Вариации структур Ходжа, экзамен

Для сдачи экзамена надо решить 1/3 задач из каждого раздела (по сумме баллов), записать, продемонстрировать записки решений, и затем сдать устно, пользуясь вашими записками.

2.1. Симметрические пространства и представления

Задача 2.1 (1 балл). Пусть V – тавтологическое представление $GL(n, \mathbb{C})$. Докажите, что $\Lambda^p V$ неприводимо для каждого p.

Определение 2.1. Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – открытое подмножество. **Цилиндрическая область** (tube domain) есть подмножество в $\mathbb{C}^n$, заданное как $D \times \sqrt{-1}\mathbb{R}^n$.

Определение 2.2. Голоморфная оболочка подмножества $U \subset \mathbb{C}^n$ есть множество всех точек $z \in \mathbb{C}^n$ таких, что любая голоморфная функция на U имеет аналитическое продолжение в z.

Задача 2.2 (1 балл). Докажите, что голоморфная оболочка цилиндрической области есть ее выпуклая оболочка.

Задача 2.3 (4 балла). Пусть $M = U(p,q)/U(p) \times U(q)$. Докажите, что на M существует ровно одна $U(p,q)$-инвариантная комплексная структура. Докажите, что M биголоморфна цилиндрической области.

2.2. Пространство периодов

Определение 2.3. Поляризованная вещественная структура Ходжа ($\mathbb{R}$-HS) веса d на векторном пространстве $V_{\mathbb{R}}$ есть градуировка $V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=d} V^{p,q}$ и вещественнозначная билинейная форма h на V, удовлетворяющая следующим условиям.

Вещественная структура: Комплексное сопряжение на $V_{\mathbb{C}} := V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ переставляет $V^{p,q}$ и $V^{q,p}$.

Поляризация совместима с градуировкой: для любых $x \in V^{p,q}, y \in V^{q',p'}$, если $h(x,y) \neq 0$, то $p = p'$ и $q = q'$.

Знакоопределенность поляризации: $-\sqrt{-1}^{p-q} h(x, \bar{x}) > 0$, для каждого $x \in V^{p,q}$.

Определение 2.4. Пространство периодов $\mathbb{P}\mathsf{er}$ структур Ходжа на (V, h) есть пространство всех градуировок $V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=d} V^{p,q}$, удовлетворяющих определению структуры Ходжа. На $\mathbb{P}\mathsf{er}$ определена естественная топология, как на подмножества пространства частичных флагов.

Определение 2.5. Обозначим группу изометрий V за G; это будет $SO(V, h)$ или $Sp(V, h)$ в зависимости от четности.

Задача 2.4 (2 балла). Докажите, что действие G на каждой компоненте $\mathbb{P}\mathsf{er}$ транзитивно.

Задача 2.5 (2 балла). Постройте на $\mathbb{P}\mathsf{er}$ G-инвариантную комплексную структуру. Докажите интегрируемость ее.

Задача 2.6 (2 балла). Докажите, что на $\mathbb{P}\mathsf{er}$ существует G-инвариантная риманова метрика, или найдите контрпример.

Задача 2.7 (2 балла). Докажите, что на $\mathbb{P}\mathsf{er}$ существует G-инвариантная псевдокэлерова метрика, или найдите контрпример.

Определение 2.6. Группа Мамфорда-Тэйта есть наименьшая рациональная подгруппа в G, алгебра Ли которой содержит оператор Вейля W, действующий на $V^{p,q}$ как $\sqrt{-1}(p - q)$.

Задача 2.8 (4 балла). Докажите, что группа Мамфорда-Тэйта любой поляризованной структуры Ходжа редуктивна.

2.3. Горизонтальное подрасслоение

Задача 2.9 (1 балл). Пусть $(V_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p+q=d} V^{p,q}, h)$ есть $\mathbb{R}$-HS веса d, а $\mathfrak{g} := \mathfrak{so}(V, h) \otimes_{\mathbb{R}} C$ соответствующая алгебра Ли. Докажите, что $\mathfrak{g} = \bigoplus \mathfrak{g}^{r,-r}$, где $\mathfrak{g}^{r,-r}$ отображает $V^{p,q}$ в $V^{p+r,q-r}$.

Задача 2.10 (1 балл). Рассмотрим $\mathfrak{g}^{r,-r}$ как представление алгебры $\mathfrak{g}^{0,0}$ с присоединенным действием. Докажите, что оно неприводимо, или найдите контрпример.

Определение 2.7. Пусть $\nu \in \mathbb{P}\mathsf{er}$ есть структура Ходжа. Заметим, что $T_\nu \mathbb{P}\mathsf{er} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \bigoplus_{r \neq 0} \mathfrak{g}^{r,-r}$. **Горизонтальное расслоение** есть подрасслоение $T_\nu \mathbb{P}\mathsf{er}$, порожденное $g^{1,-1} \oplus \mathfrak{g}^{-1,1}$. Поскольку $g^{1,-1} \oplus \mathfrak{g}^{-1,1}$ сохраняется антикомплексной инволюцией, можно считать горизонтальное расслоение вещественным, $T_{\mathsf{hor}} \mathbb{P}\mathsf{er} \subset T \mathbb{P}\mathsf{er}$.

Задача 2.11 (1 балл). Пусть V это $\mathbb{R}$-HS веса 2, $V_{\mathbb{C}} = V^{2,0} \oplus V^{1,1} \oplus V^{0,2}$. Она называется "типа K3", если $V^{2,0}$ одномерно. Докажите, что для такой $\mathbb{R}$-HS, $T_{\mathsf{hor}} \mathbb{P}\mathsf{er} = T \mathbb{P}\mathsf{er}$.

Задача 2.12 (5 баллов). Пусть V это $\mathbb{R}$-HS веса 3, $V_{\mathbb{C}} = V^{3,0} \oplus V^{2,1} \oplus V^{1,2} \oplus V^{0,3}$. Она называется "типа трехмерного Калаби-Яу", если $V^{3,0}$ одномерно. Рассмотрим компактное комплексное подмногообразие $Z \subset$

$\mathbb{P}\mathsf{er}$, с $TZ \subset T_{\mathsf{hor}}\,\mathbb{P}\mathsf{er}$. Предположим, что соответствующая вариация структур Ходжа неприводима. Докажите, что $\dim Z \leqslant \dim V^{2,1}$, или найдите контрпример.

Задача 2.13 (2 балла). Пусть $G_{ev} \subset G$ есть группа Ли, опреленная алгеброй Ли $\mathfrak{g}_{ev} := \bigoplus_r \mathfrak{g}^{2r,-2r}$. Докажите, что G_{ev} компактна, или найдите контрпример.

2.4. Голоморфная секционная кривизна

Замечание 2.1. Группы Ли в этом разделе предполагаются вещественными и связными.

Задача 2.14 (2 балла). Пусть G – полупростая группа Ли, а $:= G/H$ однородное многообразие. Постройте на M G-инвариантную псевдориманову метрику g. Докажите, что для некоторых пар $G \supset H$, метрика g не может быть выбрана положительно определенной.

Задача 2.15. Пусть g – би-инвариантная псевдо-риманова метрика на простой группе Ли, а $\operatorname{Ric} := \mathsf{Tr}_{jl} R^l_{ijk}$ ее кривизна Риччи.

а. (1 балл) Докажите, что Ric пропорциональна g.

б. (2 балла) Докажите, что Ric всегда ненулевая.

Определение 2.8. Пусть M – кэлерово многообразие, ∇ связность Леви-Чивита, $\Theta \in \Lambda^{1,1}(M) \otimes \operatorname{End}(TM)$ ее кривизна, которую мы рассматриваем как сечение $\mathsf{Sym}^2 \Lambda^{1,1}(M)$. **Голоморфная бисекционная кривизна** есть $B(x,y) := -\frac{\Theta(x,\bar{x},y,\bar{y})}{|x|^2|y|^2}$, где $x, y \in T^{1,0}(M)$. **Голоморфная секционная кривизна** есть $H(x) := B(x,x)$.

Задача 2.16 (1 балл). В этих предположениях, докажите, что $\Theta(x,\bar{x},y,\bar{y}) = \Theta(x,\bar{y},x,\bar{y})$.

Задача 2.17 (2 балла). Пусть $S \subset M$ комплексное подмногообразие с индуцированной на нем кэлеровой метрикой, а H_S, H_M соответствующие тензоры голоморфной бисекционной кривизны. Докажите, что $H_S(x) \leqslant H_M(x)$ для любого $x \in T^{1,0}(S)$.

Задача 2.18 (1 балл). Пусть M – кэлерово многообразие, а Ric его кривизна Риччи. Пусть Ric положительно определена. Докажите, что $H(x) \geqslant 0$, или найдите контрпример

Задача 2.19. Рассмотрим пространство периодов $\mathbb{P}\mathsf{er}$ для структур Ходжа как псевдокэлерово многообразие с естественной псевдокэлеровой метрикой, Обозначим за $T_i\,\mathbb{P}\mathsf{er}$ подрасслоение в касательном расслоении, порожденное $\mathfrak{g}^{-i,i} \oplus \mathfrak{g}^{i,-i}$.

а. (2 балла) Докажите, что $B(x,y)=0$ если $x\in T_i\,\mathbb{P}\mathsf{er}$, $y\in T_j\,\mathbb{P}\mathsf{er}$, и $i\neq j$.

б. (3 балла) Докажите, что $(-1)^i B(x,y)>0$, если $x,y\in T_i\,\mathbb{P}\mathsf{er}$.

2.5. Метрики Кобаяши

Задача 2.20 (1 балл). Докажите, что группа голоморфных автоморфизмов единичного шара в $\mathbb{C}^n$ изоморфна $PU(1,n)$.

Задача 2.21 (2 балла). Докажите, что группа голоморфных автоморфизмов B^m (m-й степени шара) изоморфна $\Sigma_m \ltimes PU(1,n)$, где Σ_m есть симметрическая группа.

Задача 2.22 (1 балл). Пусть Δ^* есть проколотый диск. Докажите, что любое голоморфное отображение из Δ^* в эллиптическую кривую продолжается до голоморфного отображения из диска, или найдите контрпример.

Задача 2.23 (1 балл). Докажите, что любое голоморфное отображение из Δ^* в $\mathbb{C}P^1$ продолжается до голоморфного отображения из диска, или найдите контрпример.

Задача 2.24 (1 балл). Докажите, что любое голоморфное отображение из Δ^* в компактную кривую рода >1 продолжается до голоморфного отображения из диска, или найдите контрпример.

Задача 2.25 (1 балл). Пусть f – голоморфное отображение из Δ^* в эллиптическую кривую с выколотой точкой, образ которого содержится в компакте. Докажите, что f продолжается до голоморфного отображения из диска, или найдите контрпример.