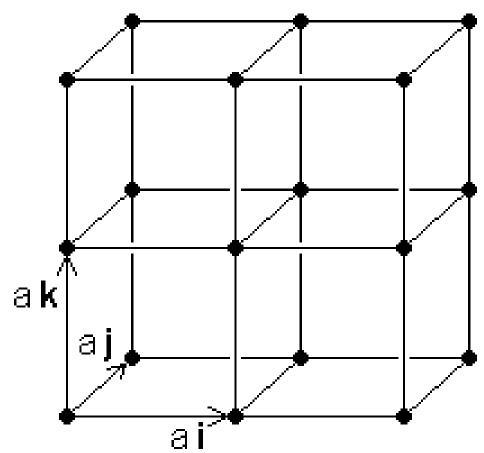
Шаг 4: Площадь n-угольника на плоскости Лобачевского равна $\pi(n-2)-\sum\alpha_i$, где α_i – его углы. Значит, площадь треугольника $\leqslant \pi$. Поэтому, **радиус круга, вписанного в треугольник, ограничен.** ■

Граф Кэли (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Набор образующих** группы G есть множество элементов S, мультипликативно порождающих G. **В дальнейшем, мы будем всегда предполагать, что $s \in S \Leftrightarrow s^{-1} \in S$.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть G – группа, $\{s_i\}$ – набор образующих. **Граф Кэли** пары $(G, \{s_i\})$ есть граф, вершины которого – элементы G, а ребра соединяют точки вида g и gs_i. Полагая длину ребер графа равной 1, мы **определяем граф Кэли как метрическое пространство с внутренней метрикой.**

ПРИМЕР: Граф Кэли для $\mathbb{Z}^n$ с обычным набором образующих есть кубическая решетка.



Гиперболические группы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Группа с заданной системой образующих называется **гиперболичной по Громову**, если ее граф Кэли δ-гиперболичен, для какого-то δ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Группа G называется **свободной**, если это фундаментальная группа букета окружностей.

ЗАМЕЧАНИЕ: Универсальное накрытие свободной группы есть ее граф Кэли. **В силу односвязности универсального накрытия, это дерево.** Значит, **свободная группа 0-гиперболична**.

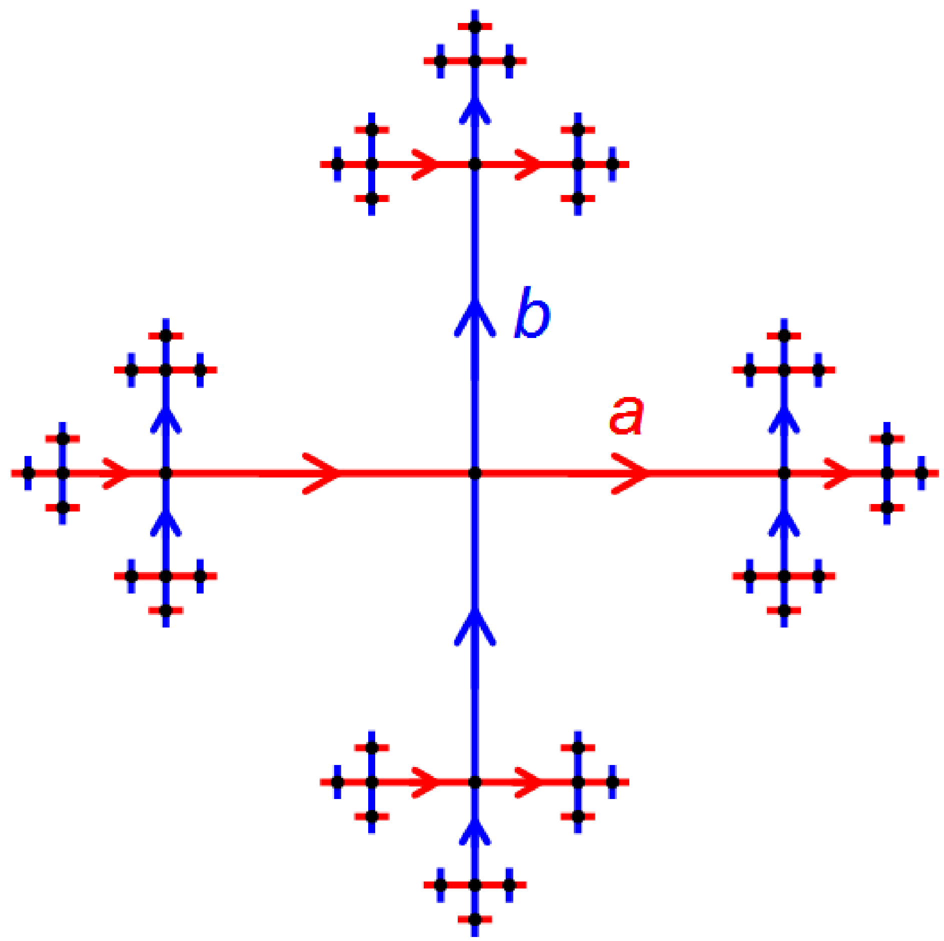
УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что $\mathbb{Z}^n$ **со стандартным набором образующих не гиперболична.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Свободное произведение** $(\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/n_2\mathbb{Z}) * ... * (\mathbb{Z}/n_k\mathbb{Z})$ есть фактор свободной группы от k образующих $x_1, ..., x_k$ по минимальной нормальной подгруппе, содержащей $x_1^{n_1}, x_2^{n_2}, ..., x_k^{n_k}$.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что $(\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/n_2\mathbb{Z}) * ... * (\mathbb{Z}/n_k\mathbb{Z})$ **всегда гиперболична.**

Граф Кэли для свободной группы

ПРИМЕР: Граф Кэли для свободной группы – регулярное дерево

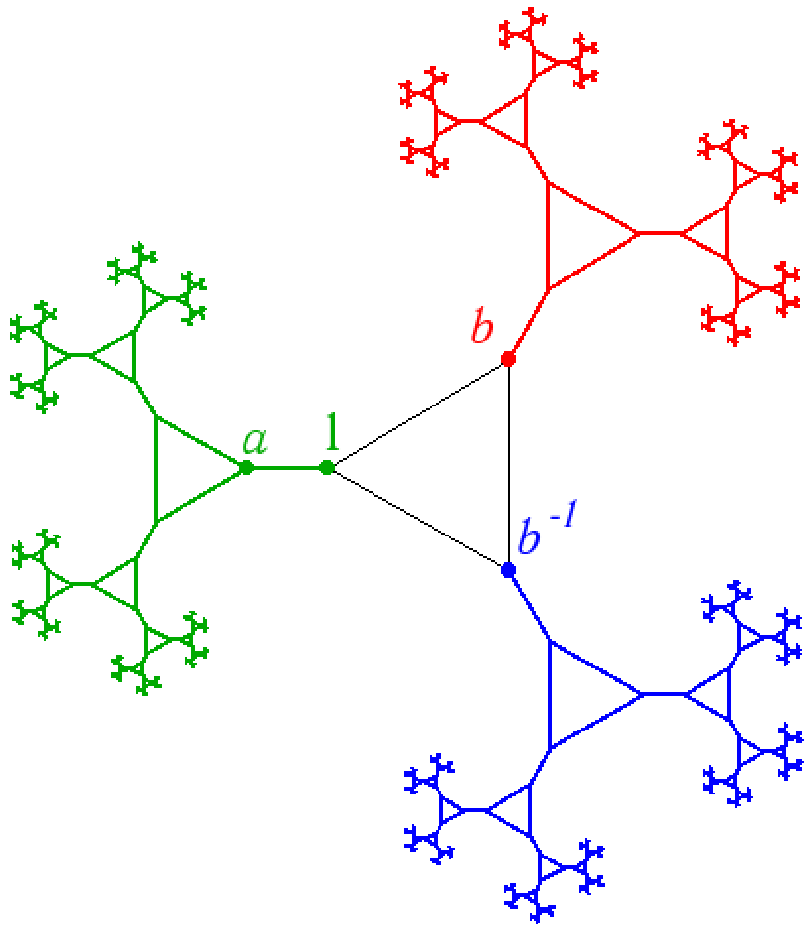


Граф Кэли свободной группы $\mathbb{F}_2$ с образующими a, b, a^{-1}, b^{-1}.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Этот граф Кэли **односвязен, значит, 0-гиперболичен.**

■

Граф Кэли для $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$



Граф Кэли для $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что этот граф Кэли **не односвязен, но все же гиперболичен.**

Громовское произведение

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть X – метрическое пространство с отмеченной точкой p. **Громовское произведение** $(a,b)_p$ есть $1/2(|ap|+|bp|-|ab|)$. Это число, которое измеряет отклонение неравенства треугольника от равенства.

Расстояние можно определить в терминах громовского произведения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (X,p) – множество с отмеченной точкой. Легко видеть, что расстояние на X можно определить в терминах громовского произведения $(a,b)_p$, потребовав выполнения недлинного списка аксиом. Говорится, что функция $(\cdot,\cdot)_p:\ X\times X\to\mathbb{R}^{\geqslant 0}$ **удовлетворяет аксиомам громовского произведения**, если выполнены следующие условия.

[**симметричность:**] $(a,b)_p=(b,a)_p$.
[**невырожденность:**] $(a,a)_p=(a,b)_p=(b,b)_p \ \Leftrightarrow a=b$.
[**неравенство треугольника**] $(a,b)_p+(b,c)_p\leqslant(a,c)_p+(b,b)_p$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть дана функция, удовлетворяющая аксиомам громовского произведения. **Тогда $d(a,b):=(a,a)_p+(b,b)_p-2(a,b)_p$ – это метрика на X.** В отсутствии условия невырожденности, эта формула задает полуметрику. ■

Громовское произведение и расстояние до кратчайшей

УТВЕРЖДЕНИЕ 1: Пусть треугольник $\triangle(abp)$ δ-тонкий. **Тогда** $d(p,[ab]) \geqslant (a,b)_p \geqslant d(p,[ab]) - 2\delta$.

Доказательство. Шаг 1: Пусть c – точка $[ab]$, ближайшая к p. В силу неравенства треугольника, $|ap|-|cp|+|bp|-|cp| \leqslant |ac|+|cb| = |ab|$. Это дает $|ap|+|bp|-|ab| \leqslant 2|cp|$, то есть $d(p,[ab]) \geqslant (a,b)_p$.

Шаг 2: Поскольку $\triangle(abp)$ δ-тонкий, существует точка c' на другой стороне $\triangle(abp)$, которая отстоит от c не больше чем на δ. Для определенности, предположим, что c' лежит на $[pa]$. Тогда $2(c,a)_p = |ap|+|cp|-|ac| \leqslant 2\delta+|ap|+|c'p|-|ac'| = 2\delta+2|c'p| \leqslant 4\delta+2|cp| = 4\delta+2d(p,[ab])$.

Шаг 3:

$$(a,b)_p = (a,c)_p + (b,c)_p - |pc| \geqslant (a,c)_p + \frac{1}{2}(|pb|-|pc|-|bc|) \geqslant (a,c)_p$$

(в силу неравенства треугольника). Применяя неравенство из предыдущего шага, получаем $(a,b)_p \geqslant d(p,[ab]) - 2\delta$. ∎

СЛЕДСТВИЕ: Если X,p 0-гиперболично, имеем $d(p,[ab]) = (a,b)_p$. ∎

0-гиперболические пространства

ТЕОРЕМА: Пусть X – 0-гиперболическое пространство с отмеченной точкой p. Рассмотрим объединение отрезков $[\bar{p}, \bar{x}]$ длины $|px|$, где $x \in X$ пробегает все точки X. Пространство X_{tr} получается из такого объединения склейкой $[\bar{p}, \bar{x}]$ с $[\bar{p}, \bar{y}]$ по отрезку, начинающемуся с $\bar{p}$, длины $d(p, [xy])$. **Тогда X_{tr} это дерево, и естественное отображение $\Psi : X \to X_{tr}$ – изометрия.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: То, что такой фактор есть дерево, ясно: **ретракция к p задается гомотетическим сжатием каждого отрезка к p.** Изометричность с X следует из того, что Ψ **сохраняет громовское произведение.** ■

СЛЕДСТВИЕ: **Любое 0-гиперболическое по Громову метрическое пространство со строго внутренней метрикой – дерево.** ■

Неравенство Громова

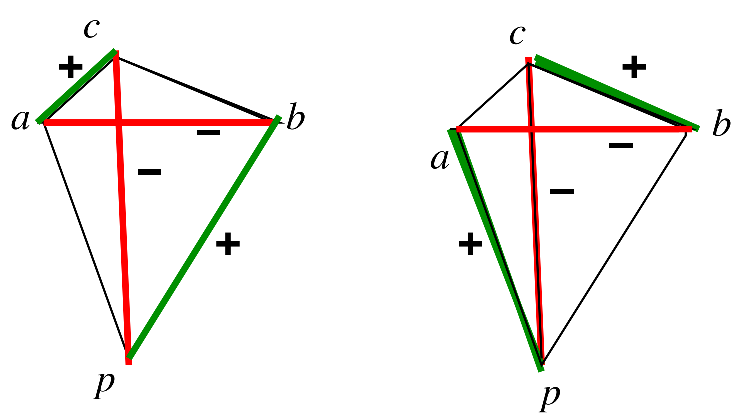
ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (X, p) – метрическое пространство с отмеченной точкой, а $a, b, c \in X$. **Неравенство Громова** есть неравенство на попарные громовские произведения:

$$(a, b)_p \geqslant \min\left[(a, c)_p, (b, c)_p\right] - \delta.$$

Когда нужно обозначить, о каком конкретно δ идет речь, говорится **δ-неравенство Громова.**

ЗАМЕЧАНИЕ 1: Неравенство Громова равносильно следующему условию:

$$\max(|bp| + |ac| - |cp| - |ab|, |ap| + |bc| - |cp| - |ab|) \geqslant -\delta.$$



Неравенство Громова: зависимость от выбора p

ТЕОРЕМА: Пусть в (X, p) выполнено δ-неравенство Громова. **Тогда для любой точки p', в (X, p') выполнено 2δ-неравенство Громова.**

Доказательство. Шаг 1: Суммированием неравенства Громова для троек (t, y, z) и (z, x, y) получаем

$$(t, y)_p + (z, x)_p - \min\left[(t, z)_p + (x, y)_p, 2(y, z)_p\right] \geqslant -2\delta$$

для $(t, , y)$ и (z, x, t)

$$(t, y)_p + (z, x)_p - \min\left[(t, z)_p + (x, y)_p, 2(x, t)_p\right] \geqslant -2\delta.$$

Шаг 2: Взяв полусумму этих неравенств, получаем

$$(t, y)_p + (z, x)_p - \min\left[(t, z)_p + (x, y)_p, (y, z)_p + (x, t)_p\right] \geqslant -2\delta.$$

Шаг 3: Последнее неравенство дает

$$-|ty| - |zx| + \max(|tz| + |zy|, |yz| + xt|) \geqslant -2\delta$$

Но это в точности $(t, y)_x - \min[(t, z)_x, (y, z)_x] \geqslant -2\delta$ (Замечание 1). ■

Неравенство Громова для $\delta = 0$

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть в метрическом пространстве (X, p) выполнено неравенство Громова для $\delta = 0$. **Тогда для любых $a, b, c \in X$, в тройке $(a, b)_p, (a, c)_p, (b, c)_p$ какие-то два числа равны, а третье $\geqslant$ первых двух.**

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть в метрическом пространстве (X, p) выполнено неравенство Громова для $\delta = 0$. **Тогда расстояние от p до отрезка кратчайшей $[a, b]$ равно $(a, b)_p$.**

Доказательство. Шаг 1: Кратчайшая, соединяющая a, p, единственна. Действительно, если их две, выберем b, c в середине обоих кратчайших, и получим $(a, b)_p = |bp| = (a, c)_p = |cp|$, а $(b, c)_p = |pc| - 1/2|bc|$, что противоречит первому замечанию.

Шаг 2: Выберем точку c на $[a, b]$. Неравенство Громова: $|pa| + |cb| \geqslant |pc| + |ab|$, либо $|pb| + |ac| \geqslant |pc| + |ab|$ (Замечание 1).

Неравенство Громова для $\delta = 0$ (продолжение)

Шаг 2: Выберем точку c на $[a,b]$. Неравенство Громова: $|pa| + |cb| \geqslant |pc| + |ab|$, либо $|pb| + |ac| \geqslant |pc| + |ab|$ (Замечание 1). Отмечу, что (X, p') тоже удовлетворяет 0-неравенству, для любого p'.

Шаг 3: Получаем $|pa| \geqslant |pc| + |ac|$ либо $|pb| \geqslant |pc| + |bc|$. Если это неравенство выполнено, оно является равенством, значит, c **лежит на отрезке** $[pa]$ **либо на отрезке** $[pb]$**.**

Шаг 4: Отмечу, что (X, p') тоже удовлетворяет 0-неравенству, для любого p', в силу доказанного выше. Получаем, что для любых трех точек a, b, p в X, и любой точки c на кратчайшей $[ab]$, c лежит на кратчайшей $[ap]$ либо на $[bp]$. **Значит, сторона** $[ab]$ **лежит в объединении** $[bp]$ **и** $[cp]$**, и** $\triangle(abc)$ **– дерево.** ■

Гиперболичность по Громову

ТЕОРЕМА: Пусть в X выполнено неравенство Громова для $\delta = 0$. Рассмотрим объединение отрезков $[\bar{p}, \bar{x}]$ длины $|px|$, где $x \in X$ пробегает все точки X, и склеим $[\bar{p}, \bar{x}]$ с $[\bar{p}, \bar{y}]$ по отрезку, начинающемуся с $\bar{p}$, длины $d(p, [xy])$. Обозначим результат склейки за X_{tr}. **Естественное отображение $\Psi : X \to X_{tr}$ – изометрия.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Это отображение сохраняет громовское произведение, потому что $(a, b)_p = d(p, [ab])$. ■

СЛЕДСТВИЕ: Каждое пространство с внутренней метрикой, в котором верно 0-неравенство Громова, изометрично дереву.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть X – метрическое пространство, не обязательно геодезическое. Пространство X **гиперболично по Громову**, если выполнено δ-неравенство Громова, для какого-то δ.

ТЕОРЕМА: Гиперболичность по Громову равносильна гиперболичности в смысле тонких треугольников.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: на следующей лекции.

ЗАМЕЧАНИЕ: Утверждение теоремы для $\delta = 0$ **уже доказано**.