

Гиперболические группы по Громову: квазиизометрии

Миша Вербицкий

23 ноября, 2012

НМУ

Квазиизометрии

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Отображение $f : X \rightarrow Y$ называется **билипшицевым с константой C** , или просто **билипшицевым**, если это биекция, причем f и f^{-1} C -липшицевы (то есть удовлетворяют $d(f(x), f(y)) \leq Cd(x, y)$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пространства X и Y **квазиизометричны**, если в X и в Y существуют ε -сети X_ε и Y_ε , между которыми есть билипшицево отображение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Отображение $f : X \rightarrow Y$ метрических пространств называется **квазиметрическим**, если для каких-то констант $C, \varepsilon > 0$, имеем $d(f(x), f(y)) \leq Cd(x, y) + \varepsilon$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Квазиметрическое отображение не обязательно непрерывно.

Квазиизометрии и квазиметрические отображения

ТЕОРЕМА: Пусть X, Y – метрические пространства. **Тогда следующие условия равносильны:**

(а) Существуют квазиметрические отображения $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow X$, и константа $A > 0$ такая, что $d(gf(x), x) < A$ и $d(fg(y), y) < A$ для любых $x \in X, y \in Y$.

(б) X и Y квазиизометричны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: (б) \Rightarrow (а): Пусть N_X, N_Y – ε -сети в X, Y , а $\varphi : N_X \rightarrow N_Y$ – билипшицево отображение. Выберем проекции $\Pi_X : X \rightarrow N_X$, $\Pi_Y : Y \rightarrow N_Y$, такие, что в каждую точку сети попадают элементы из ее ε -окрестности. **Тогда $f := \Pi_X \circ \varphi$ и $g := \Pi_Y \circ \varphi^{-1}$ – квазиизометрии, причем $gf = \Pi_X$, а $fg = \Pi_Y$.**

Доказательство (а) \Rightarrow (б) будет через слайд.

СЛЕДСТВИЕ: Квазиизометрия – отношение эквивалентности. ■

Квазиизометрии и ε -сети

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: ε -сеть N называется **δ -разделенной**, если для любых неравных $a, b \in N$, имеем $d(a, b) > \delta$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть N – ε -сеть в метрическом пространстве. Тогда **из N можно выбрать ε -разделенную 2ε -сеть.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: См. листочек 1. ■

ЛЕММА: Пусть $f : M \rightarrow M'$ – квазиметрическое отображение. Тогда существует $B > 0$ такое, что для каждой B -разделенной $2B$ -сети, отображение $f|_{N_X}$ липшицево.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Пусть $d(f(x), f(y)) \leq Cd(x, y) + \delta$. Тогда надо взять $B > \frac{1}{2}C\delta$, и $f|_{N_X}$ будет $2C$ -липшицево. ■

Квазиизометрии и ε -сети (продолжение)

ТЕОРЕМА: Пусть X, Y – метрические пространства. **Тогда следующие условия равносильны:**

- (а) Существуют квазиметрические отображения $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow X$, и константа $A > 0$ такая, что $d(gf(x), x) < A$ и $d(fg(y), y) < A$ для любых $x \in X, y \in Y$.
- (б) X и Y квазиизометричны.

Доказательство (а) \Rightarrow (б). Шаг 1: В силу предыдущей леммы, достаточно построить в X, Y такие B -сети N_X, N_Y , что $f(N_X) = N_Y$, для какого-то $B \gg 0$.

Шаг 2: Выберем в X B -разделенную $2B$ -сеть N_X , для $B > A$. Поскольку fg переводит каждую точку N_X в точку из ее A -окрестности, $f|_{N_X}$ биективно.

Шаг 3: Пусть $N_Y := f(N_X)$. Поскольку $g(N_Y)$ есть $A + B$ -сеть в X , для любой $y \in Y$ найдется $y_0 \in N_Y$ такой, что $d(g(y), g(y_0)) < A + B$, что дает $d(fg(y), fg(y_0)) \leq C(A + B) + \delta$. Из $d(y, fg(y)) \leq A$ следует, что $d(y, y_0) < C(A + B) + \delta + 2A$. **Мы доказали, что N_Y есть $C(A + B) + \delta + 2A$ -сеть.**

■

Метрика слов на группе

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Набор образующих конечно-порожденной группы G есть конечное множество элементов S , мультипликативно порождающих G . В дальнейшем, мы будем всегда предполагать, что $s \in S \Leftrightarrow s^{-1} \in S$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть G – группа, $\{s_i\}$ – набор образующих. **Граф Кэли** пары $(G, \{s_i\})$ есть граф, вершины которого – элементы G , а ребра соединяют точки вида g и gs_i . Положим длину ребер графа равной 1. Этот метрический граф называется **графом Кэли**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Метрика слов** на группе Γ с набором образующих S есть метрика d_S , индуцированная с графа Кэли.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть самое короткое разложение вида $\gamma = \prod_i s_i$ имеет длину i . Тогда $d_S(1, \gamma) = i$.

СЛЕДСТВИЕ: Пусть S, S' – наборы образующих, причем $\max_{s' \in S'} d_S(1, s') = C$. Тогда тождественное отображение $(\Gamma, d_S) \rightarrow (\Gamma, d_{S'})$ C -липшицево.

■

СЛЕДСТВИЕ: Для любой конечно-порожденной группы, все ее графы Кэли квазиизометричны. ■

Кратчайшие в метрическом пространстве (повторение)

Определение: Пусть $\gamma : [0, \alpha] \rightarrow M$ - кратчайшая, соединяющая x и y , причем

$$d(\gamma(x), \gamma(y)) = |x - y|.$$

Такая кратчайшая называется **кратчайшей геодезической**, а соответствующая параметризация - **геодезической параметризацией**.

ЗАМЕЧАНИЕ: Геодезическая кратчайшая – то же самое, что изометрическое вложение из отрезка в M .

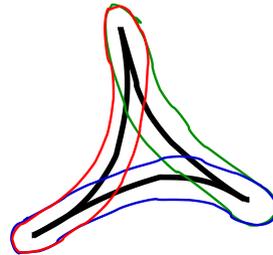
ТЕОРЕМА: Пусть M - локально компактное, полное пространство с внутренней метрикой, а $x_0, x_1 \in M$. **Тогда существует кратчайшая геодезическая, соединяющая x_0 и x_1 .** ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Кратчайшая, соединяющая две точки a, b метрического пространства, обозначается $[a, b]$, а ее длина обозначается $|ab| := d(a, b)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Метрика называется **строго внутренней**, если любые две точки соединяются кратчайшей. Пространство со строго внутренней метрикой называется **геодезическим**.

Тонкие треугольники (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Геодезический треугольник** $\Delta(abc)$ в метрическом пространстве есть треугольник, составленный из трех вершин a, b, c , соединенных кратчайшими, которые я буду обозначать за $[a, b]$, $[b, c]$ и $[c, a]$. **Талия** (*en: minsize, fr: taille minimale*) треугольника есть супремум расстояния от точки z , лежащей на одной из сторон, до объединения двух других. Треугольник называется **δ -тонким** (по Рипсу), если его талия не больше δ .



ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Метрическое пространство X со строго внутренней метрикой называется **δ -гиперболическим**, если все геодезические треугольники δ -тонкие. Будем говорить, что X **гиперболично**, если оно δ -гиперболично, для какой-то константы δ .

ЗАМЕЧАНИЕ: Когда говорят "**определение А гиперболичности эквивалентно определению Б**" это значит, что для какого-то числа $C > 0$ из δ -гиперболичности в смысле А следует $C\delta$ -гиперболичность в смысле Б, а из δ -гиперболичности в смысле Б следует $C\delta$ -гиперболичность в смысле А.

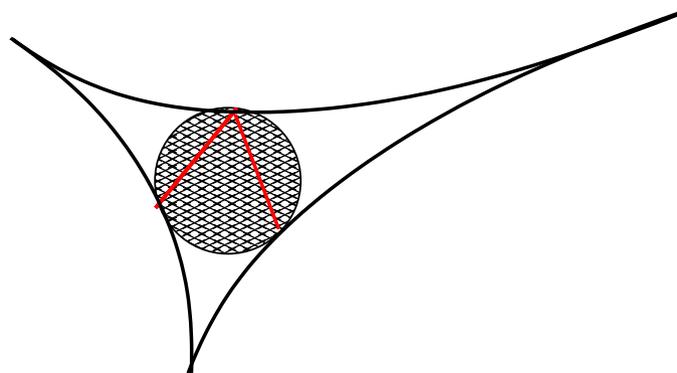
Свойства гиперболических пространств (повторение):

УТВЕРЖДЕНИЕ: Каждое 0-гиперболическое геодезическое пространство изометрично дереву (связному, односвязному графу).

ТЕОРЕМА: Пространство Лобачевского гиперболично.

Доказательство. Шаг 1: Поскольку любой геодезический треугольник лежит в плоскости, можно ограничиться плоскостью Лобачевского.

Шаг 2: Пусть $\Delta(abc)$ – геодезический треугольник на плоскости Лобачевского, а B – вписанная в него окружность. На каждой стороне треугольника (например, $[ab]$) максимум расстояния до объединения двух других сторон ограничен максимумом расстояния в точках касания вписанной окружности.



Из этого следует, что **талия треугольника удовлетворяет $T(abc) < 2R$** , где R – радиус вписанной окружности.

Гиперболичность пространства Лобачевского (повторение)

Шаг 2 (повтор): Талия треугольника удовлетворяет $T(abc) < 2R$, где R – радиус вписанной окружности.

Шаг 3: Площадь круга радиуса R растет с увеличением R неограниченно, потому что **площадь плоскости Лобачевского бесконечна** (ее можно замостить бесконечным количеством прямоугольных шестиугольников).

Шаг 4: Площадь n -угольника на плоскости Лобачевского равна $\pi(n - 2) - \sum \alpha_i$, где α_i – его углы. Значит, площадь треугольника $\leq \pi$. Поэтому, **радиус круга, вписанного в треугольник, ограничен.** ■

Гиперболические группы (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Группа с заданной системой образующих называется **гиперболической по Громову**, если ее граф Кэли δ -гиперболичесок, для какого-то δ .

На следующей лекции я докажу такую (весьма нетривиальную) теорему.

ТЕОРЕМА: Пусть M, M' – квазиизометричные геодезические пространства, причем M гиперболическое. **Тогда M' тоже гиперболическое.**

СЛЕДСТВИЕ: Гиперболическость группы не зависит от выбора образующих: **если конечно порожденная группа гиперболическа с одним набором образующих, она гиперболическа со любым другим набором.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Выше доказано, что **все графы Кэли данной группы квазиизометричны.** ■

Громовское произведение (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть X – метрическое пространство с отмеченной точкой p . **Громовское произведение** $(a, b)_p$ есть $1/2(|ap| + |bp| - |ab|)$. Это число, которое измеряет отклонение неравенства треугольника от равенства.

ЗАМЕЧАНИЕ: Расстояние можно определить в терминах громовского произведения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (X, p) – множество с отмеченной точкой. Легко видеть, что расстояние на X можно определить в терминах громовского произведения $(a, b)_p$, потребовав выполнения недлинного списка аксиом. Говорится, что функция $(\cdot, \cdot)_p : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ **удовлетворяет аксиомам громовского произведения**, если выполнены следующие условия.

[**симметричность:**] $(a, b)_p = (b, a)_p$.

[**невырожденность:**] $(a, a)_p = (a, b)_p = (b, b)_p \Leftrightarrow a = b$.

[**неравенство треугольника**] $(a, b)_p + (b, c)_p \leq (a, c)_p + (b, b)_p$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть треугольник $\Delta(abp)$ δ -тонкий. **Тогда**
 $d(p, [ab]) \geq (a, b)_p \geq d(p, [ab]) - 2\delta$.

Неравенство Громова (повторение)

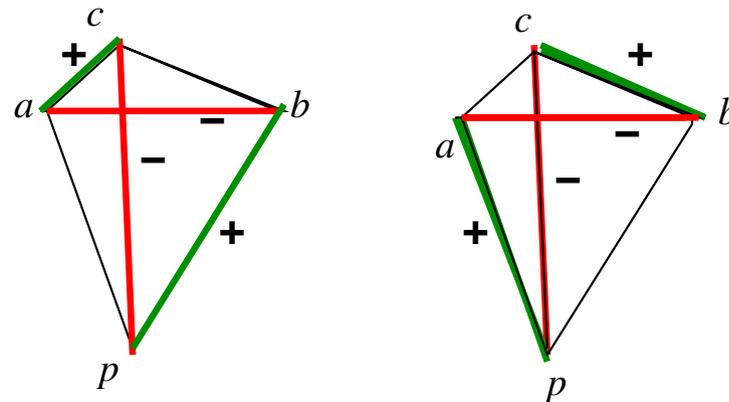
ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (X, p) – метрическое пространство с отмеченной точкой, а $a, b, c \in X$. **Неравенство Громова** есть неравенство на попарные громовские произведения:

$$(a, b)_p \geq \min [(a, c)_p, (b, c)_p] - \delta.$$

Когда нужно обозначить, о каком конкретно δ идет речь, говорится **δ -неравенство Громова**.

ЗАМЕЧАНИЕ: Неравенство Громова равносильно следующему условию:

$$\max(|bp| + |ac| - |cp| - |ab|, |ap| + |bc| - |cp| - |ab|) \geq -\delta.$$



Гиперболичность по Громову (повторение)

ТЕОРЕМА: Пусть в (X, p) выполнено δ -неравенство Громова. Тогда для любой точки p' , в (X, p') выполнено 2δ -неравенство Громова.

ТЕОРЕМА: Каждое пространство с внутренней метрикой, в котором верно 0-неравенство Громова, изометрично дереву.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть X – метрическое пространство, не обязательно геодезическое. Пространство X **гиперболично по Громову**, если выполнено δ -неравенство Громова, для какого-то δ .

ТЕОРЕМА: Гиперболичность по Громову равносильна гиперболичности в смысле тонких треугольников.

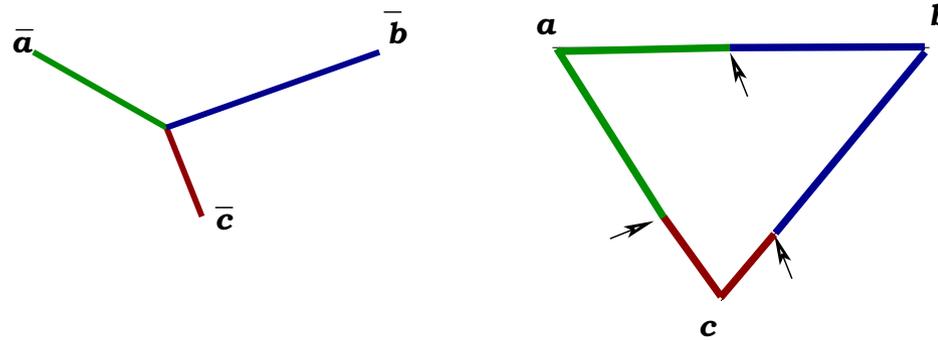
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: будет немного погодя.

ЗАМЕЧАНИЕ: Утверждение теоремы для $\delta = 0$ уже доказано.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть в метрическом пространстве (X, p) выполнено неравенство Громова для $\delta = 0$. Тогда для любых $a, b, c \in X$, в тройке $(a, b)_p, (a, c)_p, (b, c)_p$ какие-то два числа равны, а третье \geq первых двух.

Модельный гиперболический треугольник (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\Delta(abc)$ – геодезический треугольник. Определим **модельный 0-гиперболический треугольник**, или же **модельное дерево**, $\Delta(\bar{a}\bar{b}\bar{c})$ как дерево с тремя вершинами



и тремя ребрами, соединенными в четвертой вершине, **таким образом, что соответствующие расстояния равны:** $|ab| = |\bar{a}\bar{b}|$, $|ac| = |\bar{a}\bar{c}|$, $|bc| = |\bar{b}\bar{c}|$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть $\Delta(abc)$ – геодезический треугольник в метрическом пространстве, а $\Delta(\bar{a}\bar{b}\bar{c})$ – модельное дерево. **Тогда существует отображение $\Psi : \Delta(abc) \rightarrow \Delta(\bar{a}\bar{b}\bar{c})$, задающее изометрию на каждой стороне, и переводящее вершины в соответствующие им вершины.** ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Это отображение называется **отображением сравнения**.

Кодиаметр

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\varphi : X \rightarrow Y$ – отображение метрических пространств. **Кодиаметр** $\text{codiam } \varphi$ определяется формулой

$$\text{codiam}(\varphi) := \sup_{x,y \in X} |d(x, y) - d(\varphi(x), \varphi(y))|.$$

Он измеряет то, насколько φ отличается от изометрии.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть $\Psi : \Delta(abc) \rightarrow \Delta(\bar{a}\bar{b}\bar{c})$ – отображение в модельный треугольник, построенное выше. Тогда

- (а) **Если** $\text{codiam } \Psi \leq \delta$, **то** $\Delta(abc)$ δ -тонкий.
- (б) **Если** $\Delta(abc)$ δ -тонкий, **то** $\text{codiam } \Psi \leq 2\delta$.

Аппроксимационное дерево

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть (X, p) – метрическое пространство с отмеченной точкой. Для набора точек $S = \{x = x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1} = y\} \subset X$, обозначим за $L_S(x, y) := \min_i (x_i, x_{i+1})_p$. Определим функцию $(x, y)'_p := \sup_S L_S(x, y)$, где супремум берется по всем множествам $x_1, \dots, x_n \in X$. Пусть $d'(x, y) = d(x, p) + d(y, p) - 2(x, y)'_p$. **Тогда**

1. $d(x, y) \geq d'(x, y) \geq 0$
2. $(x, y)'_p$ удовлетворяет 0-неравенству Громова.
3. d' это полуметрика.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Утверждения 1-2 – тавтологии. Для 3, нужно проверить аксиомы громовского произведения: симметричность $(a, b)'_p = (b, a)'_p$ (очевидно) и неравенство треугольника

$$(a, b)'_p + (b, c)'_p \leq (a, c)'_p + (b, b)'_p. \quad (*)$$

Аппроксимационное дерево (продолжение)

Осталось проверить неравенство треугольника

$$(a, b)'_p + (b, c)'_p \leq (a, c)'_p + (b, b)'_p. \quad (*)$$

Шаг 1: Из 0-неравенства Громова для $(\cdot, \cdot)'_p$ следует $(a, b)'_p \leq (b, b)'_p$, $(c, b)'_p \leq (b, b)'_p$

Шаг 2: В тройке $(a, b)'_p, (a, c)'_p, (b, c)'_p$ какие-то два числа равны, а третье \geq первых двух. Если $(a, c)'_p$ больше, оба слагаемых справа в $(*)$ \geq слагаемых слева. Если (для примера) $(a, b)'_p$ больше, а $(a, c)'_p = (b, c)'_p$, воспользуемся $(a, b)'_p \leq (b, b)'_p$, и получим из шага 2

$$(a, c)'_p + (b, b)'_p \geq (a, c)'_p + (a, b)'_p \geq (a, b)'_p + (b, c)'_p.$$

■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Обозначим за X_{tr} метрическое пространство, полученное из построенной выше полуметрики (X, d') склеиванием точек x, y с $d'(x, y) = 0$. Оно называется **аппроксимационным деревом для X** .

УТВЕРЖДЕНИЕ: X_{tr} — дерево, а тавтологическое отображение $(X, d) \xrightarrow{\nu} X_{tr}$ 1-липшицево и удовлетворяет $|px| = d'(\nu(p), \nu(x))$. ■

Неравенство мультигромова

УТВЕРЖДЕНИЕ: Предположим, что в метрическом пространстве X выполнено следующее "неравенство мультигромова":

$(x, y)_p \geq \min_i((x_i, x_{i+1})_p) - \delta'$ Тогда отображение $(X, d) \xrightarrow{\nu} X_{tr}$ имеет кодiameter $\leq \frac{1}{2}\delta$. ■

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть (X, p) – конечное метрическое пространство, в котором $2^k + 2$ точки, и выполнено δ -неравенство Громова. Тогда в X выполнено неравенство мультигромова для $\delta' = k\delta$.

Доказательство. Шаг 1: Пусть в последовательности x_0, \dots, x_n не больше $2^k + 2$ точки. Разобьем эту последовательность на две последовательности a_i и b_i длины $\leq 2^{k-1} + 2$, причем в a_i входят точки от $x = x_0$ до $z = x_l$, а в b_i точки от $z = x_l$ до $y = x_n$. Воспользовавшись индукцией по k , можем считать, что $(x, z)_p \geq \min_i((a_i, a_{i+1})_p) - (k-1)\delta$ и $(z, y)_p \geq \min_i((b_i, b_{i+1})_p) - (k-1)\delta$.

Шаг 2: В силу неравенства Громова,

$$\begin{aligned} (x, y)_p &\geq \min((x, z)_p, (z, y)_p) - \delta \geq \\ &\geq \min(\min_i((a_i, a_{i+1})_p), \min_i((b_i, b_{i+1})_p) - k\delta) \geq \min_i((x_i, x_{i+1})_p) - k\delta. \end{aligned}$$

■

Неравенство Громова и тонкие треугольники

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть (X, p) – метрическое пространство со строго внутренней метрикой, в котором выполнено δ -неравенство Громова, а a', b' – точки на сторонах $[ca]$, $[cb]$ треугольника $\Delta(cab)$. Рассмотрим пространство Y из 5 точек (c, a, b, a', b') , и **пусть $\nu : Y \rightarrow Y_{tr}$ – отображение Y в его аппроксимационное дерево. Тогда $\text{codiam } \nu \leq 2\delta$.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: В силу предыдущей теоремы, в Y выполнено 2δ -неравенство мультигромова. **Теперь $\text{codiam } \nu \leq 2\delta$ следует из конструкции аппроксимационного дерева. ■**

ТЕОРЕМА: Пусть в X выполнено δ -неравенство Громова. Тогда X 6δ -гиперболично.

ЗАМЕЧАНИЕ: Я буду доказывать, что кодiameter отображения в модельный треугольник $\leq 6\delta$; из этого сразу следует, что все треугольники 6δ -тонкие.

Неравенство Громова и тонкие треугольники (продолжение)

Пусть a', b' – точки на сторонах $[ca]$, $[cb]$ треугольника $\Delta(cab)$, Y – пространство из 5 точек (c, a, b, a', b') , а $\nu : Y \rightarrow Y_{tr}$ – отображение Y в его аппроксимационное дерево

ТЕОРЕМА: Пусть в X выполнено δ -неравенство Громова. Тогда X 6δ -гиперболично.

Доказательство. Шаг 1: Пусть Y_{tr}^0 – минимальное связное под-дерево Y , содержащее $\nu(a), \nu(b), \nu(c)$. Тогда Y_{tr}^0 изометрично дереву с четырьмя вершинами (одной центральной и три по бокам), а Y_{tr} лежит в δ -окрестности Y_{tr}^0 .

Шаг 2: Рассмотрим отображение $Y_{tr} \xrightarrow{\mu} Y_{tr}^0$, полученное стягиванием всех лишних веточек в точку. Тогда кодiameter этого отображения $\leq \delta$.

Шаг 3: По построению, длины сторон Y_{tr}^0 отличаются от длин сторон модельного дерева не больше, чем на 2δ . Значит, $d(\tau(x), \tau(y)) - d(\mu(x), \mu(y)) \leq 4\delta$, где τ – отображение треугольника $\Delta(abc)$ в модельное дерево.

Шаг 4: Мы доказали, что $|d(a', b') - d(\mu(a'), \mu(b'))| \leq 2\delta$, а $|d(\tau(x), \tau(y)) - d(\mu(x), \mu(y))| \leq 4\delta$. Поэтому $\text{codiam } \tau \leq 6\delta$. ■

Неравенство Громова для гиперболических пространств

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть $\Delta(abc)$ – δ -тонкий треугольник, а p' – точка на стороне $[a, b]$, ближайшая к p . Предположим для определенности, что она лежит в δ -окрестности $[ac]$. **Тогда** $(a, b)_p \geq (b, c)_p - 3\delta$.

Доказательство. Шаг 1: Поскольку $d(p', [ac]) \leq \delta$, имеем $d(p, [a, b]) - d(p, [a, c]) \geq -\delta$.

Шаг 2: В прошлый раз доказали, что $(a, b)_p \leq d(p, [ab]) \leq (a, b)_p + 2\delta$. Поэтому из шага 1 следует, что $(a, b)_p - (b, c)_p \geq -3\delta$. ■

СЛЕДСТВИЕ: В любом δ -гиперболическом пространстве выполнено 3δ -неравенство Громова.

СЛЕДСТВИЕ: Гиперболичность по Громову эквивалентна гиперболичности, определенной через тонкие треугольники.