Вариации структур Ходжа, листок 1: цилиндрические области

Задача 1.1. Докажите, что представление V полупростой комплексной группы Ли G неприводимо тогда и тогда, когда у действия G на $\mathbb{P}V$ есть единственная замкнутая орбита.

Задача 1.2. Пусть V – тавтологическое представление $GL(n,\mathbb{C})$. Докажите, что $\Lambda^p V$ неприводимо для каждого p.

Определение 1.1. Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – открытое подмножество. **Цилиндрическая область** (tube domain) есть подмножество в $\mathbb{C}^n$, заданное как $D \times \sqrt{-1}\mathbb{R}^n$.

Определение 1.2. **Голоморфная оболочка** подмножества $U \subset \mathbb{C}^n$ есть множество всех точек $z \in \mathbb{C}^n$ таких, что любая голоморфная функция на U имеет аналитическое продолжение в z.

Задача 1.3. Докажите, что голоморфная оболочка цилиндрической области есть ее выпуклая оболочка.

Задача 1.4. Пусть $M = SO(n,2)/SO(n) \times SO(2)$. Докажите, что на M существует ровно одна $SO(n,2)$-инвариантная комплексная структура. Докажите, что M биголоморфна цилиндрической области.

Задача 1.5. Пусть $M = U(p,q)/U(p) \times U(q)$. Докажите, что на M существует ровно одна $U(p,q)$-инвариантная комплексная структура. Докажите, что M биголоморфна цилиндрической области.

Задача 1.6. Пусть $J_n \in GL(n,\mathbb{H})$ – диагональная кватернионная матрица, у которой на диагонали стоят J.

а. Докажите, что отображение $A \longrightarrow JAJ^{-1}$ сохраняет группу $GL(2n,\mathbb{C}) \supset GL(n,\mathbb{H})$.

б. Определим группу $O^*(2n)$, она же $O(n,\mathbb{H})$, как множество всех матриц $A \in GL(2n,\mathbb{C})$ таких, что $JAJ^{-1} = \bar{A}$. Докажите, что это действительно группа.

в. Докажите, что $O^*(2n)$ лежит в $GL(n,\mathbb{H})$.

г. Постройте эрмитову форму сигнатуры (n,n) на $\mathbb{C}^{2n}$ такую, что $O^*(2n) = O(2n,\mathbb{C}) \cap U(n,n)$.

д. Выведите из этого, что $O^*(2n)$ есть вещественная форма $O(2n,\mathbb{C})$.

Задача 1.7. Пусть $M = O^*(2n)/U(n)$, где $U(n)$ диагонально вложена в $U(n,n)$, построенную в предыдущей задаче. Докажите, что на M существует ровно одна $O^*(n)$-инвариантная комплексная структура. Докажите, что M биголоморфна множеству кососимметрических комплексных матриц операторной нормы < 1.

Задача 1.8. Пусть $M = Sp(2n,\mathbb{R})/U(n)$. Докажите, что на M существует ровно одна $Sp(2n,\mathbb{R})$-инвариантная комплексная структура. Докажите, что M биголоморфна множеству симметрических комплексных матриц операторной нормы < 1.

Замечание 1.1. Перечисленные 4 комплексные области исчерпывают список "классических симметрических областей", или "классических пространств Картана".