

Гиперболические группы по Громову: многогранник Рипса

Миша Вербицкий

6 декабря, 2012

НМУ

Квазиизометрии (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Отображение $f : X \rightarrow Y$ называется **билипшицевым с константой C** , или просто **билипшицевым**, если это биекция, причем f и f^{-1} C -липшицевы (то есть удовлетворяют $d(f(x), f(y)) \leq Cd(x, y)$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пространства X и Y **квазиизометричны**, если в X и в Y существуют ε -сети X_ε и Y_ε , между которыми есть билипшицево отображение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Отображение $f : X \rightarrow Y$ метрических пространств называется **квазиметрическим**, если для каких-то констант $C, \varepsilon > 0$, имеем $d(f(x), f(y)) \leq Cd(x, y) + \varepsilon$.

ТЕОРЕМА: Пусть X, Y – метрические пространства. **Тогда следующие условия равносильны:**

(а) Существуют квазиметрические отображения $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow X$, и константа $A > 0$ такая, что $d(gf(x), x) < A$ и $d(fg(y), y) < A$ для любых $x \in X, y \in Y$.

(б) X и Y квазиизометричны.

Кратчайшие в метрическом пространстве (повторение)

Определение: Пусть $\gamma : [0, \alpha] \rightarrow M$ - кратчайшая, причем

$$d(\gamma(x), \gamma(y)) = |x - y|$$

для любых x, y . Такая кратчайшая называется **кратчайшей геодезической**, а соответствующая параметризация - **геодезической параметризацией**.

ЗАМЕЧАНИЕ: Геодезическая кратчайшая – то же самое, что изометрическое вложение из отрезка в M .

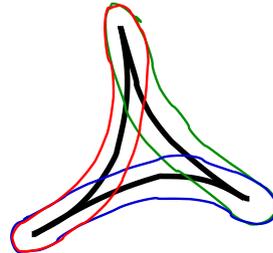
ТЕОРЕМА: Пусть M - локально компактное, полное пространство с внутренней метрикой, а $x_0, x_1 \in M$. **Тогда существует кратчайшая геодезическая, соединяющая x_0 и x_1 .** ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Кратчайшая, соединяющая две точки a, b метрического пространства, обозначается $[a, b]$, а ее длина обозначается $|ab| := d(a, b)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Метрика называется **строго внутренней**, если любые две точки соединяются кратчайшей. Пространство со строго внутренней метрикой называется **геодезическим**.

Тонкие треугольники (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Геодезический треугольник** $\Delta(abc)$ в метрическом пространстве есть треугольник, составленный из трех вершин a, b, c , соединенных кратчайшими, которые я буду обозначать за $[a, b]$, $[b, c]$ и $[c, a]$. **Талия** (*en: minsize, fr: taille minimale*) треугольника есть супремум расстояния от точки z , лежащей на одной из сторон, до объединения двух других. Треугольник называется **δ -тонким** (по Рипсу), если его талия не больше δ .



ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Метрическое пространство X со строго внутренней метрикой называется **δ -гиперболическим** (по Рипсу), если все геодезические треугольники δ -тонкие. Будем говорить, что X **гиперболично**, если оно δ -гиперболично, для какой-то константы δ .

УТВЕРЖДЕНИЕ: Каждое 0-гиперболическое геодезическое пространство изометрично дереву (связному, односвязному графу).

ТЕОРЕМА: Пространство Лобачевского гиперболично.

Неравенство Громова (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть X – метрическое пространство с отмеченной точкой p . **Громовское произведение** $(a, b)_p$ есть $1/2(|ap| + |bp| - |ab|)$. Это число, которое измеряет отклонение неравенства треугольника от равенства.

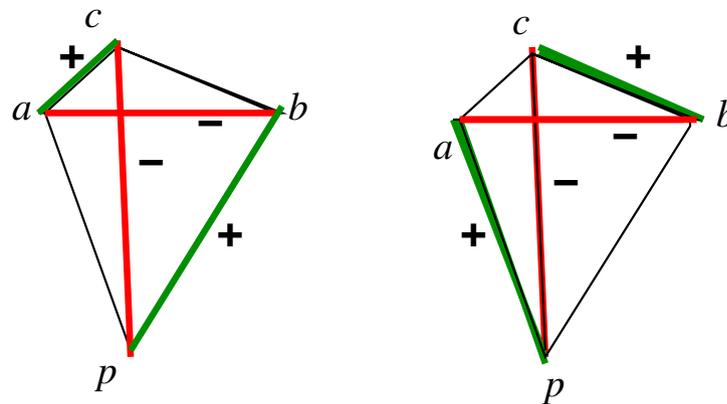
ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Неравенство Громова** есть неравенство на попарные громовские произведения:

$$(a, b)_p \geq \min [(a, c)_p, (b, c)_p] - \delta.$$

Когда нужно обозначить, о каком конкретно δ идет речь, говорится **δ -неравенство Громова**.

ЗАМЕЧАНИЕ: Неравенство Громова равносильно следующему условию:

$$\max(|bp| + |ac| - |cp| - |ab|, |ap| + |bc| - |cp| - |ab|) \geq -\delta.$$



Гиперболичность по Громову (повторение)

ТЕОРЕМА: Пусть в (X, p) выполнено δ -неравенство Громова. Тогда для любой точки p' , в (X, p') выполнено 2δ -неравенство Громова.

ТЕОРЕМА: Пусть в X выполнено δ -неравенство Громова. Тогда X 6δ -гиперболично.

СЛЕДСТВИЕ: В любом δ -гиперболическом пространстве выполнено 3δ -неравенство Громова.

СЛЕДСТВИЕ: Гиперболичность по Громову эквивалентна гиперболичности, определенной через тонкие треугольники

ЗАМЕЧАНИЕ: Когда говорят "определение А гиперболичности эквивалентно определению Б" это значит, что для какого-то числа $C > 0$ из δ -гиперболичности в смысле А следует $C\delta$ -гиперболичность в смысле Б, а из δ -гиперболичности в смысле Б следует $C\delta$ -гиперболичность в смысле А.

Квазигеодезические (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: C -квазигеодезическая в метрическом пространстве M есть спрямляемая кривая $\gamma : [0, a] \rightarrow M$, которое удовлетворяет $L(\gamma|_{[x,y]}) \leq Cd(x, y)$, где $L(\gamma|_{[x,y]})$ обозначает длину отрезка кривой.

ЗАМЕЧАНИЕ: Я буду по умолчанию считать, что **квазигеодезические параметризованы длиной кривой**, то есть $L(\gamma|_{[x,y]}) = |x - y|$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть γ – C -квазигеодезическая в геодезическом пространстве, а $R(\gamma)$ есть максимум расстояния от точек γ до любой из кратчайших $[a, b]$, соединяющих концы γ . **Лемма Морса** утверждает, что $R(\gamma)$ **ограничено константой, которая зависит только от M и C , для любой C -квазигеодезической в гиперболическом пространстве M .**

Лемма Морса была доказана на прошлой лекции.

ЗАМЕЧАНИЕ: Также было доказано, что **максимум расстояния от точек $[a, b]$ до γ также ограничен константой, которая зависит только от M и C .**

Полиэдр Рипса

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Прямоугольный сферический симплекс диаметра d есть пересечение C_d сферы радиуса $2\pi^{-1}d$ в \mathbb{R}^{n+1} и квадранта $x_1 \geq 0, \dots, x_{n+1} \geq 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M – метрическое пространство. **Многогранник Рипса** есть полиэдральное пространство $P_d(M)$, вершины которого – точки M , а n -симплексы натянуты на любые n различных точек, попарное расстояние между которыми $\leq d$. Введем на многограннике Рипса метрическую структуру таким образом, чтобы **все стороны были равны d , а все симплексы – изометричны прямоугольным сферическим симплексам диаметра d .**

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть M – геодезическое метрическое пространство, а $M \xrightarrow{\varphi} P_\delta(M)$ – естественное вложение. **Тогда $d(\varphi(x), \varphi(y)) = \delta[\delta^{-1}d(x, y)]$** , где $[a]$ обозначает минимальное целое число, которое $\geq a$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Используется следующее свойство прямоугольного симплекса: **расстояние от вершины симплекса до любой точки противоположной стороны равно d .** ■

\pm -квазиизометрии

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Отображение $f : X \rightarrow Y$ называется δ, \pm -квазиметрическим, если $d(f(x), f(y)) \leq d(x, y) + \delta$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: δ, \pm -квазиизометрия есть δ, \pm -квазиметрическое отображение $f : X \rightarrow Y$, такое, что δ -окрестность $f(X)$ есть Y . Пространства называются \pm -квазиизометричными, если между ними есть δ, \pm -квазиизометрия, для какого-то δ .

ЛЕММА: Естественное вложение $\varphi : M \rightarrow P_\delta(M)$ есть δ, \pm -квазиизометрия.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: В самом деле, $P_\delta(M)$ лежит в δ -окрестности $\varphi(M)$, а φ искажает расстояния меньше, чем на δ . ■

+-квазиизометрии и гиперболичность

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть $f : X \rightarrow Y$ ε , +-квазиизометрия. Тогда X δ -гиперболично $\Rightarrow Y$ $\delta + 8\varepsilon$ -гиперболично.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Неравенство Громова равносильно следующему условию:

$$\max(|bp| + |ac| - |cp| - |ab|, |ap| + |bc| - |cp| - |ab|) \geq -\delta.$$

Тогда для любых точек в $f(X)$, имеем $\max(|bp| + |ac| - |cp| - |ab|, |ap| + |bc| - |cp| - |ab|) \geq -\delta - 4\varepsilon$, а любые 4 точки в Y отстоят от каких-то точек в $f(X)$ не больше, чем на ε , что дает $\max(|bp| + |ac| - |cp| - |ab|, |ap| + |bc| - |cp| - |ab|) \geq -\delta - 8\varepsilon$. ■

+-квазиизометрии и квазиизометрии

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: ε -сеть N называется **δ -разделенной**, если для любых неравных $a, b \in N$, имеем $d(a, b) > \delta$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть N – ε -сеть в метрическом пространстве. Тогда **из N можно выбрать ε -разделенную 2ε -сеть.**

ТЕОРЕМА:

+-квазиизометричные пространства квазиизометричны.

Доказательство. Шаг 1: Пусть $f : X \rightarrow Y$ – δ , +-квазиизометрия. Обозначим за $Z(\varepsilon)$ ε -окрестность множества Z . **Поскольку образы точек, отстоящих на λ , отстоят на расстояние $\leq \lambda + \delta$, имеем $f(Z(\lambda)) \subset f(Z)(\lambda + \delta)$.**

Шаг 2: Выберем в X 4δ -разделенную 8δ -сеть N_X . Поскольку $N_X(8\delta) = X$, имеем $Y = f(X)(\delta) = f(N_X(8\delta))(\delta) \subset f(N_X)(9\delta)(\delta)$. **Значит, $f(N_X)$ есть 10δ -сеть.**

+-квазиизометрии и квазиизометрии (продолжение)

ТЕОРЕМА:

+-квазиизометричные пространства квазиизометричны.

Доказательство. Шаг 1: Пусть $f : X \rightarrow Y$ — δ , +-квазиизометрия. Обозначим за $Z(\varepsilon)$ ε -окрестность множества Z . **Поскольку образы точек, отстоящих на λ , отстоят на расстояние $\leq \lambda + \delta$, имеем $f(Z(\lambda)) \subset f(Z)(\lambda + \delta)$.**

Шаг 2: Выберем в X 4δ -разделенную 8δ -сеть N_X . Поскольку $N_X(8\delta) = X$, имеем $Y = f(X)(\delta) = f(N_X(8\delta))(\delta) \subset f(N_X)(9\delta)(\delta)$. **Значит, $f(N_X)$ есть 10δ -сеть.**

Шаг 3: Поскольку расстояние между точками $N_X \geq 4\delta$, а отображение f δ , +-квазиизометрическое, $f : N_X \rightarrow f(N_X)$ 2-билипшицево:

$$\begin{aligned} |d(f(z), f(z')) - 2\delta| &\leq d(z, z') \Rightarrow \\ \Rightarrow 2d(z, z') &\geq d(z, z') + 2\delta \geq d(f(z), f(z')) \geq d(z, z') - 2\delta \geq 1/2d(z, z') \end{aligned}$$

для всех $z, z' \in N_X$. **Мы построили 2-билипшицевы ε -сети в X, Y . ■**

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что +-квазиизометрия есть отношение эквивалентности.

Полиэдр Рипса и разложение квазиизометрий

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть N_X есть ε -сеть в геодезическом пространстве X, d . Определим расстояние $d_{2\varepsilon}$ на N_X по формуле $d_{2\varepsilon}(x, y) = \inf_S \sum d(x_i, x_{i+1})$, где инфимум берется по всем последовательностям

$$S = \{x_0 = x, x_1, \dots, x_n = y\} \subset N_X,$$

в которых $d(x_i, x_{i+1}) < 2\varepsilon$. **Тогда метрики d_ε и d на N_X билипшицевы.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Разобьем геодезическую, соединяющую x и $y \in N_X$, в $N = \lceil \varepsilon^{-1}d(x, y) \rceil$ отрезков $[z_i, z_{i+1}]$ длины $\leq \varepsilon$, и пусть x_i – точки N_X , лежащие на расстоянии $\leq \varepsilon$ от z_i . Тогда $d(x_i, x_{i+1}) \leq 3\varepsilon$, значит, $d(x, y) \leq d_{2\varepsilon}(x, y) \leq 3\varepsilon N \leq 4\varepsilon d(x, y)$. ■

СЛЕДСТВИЕ: Пусть X – геодезическое пространство, N_X – ε -сеть, а $P_{2\varepsilon}(N_X)$ – ее многогранник Рипса. **Тогда X и $P_{2\varepsilon}(N_X)$ +-квазиизометричны.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Метрика на вершинах $P_d(N_X)$ равна $d_{2\varepsilon}$, значит, N_X билипшицево множеству вершин $P_d(N_X)$. ■

СЛЕДСТВИЕ: Пусть X, Y – квазиизометрические геодезические пространства. **Тогда X, Y +-квазиизометричны геодезическим пространствам X', Y' , которые билипшицево эквивалентны.** ■

δ -гиперболичность и квазиизометрии

ТЕОРЕМА: Пусть X, Y – квазиизометрические геодезические пространства, причем X гиперболично. **Тогда Y тоже гиперболично.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Квазиизометрия из X в Y может быть разложена в композицию \dagger -квазиизометрий и билипшицева отображения между полиэдрами Рипса соответствующих ε -сетей.

Пространство, которое \dagger -квазиизометрично гиперболическому, тоже гиперболично, как доказано выше. Поэтому теорема вытекает из следующего

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть $X \xrightarrow{f} Y$ – C -билипшицево отображение геодезических пространств. **Тогда X гиперболично $\Leftrightarrow Y$ гиперболично.**

Доказательство. Шаг 1: Пусть X δ -гиперболическое (по Рипсу), T_1, T_2, T_3 – стороны геодезического треугольника, соединяющего точки $a, b, c \in X$, а S_1, S_2, S_3 – стороны аналогичного треугольника в Y , соединяющего $f(a), f(b), f(c)$. Тогда $f^{-1}(S_i)$ – C -геодезическая, значит, она лежит в R -окрестности T_i : $f^{-1}(S_i) \subset T_i(R)$, и наоборот, $T_i \subset f^{-1}(S_i)(R)$.

δ -гиперболичность и билипшицевы отображения

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть $X \xrightarrow{f} Y$ – C -билипшицево отображение геодезических пространств. **Тогда X гиперболично $\Leftrightarrow Y$ гиперболично.**

Доказательство. Шаг 1: Пусть X δ -гиперболическое (по Рипсу), T_1, T_2, T_3 – стороны геодезического треугольника, соединяющего точки $a, b, c \in X$, а S_1, S_2, S_3 – стороны аналогичного треугольника в Y , соединяющего $f(a), f(b), f(c)$. Тогда $f^{-1}(S_i)$ – C -геодезическая, значит, она лежит в R -окрестности T_i : $f^{-1}(S_i) \subset T_i(R)$, и наоборот, $T_i \subset f^{-1}(S_i)(R)$.

Шаг 2: В силу δ -гиперболичности X , $T_1 \subset T_2(\delta) \cup T_3(\delta)$. Это дает

$$\begin{aligned} f^{-1}(S_1) \subset T_1(R) \subset T_2(R + \delta) \cup T_3(R + \delta) \subset \\ \subset f^{-1}(S_2)(2R + \delta) \cup f^{-1}(S_3)(2R + \delta). \end{aligned}$$

Шаг 3: Применяя f , получаем из предыдущего шага $S_1 \subset S_2(2CR + C\delta) \cup S_3(2CR + C\delta)$, **значит, пространство Y $2CR + C\delta$ -гиперболично. ■**

Метрика слов на группе (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Набор образующих конечно-порожденной группы G есть конечное множество элементов S , мультипликативно порождающих G . **В дальнейшем, мы будем всегда предполагать, что $s \in S \Leftrightarrow s^{-1} \in S$.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть G – группа, $\{s_i\}$ – набор образующих. **Граф Кэли** пары $(G, \{s_i\})$ есть граф, вершины которого – элементы G , а ребра соединяют точки вида g и gs_i . Положим длину ребер графа равной 1. Этот метрический граф называется **графом Кэли**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Метрика слов** на группе Γ с набором образующих S есть метрика d_S , индуцированная с графа Кэли.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть самое короткое разложение вида $\gamma = \prod_i s_i$ имеет длину i . **Тогда $d_S(1, \gamma) = i$.**

СЛЕДСТВИЕ: Пусть S, S' – наборы образующих, причем $\max_{s' \in S'} d_S(1, s') = C$. **Тогда тождественное отображение $(\Gamma, d_S) \rightarrow (\Gamma, d_{S'})$ C -липшицево.**

■

СЛЕДСТВИЕ: **Для любой конечно-порожденной группы, все ее графы Кэли квазиизометричны.** ■

Гиперболические группы (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Группа (Γ, S) с заданной системой образующих называется **гиперболической по Громову**, если ее граф Кэли δ -гиперболический, для какого-то δ .

ЗАМЕЧАНИЕ: Универсальное накрытие свободной группы есть ее граф Кэли. **В силу односвязности универсального накрытия, это дерево.** Значит, **свободная группа 0-гиперболическа.**

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что \mathbb{Z}^n со стандартным набором образующих не гиперболическа.

ТЕОРЕМА: Если группа (Γ, S) с заданной системой образующих S гиперболическа, **она гиперболическа для любой другой системы образующих S' .**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Группа Γ с метрикой слов d_S квазиизометрична Γ с метрикой слов $d_{S'}$. Также, Γ \dagger -квазиизометрична своему графу Кэли. **Значит, графы Кэли для (Γ, S) и (Γ, S') квазиизометричны.** Поэтому гиперболическость одного графа равносильна гиперболическости другого. ■

Конечно-порожденные группы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Конечно-порожденная группа Γ называется **конечно представимой**, если Γ есть фактор свободной группы по нормальной подгруппе, натянутой на конечный набор соотношений.

УПРАЖНЕНИЕ: Постройте конечно-порожденную, но не конечно-представимую группу.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть Γ – конечно-порожденная группа с образующими x_1, \dots, x_n . Говорится, что **в Γ разрешима проблема слов**, если существует алгоритм, который в ответ на два слова, составленных из букв x_i , сообщает, равны ли соответствующие произведения x_i в Γ .

ЗАМЕЧАНИЕ: П. С. Новиков в 1955-м году построил группу, в которой не разрешима проблема слов.

Свойства гиперболических групп

Collins, Donald J. (1986), "A simple presentation of a group with unsolvable word problem", Illinois Journal of Mathematics 30 (2): 230-234,
 John Pedersen's "A Catalogue of Algebraic Systems" *An explicit example of a reasonable short presentation with insoluble word problem*

$$\langle \begin{array}{l} a, b, c, d, e, p, q, r, t, k \\ p^{10}a = ap, \\ p^{10}b = bp, \\ p^{10}c = cp, \\ p^{10}d = dp, \\ p^{10}e = ep, \\ aq^{10} = qa, \\ bq^{10} = qb, \\ cq^{10} = qc, \\ dq^{10} = qd, \\ eq^{10} = qe, \end{array} \mid \begin{array}{l} pacqr = rpcaq, \\ p^2adq^2r = rp^2daq^2, \\ p^3bcq^3r = rp^3cbq^3, \\ p^4bdq^4r = rp^4dbq^4, \\ p^5ceq^5r = rp^5ecaq^5, \\ p^6deq^6r = rp^6edbq^6, \\ p^7cdcq^7r = rp^7cdceq^7, \\ p^8ca^3q^8r = rp^8a^3q^8, \\ p^9da^3q^9r = rp^9a^3q^9, \\ a^{-3}ta^3k = ka^{-3}ta^3 \end{array} \rangle \begin{array}{l} ra = ar, \\ rb = br, \\ rc = cr, \\ rd = dr, \\ re = er, \\ pt = tp, \\ qt = tq, \end{array}$$

ТЕОРЕМА: Любая конечно-порожденная гиперболическая группа Γ конечно-представима. Более того, в Γ разрешима проблема слов.

Доказательство дальше.

Конечные полиэдральные пространства с орбиособенностями

ТЕОРЕМА: Пусть S – стягиваемый метрический полиэдр (с гиперболической, сферической, или плоской метрикой на симплексах), а Γ – группа, собственнно действующая на S полиэдральными изометриями с конечными стабилизаторами (и свободно в общей точке). Предположим, что $X := S/\Gamma$ компактно. **Тогда Γ конечно порождена и конечно представима.**

Доказательство. Шаг 1: Обозначим за $D \subset S$ фундаментальный полиэдр действия Γ , и пусть $\cup_{\gamma \in \Gamma} D_\gamma$ соответствующее полиэдральное разбиение S , $D_\gamma = \gamma(D)$. Каждая стягиваемая петля ξ в S **разлагается в произведение стягиваемых петель $\xi = \xi_1 \xi_2 \xi_3 \dots \xi_n$, где каждый из ξ_i лежит в каком-то из D_γ , и там же стягивается.**

Шаг 2: За образующие Γ можно взять симплициальные пути в X , которые лежат в D , а за соотношения – симплициальные 2-цепи, лежащие в D , со связной границей, и поднимающиеся в X . **Их конечное число. ■**

Полиэдр Рипса стягиваем

ТЕОРЕМА: Пусть X – δ -гиперболическое (в смысле неравенства Громова) геодезическое пространство. **Тогда его полиэдр Рипса $P_d(X)$ стягиваем, для любого $d \geq 4\delta$.**

Доказательство. Шаг 1: Достаточно доказать, что каждый конечный подполиэдр $D \subset P_d(X)$ можно стянуть в точку в $P_d(X)$.

Шаг 2: Любой полиэдр $D \subset P_d(X)$ с вершинами, лежащими в области $U \subset X$ диаметра $\leq d$ стягиваем, ибо **в $P_d(X)$ присутствует симплекс, натянутый на любой набор точек из $P_d(U)$.**

Шаг 3: Пусть $p \in X$ – фиксированная точка, $D \subset P_d(X)$ конечный подполиэдр, а y_0 – вершина D , такая, что $d(p, y_0) \geq d(p, z)$ для любой другой вершины D . Возьмем точку y_1 на кратчайшей $[p, y_0]$, отстоящую от y_0 на $\frac{1}{2}d$. **Достаточно доказать, что D можно прогомоторировать в D_1 , у которого все вершины кроме y_0 такие же, а y_0 заменяется на y_1 .**

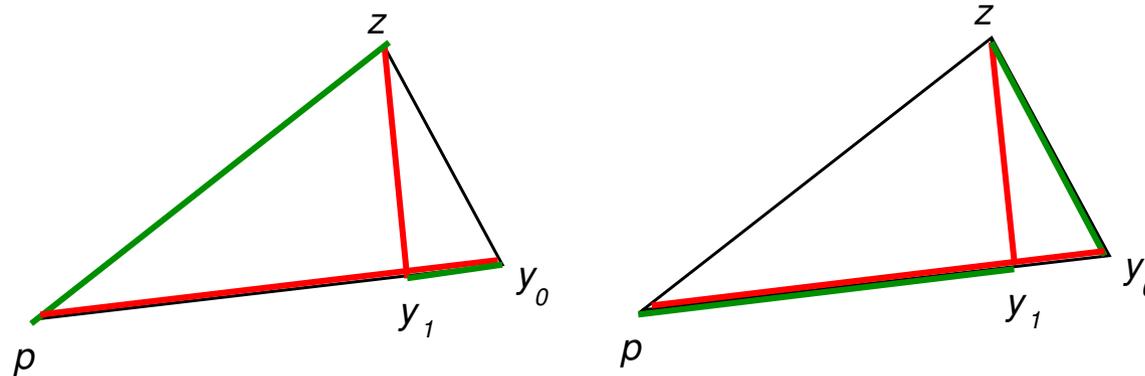
Шаг 4: Вершины z, y_0 можно соединить 1-симплексом в $P_d(X)$, если $d(z, y_0) \leq d$. Значит, **D_1 существует \Leftrightarrow для каждой $z \in X$, $d(y_1, z) \leq \min(d, d(y_0, z))$.**

Полиэдр Рипса стягиваем (продолжение)

Мы свели стягиваемость D к следующей лемме.

ЛЕММА: Пусть p, y_0, z , $d(p, y_0) \geq d(p, z)$ – точки геодезического пространства, которое δ -гиперболично, $d \geq 2\delta$, а y_1 – точка на кратчайшей $[p, y_0]$, отстоящая от y_0 на $\frac{1}{2}d$. Тогда $d(y_1, z) \leq \min(d, d(y_0, z))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Применим неравенство Громова для четверки точек p, y_0, z, y_1 .



либо $\delta - |zy_1| - |py_0| + |y_1y_0| + |pz| \geq 0$,

либо $\delta - |zy_1| - |py_0| + |zy_0| + |py_1| \geq 0$

это дает: $\delta + |zp| - |py_1| - |zy_1| \geq 0$, либо $\delta + |zy_0| - |zy_1| - |y_0y_1| \geq 0$.

В первом случае с учетом $|py_0| = |py_1| + \frac{1}{2}d \geq |pz|$ получаем $|zy_1| \leq \delta + \frac{1}{2}d \leq d$.
Во втором случае $|zy_0| \leq |zy_1| - \delta + \frac{1}{2}d = |zy_1|$. ■

Конечная порожденность гиперболических групп

Этот же аргумент доказывает следующую теорему.

ТЕОРЕМА: Пусть X – дискретное δ -гиперболическое пространство, $\delta \in \mathbb{Z}$, $d \geq 2\delta$, а $P_d(X)$ – его многогранник Рипса. **Предположим, что X есть множество вершин метрического графа со сторонами 1. Тогда $P_d(X)$ стягиваемый. ■**

ЛЕММА: Рассмотрим конечно-порожденную группу Γ как метрическое пространство с метрикой слов. **Тогда Γ действует с конечными стабилизаторами на многограннике $P_d(\Gamma)$.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Стабилизатор точки $z \in I$ в k -мерном симплексе I переставляет вершины этого симплекса, а любой элемент $\gamma \in \Gamma$, сохраняющий какую-то из вершин, равен 1. Значит, для каждого $s \in St(z)$, $s^N = \text{Id}$, причем $N \leq r(k+1)$, где N есть максимальный порядок в симметрической группе S_{k+1} . ■

ЗАМЕЧАНИЕ: Применяя этот результат к графу Кэли, получаем, что гиперболическая группа Γ действует с конечными стабилизаторами на стягиваемом многограннике $P_d(\Gamma)$, причем $P_d(\Gamma)/\Gamma$ компактно.

Применения стягиваемости полиэдра Рипса

СЛЕДСТВИЕ: Любая конечно-порожденная гиперболическая группа Γ конечно представима. ■

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что рациональные когомологии Γ конечномерны.

ТЕОРЕМА: Пусть Γ – конечно-порожденная гиперболическая группа. Тогда число классов сопряженности элементов конечного порядка в Γ конечно.

Набросок доказательства: Каждый такой элемент γ сохраняет точку $P_d(\Gamma)$, сопряженные элементы соответствуют одинаковым точкам в $P_d(\Gamma)/\Gamma$. Это задает биекцию между элементами конечного порядка и компонентами особого множества в $P_d(\Gamma)/\Gamma$, но $P_d(\Gamma)/\Gamma$ – конечный полиэдр, а компоненты особого множества суть подполиэдры в барицентрическом разбиении полиэдра $P_d(\Gamma)/\Gamma$, значит, их конечное число. ■

Треугольные копредставления

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть Γ – конечно-порожденная, конечно-представимая группа. Тогда существует такой набор образующих $\{x_i\}$, что соотношения в Γ "порождены треугольниками", то есть Γ **есть фактор свободной группы по нормальной подгруппе, натянутой на соотношения вида** $w_{abc} := x_a x_b x_c = 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Такой набор образующих называется **треугольным копредставлением**.

ЗАМЕЧАНИЕ: Петли в графе Кэли группы Γ суть соотношения вида $x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_N} = 1$. Если каждое соотношение в Γ есть произведение соотношений вида $g w_{abc} g^{-1}$, **каждая петля может быть разрезана на треугольники со сторонами 1,1,1**. Это геометрическая интерпретация понятия треугольного копредставления.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть Γ – группа, снабженная треугольным копредставлением. **Площадь** петли γ в графе Кэли есть минимальное число треугольников со сторонами 1,1,1, на которые можно разрезать γ .

Разрешимость проблемы слов

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть Γ – группа, снабженная треугольным копредставлением $\Gamma = Fr(x_1, \dots, x_d) / \langle w_{a_1 b_1 c_1}, \dots, w_{a_d b_d c_d} \rangle$, а $\Psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ вычислимая функция такая, что любая петля длины N имеет площадь $\leq \Psi(N)$. **Тогда в Γ разрешима проблема слов.**

Доказательство. Шаг 1: Пусть петля $x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n}$, разрезана на треугольники $w_{a_1 b_1 c_1}, w_{a_2 b_2 c_2}, \dots$, причем треугольник $w_{a_{i+1} b_{i+1} c_{i+1}}$ приделывается к вершине $\psi(i) \in \Gamma$ треугольника за номером i . Тогда $\psi_i \psi_{i-1}^{-1}$ соответствует ломаной, соединяющей отмеченные вершины соседних треугольников, значит, $\psi_i \psi_{i-1}^{-1}$ представляется словом h_i длины ≤ 2 . Пусть теперь $L_k := \prod_{i=1}^k h_k$ – ломаная, соединяющая 1 и вершину ψ_k , и идущая через вершины $\psi_1, \dots, \psi_{k-1}$. Воспользовавшись индукцией, обозначим за g_k петлю вида $g_{k-1} L_k w_{a_k b_k c_k} L_k^{-1}$. **Это петля в графе Кэли, ограниченная треугольниками с 1-го до k -й.**

Шаг 2: Обход петли $x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n}$ можно получить из обхода маленьких треугольников. **Поэтому в свободной группе $Fr(x_1, \dots, x_d)$ имеет место соотношение $x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n} = g_N$.**

Разрешимость проблемы слов (окончание)

Доказательство. Шаг 1: Пусть петля $x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_n}$, разрезана на треугольники $w_{a_1b_1c_1}, w_{a_2b_2c_2}, \dots$, причем треугольник $w_{a_{i+1}b_{i+1}c_{i+1}}$ приделывается к вершине $\psi(i) \in \Gamma$ треугольника за номером i . Тогда $\psi_i\psi_{i-1}^{-1}$ соответствует ломаной, соединяющей отмеченные вершины соседних треугольников, значит, $\psi_i\psi_{i-1}^{-1}$ представляется словом h_i длины ≤ 2 . Пусть теперь $L_k := \prod_{i=1}^k h_k$ – ломаная, соединяющая 1 и вершину ψ_k , и идущая через вершины $\psi_1, \dots, \psi_{k-1}$. Воспользовавшись индукцией, обозначим за g_k петлю вида $g_{k-1}L_k w_{a_k b_k c_k} L_k^{-1}$. **Это петля в графе Кэли, ограниченная треугольниками с 1-го до k -й.**

Шаг 2: Обход петли $x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_N}$ можно получить из обхода маленьких треугольников. **Поэтому в свободной группе $Fr(x_1, \dots, x_d)$ имеет место соотношение $x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_n} = g_N$.**

Шаг 3: Пусть $x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_n} = 1$ – соотношение в группе, которое надо проверить. Напишем все последовательности вида $g_1 = L_1 w_{a_1 b_1 c_1} L_1^{-1}$, $g_2 = g_1 L_2 w_{a_2 b_2 c_2} L_2^{-1}$, \dots , $g_N = g_{N-1} L_N w_{a_N b_N c_N} L_N^{-1}$. Число таких последовательностей конечно, ибо на каждом шаге мы делаем конечное число выборов: выбираем треугольник $w_{a_i b_i c_i}$ и слово $h_i = \psi_i \psi_{i-1}^{-1}$ длины ≤ 2 . **Поэтому нам нужно перебрать не больше $(2d + d')^{\Psi(N)}$ вариантов.**

■

Разрешимость проблемы слов в гиперболических группах

ТЕОРЕМА: Пусть Γ – конечно-порожденная гиперболическая группа. Тогда в Γ разрешима проблема слов.

Доказательство. Шаг 1: Выберем у Γ треугольное копредставление. Предположим, что граф Кэли Γ δ -гиперболичесен (по Рипсу). **Достаточно доказать, что площадь кусочно-геодезической ломаной в графе Кэли с N звеньями и периметром P ограничена $\text{const} \cdot NP + \text{const}'N$.** Тогда площадь петли с d звеньями ограничена $\text{const} \cdot d^2$, и разрешимость проблемы слов следует.

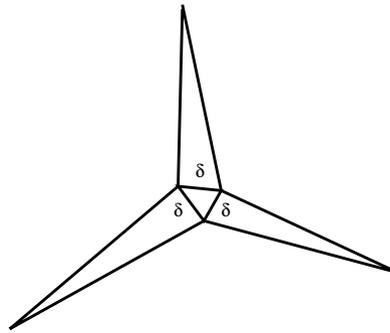
Шаг 2: Пусть C – максимальная площадь треугольника, все стороны которого $\leq \delta$ (число таких треугольников конечно).

Шаг 3: Пусть треугольник Δ в графе Кэли Γ с периметром P весь лежит в δ -окрестности одной стороны (такой треугольник называется δ -вырожденным). Тогда его площадь ограничена $C \lceil \delta^{-1}P \rceil$. В самом деле, Δ можно разрезать на $\lceil \delta^{-1}P \rceil$ треугольников со стороной $\leq \delta$.

Разрешимость проблемы слов (продолжение)

Достаточно доказать, что площадь $\text{Area}(\gamma)$ кусочно-геодезической ломаной γ в графе Кэли с N звеньями и периметром $\text{Per}(\gamma)$ ограничена $\text{const} \cdot N \text{Per}(\gamma) + \text{const}'N$.

Шаг 4: В силу δ -гиперболичности, каждый треугольник можно разрезать на три δ -вырожденных треугольника, и еще один со сторонами $\leq \delta$.



Значит, площадь треугольника $\leq C[\delta^{-1}P] + C \leq C\delta^{-1}P + 2C$, где P – его периметр.

Шаг 5: Пусть γ – кусочно-геодезическая ломаная в графе Кэли с N звеньями и периметром P , а γ' – ломаная с $\lceil \frac{N}{2} \rceil$ звеньями, полученная из γ удалением четных вершин, с заменой прилежащих звеньев на отрезок. Тогда

$$\text{Area}(\gamma) - \text{Area}(\gamma') \leq C[\delta^{-1}[\text{Per}(\gamma) - \text{Per}(\gamma')]] + 2C[\delta^{-1} \text{Per}(\gamma')] \leq 2C \left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil + C\delta^{-1} \text{Per}(\gamma)$$

значит $\text{Area}(\gamma) \leq 2C\delta^{-1}N \text{Per}(\gamma) + 2CN$. ■