1. Теория меры, лекция 1: триангуляции, аддитивные меры и объем многогранников

История интегрирования восходит к Архимеду, Ньютону и Лейбницу, но строгое обоснование теории интегрирования стало возможно только во второй половине XIX-го века, благодаря Коши, Дирихле и Риману. Кульминацией этого подхода стали работы Лебега, появившиеся в 1902-1903, в которых он определил понятие меры и измеримой функции, ныне общепринятое.

На протяжении XX-го века основы интегрирования делались все проще и проще, и сейчас большую часть теории меры можно рассказать в хорошем матклассе. Теория меры, в современном изложении, строится аксиоматически, и не требует для своего построения ничего, кроме базовых фактов теории множеств, топологии и анализа.

Henri Léon Lebesgue
(June 28, 1875 - July 26, 1941)

Слово "мера" обозначает, в большинстве случаев “объем” подмножества, то есть интеграл от функции, которая принимает 1 на этом подмножестве и 0 вне его. Такая функция называется **характеристической функцией** подмножества. Оказывается, для построения интегрирования достаточно научиться интегрировать характеристические функции. Поэтому-то теорию интегрирования и называют сейчас **теорией меры**. Мера есть функция, бьющая из подмножеств некоторого пространства в вещественные числа, и удовлетворяющая свойствам объема, о которых будет рассказано ниже. Как правило, определить меру на множестве **всех подмножеств** не получается - это приводит к теоретико-множественным парадоксам. Поэтому для построения теории меры приходится сначала определить **измеримые подмножества**, а затем определять меру как функцию на множестве измеримых подмножеств.

В качестве первого введения в теорию меры, я расскажу про объемы многогранников и инвариант Дэна, изобретенный для решения третьей проблемы Гильберта. Эту науку часто рассказывают школьникам матклассов. Полезные книги на ту же тему - "Третья проблема Гильберта" Болтянского и "Наглядная геометрия" Гильберта и КонФоссена.

1.1. Кольца подмножеств и конечно-аддитивные функции

Пусть S – множество. Мы обозначаем множество подмножеств S за 2^S. Полезно думать о 2^S как о множестве всех функций из S в $\{0,1\}$; для каждого $X \in 2^S$, соответствующая ему **характеристическая функция** отображает все точки X в 1, а все остальные в 0.

Определение 1.1. Подмножество $\mathfrak{U} \subset 2^S$ называется **кольцом подмножеств**, если $\mathfrak{U}$ содержит пустое множество, $\emptyset \in \mathfrak{U}$, и все пересечения, объединения и дополнения конечных наборов подмножеств из $\mathfrak{U}$ содержатся в $\mathfrak{U}$.

Иногда требуют, дополнительно, чтобы S содержалось в $\mathfrak{U}$.

Замечание 1.2. Отождествим $\{0,1\}$ с полем из двух элементов, которое обозначается $\mathbb{F}_2$. Это задает кольцевую структуру на 2^S: умножение соответствует взятию пересечения, сложение - взятие симметрической разности. Легко видеть, что $\mathfrak{U}$ является кольцом подмножеств тогда и только тогда, когда соответствующие функции из S в $\{0,1\} = \mathbb{F}_2$ образуют подкольцо в 2^S (без единицы). Если, к тому же, $S \in \mathfrak{U}$, это будет кольцо с единицей (единица задается характеристической функцией S, которая принимает значение 1 на всех элементах S).

Определение 1.3. Пусть $\mathfrak{U} \subset 2^S$ – кольцо подмножеств. Функция

$$\mu: \mathfrak{U} \longrightarrow \mathbb{R}$$

называется **аддитивной**, или **конечно-аддитивной**, если для любых $A, B \in \mathfrak{U}$, которые не пересекаются, имеет место $\mu(A \coprod B) = \mu(A) + \mu(B)$ (объединение непересекающихся подмножеств обозначают $A \coprod B$).

Аддитивность – одно из условий, которые естественно наложить на функцию объема (то есть меру), чтобы получить полезное на практике аксиоматическое определение объема/меры. Впрочем, как заметил еще Архимед, конечной аддитивности недостаточно: чтобы вычислять объемы трехмерных многогранников, или криволинейных фигур, необходимо потребовать *счетной аддитивности* (σ-аддитивности), то есть аддитивности по объединению счетных наборов подмножеств.

Тем не менее, в некоторых ситуациях конечной аддитивности хватает, например, на кольце многоугольников в $\mathbb{R}^2$, которое будет определено ниже.

Предложение 1.4: Конечная аддитивность функции μ равносильно выполнению соотношения

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B) \tag{1.1.1}$$

для любых подмножеств.

Доказательство: Аддитивность μ следует из (1.1.1) для непересекающихся A и B. Вывести (1.1.1) из аддитивности тоже весьма просто. Сначала заметим, что $\mu(A \coprod B \coprod C) = \mu(A) + \mu(B) + \mu(C)$ для попарно непересекающихся A, B, C. Затем применим эту формулу к попарно непересекающимся множествам $A \backslash B$, $A \cap B$, $B \backslash A$, получив

$$\mu(A \cup B) = \mu(A \backslash B) + \mu(B \backslash A) + \mu(A \cap B).$$

Применив аддитивность к попарно непересекающимся множествам $A \backslash B$, $A \cap B$ и $B \backslash A$, $A \cap B$, получим

$$\mu(A) = \mu(A \backslash B) + \mu(A \cap B), \quad \mu(B) = \mu(B \backslash A) + \mu(A \cap B),$$

Легко видеть, что (1.1.1) получается линейной комбинацией последних трех уравнений (проверьте это). ■

1.2. Кольцо многогранников

Определение 1.5. Подмножество $X \subset \mathbb{R}^n$ называется **выпуклым**, если для любых двух точек X, соединяющий их отрезок лежит в X целиком.

Определение 1.6. Выпуклая оболочка множества X_0 есть наименьшее выпуклое множество X, содержащее X_0. Другими словами, X есть выпуклое множество, содержащее X_0 и содержащееся в любом выпуклом множестве, которое содержит X_0.

Существование выпуклой оболочки нужно, конечно, доказывать. Она строится явно в следующей лемме.

Лемма 1.7: Пусть $X_0 \subset \mathbb{R}^n$ какое-то подмножество, а X – множество конечных линейных комбинаций вида $\sum \lambda_i x_i$, где $\sum \lambda_i = 1$, все λ_i неотрицательны, а $x_i \in X_0$. Тогда X – это выпуклая оболочка X_0.

Задача 1.8. Докажите эту лемму.

Определение 1.9. Симплексом в $\mathbb{R}^n$ называется выпуклая оболочка $n+1$ точки. Симплекс называется **вырожденным**, если эти точки содержатся в какой-то гиперплоскости.

Замечание 1.10. В $\mathbb{R}^2$ симплекс это треугольник, отрезок или точка; в $\mathbb{R}^3$ - тетраэдр, выпуклый четырехугольник, лежащий в плоскости, треугольник, отрезок или точка. Последние 4 примера, очевидно, вырожденные.

Определение 1.11. Кольцо многогранников есть кольцо, полученное применением конечного числа операций объединения, пересечения, дополнения к симплексам.

Замечание 1.12. В силу того, что мы разрешили вырожденные симплексы, достаточно странные вещи могут оказаться многогранниками, например, дополнение куба к треугольнику или нескольким точкам.

Определение 1.13. Вырожденный многогранник есть многогранник, полученный применением операций объединения, пересечения, дополнения к вырожденным симплексам. **Замкнутый** многогранник есть объединение конечного числа симплексов.

Задача 1.14. Докажите, что замыкание любого многогранника (в смысле обычной топологии на $\mathbb{R}^n$) есть замкнутый многогранник.

Задача 1.15. Докажите, что любой многогранник получается как дополнение $A\backslash B$, где A замкнутый многогранник, а B – вырожденный.

1.3. Триангуляция многогранников

Определение 1.16. Пусть M – замкнутый многогранник. **Триангуляция** M есть разбиение $M\backslash S$ в объединение невырожденных симплексов $X_1, ..., X_n$, таким образом, что попарные пересечения этих симплексов – вырожденные многогранники, и S – вырожденный многогранник. **Триангуляцией незамкнутого многогранника** называется триангуляция его замыкания.

Теорема 1.17: Каждый многогранник допускает триангуляцию.

Доказательство. Проще всего триангулировать выпуклые многогранники. Для этого надо триангулировать все грани, воспользовавшись индукцией по размерности, а затем взять точку S внутри многогранника, и соединить прямыми с каждой из вершин симплексов, нарисованных на гранях. Многогранник развалится в объединение симплексов, имеющих общую вершину S, с противоположной этой вершине гранью, принадлежащей выбранной триангуляции граней многогранника. Такая триангуляция называется **барицентрической**.

Если же многогранник не выпуклый, мы разрежем его в объединение выпуклых, пересекающихся по гиперплоскостям, и триангулируем каждую выпуклую часть по отдельности. Для этого возьмем многогранник M, полученный из симплексов $X_1, ..., X_n$ операциями пересечения, объединения и дополнения, и пусть P – множество всех гиперплоскостей, которые ограничивали эти симплексы. Тогда P разбивает $\mathbb{R}^n$ в объединение компонент связности, каждая из которых получается как пересечение полупространств, ограниченных $P_i \in P$, а значит, выпукла. Воспользовавшись индукцией по числу симплексов, нетрудно убедиться, что (с точностью до вырожденных многогранников) M получен как объединение некоторого подмножества компонент связности. ■

Определение 1.18. Пусть S_1, S_2 – две триангуляции многогранника M. Триангуляция S_2 называется **измельчением** триангуляции S_1, если каждый симплекс из S_2 содержится в каком-то из симплексов S_1. Соответствующее отношение частичного порядка на измельчениях обозначается $S_2 \preccurlyeq S_1$. В этой ситуации также говорят, что триангуляция S_2 **подчинена** триангуляции S_1.

Задача 1.19. Пусть S_1, S_2 – триангуляции многогранника M. Тогда существует триангуляция S_3 такая, что $S_3 \preccurlyeq S_1$ и $S_3 \preccurlyeq S_2$

Указание 1.20. Возьмите разбиение M на попарные пересечения симплексов из S_1, S_2, и найдите триангуляцию каждого из этих симплексов.

1.4. Объем многогранников

Напомню, что многогранники $M, M' \subset \mathbb{R}^n$ называются **конгруэнтными**, если один можно перевести в другой движением $\mathbb{R}^n$.

Определение 1.21. Пусть $\mathfrak{U} \subset 2^{\mathbb{R}^n}$ – кольцо многогранников. Функция $\mu : \mathfrak{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ называется **конечно-аддитивной мерой на** $\mathfrak{U}$, если

(i) μ конечно аддитивна: $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$

(ii) $\mu(M) = 0$ для любого вырожденного многогранника M.

Если, к тому же, $\mu(M) = \mu(M')$ для любых конгруэнтных многогранников M, M', мера μ называется **инвариантной** (или же инвариантной относительно движений).

Следующее утверждение немедленно следует из теоремы о существовании триангуляций.

Утверждение 1.22: Пусть μ, μ' – две конечно-аддитивные меры на кольце многогранников, которые равны на симплексах. Тогда они равны.

Чтобы определить объем многогранников через симплексы, надо задать объем на каждом симплексе (это можно сделать, используя определитель), а затем воспользоваться триангуляциями. Чтобы доказать корректность этого определения, надо убедиться, что оно не зависит от выбора триангуляции.

Определение 1.23. Рассмотрим симплекс S, полученный, как линейная оболочка точек $x_0, ..., x_n$. Определим **объем** этого симплекса формулой

$$\operatorname{Vol}(S) := \frac{1}{n!} |\det(x_1 - x_0, x_2 - x_0, ..., x_n - x_0)|.$$

Здесь под det понимается детерминант матрицы, составленной из координат векторов $x_1 - x_0, x_2 - x_0, ..., x_n - x_0$

Задача 1.24. Докажите, что объем $\operatorname{Vol}(S)$ не зависит от нумерации точек $x_0, ..., x_n$.

Указание 1.25. Воспользуйтесь тем, что определитель не изменится, если ко всем столбцам добавить один и тот же вектор.

Определение 1.26. Пусть M – многогранник, снабженный триангуляцией, $M = \bigcup X_i$. Определим **объем** M формулой $\operatorname{Vol}(M) := \sum \operatorname{Vol}(X_i)$.

Теорема 1.27: Объем многогранника является конечно-аддитивной мерой на кольце многогранников, и инвариантен относительно движений.

Доказательство: Аддитивность объема следует из того, что он не зависит от триангуляции. В самом деле, пусть $A = A_1 \cup A_2$ – разбиение A в объединение многогранников. Выберем триангуляцию многогранников $A_1 \backslash A_2$, $A_2 \backslash A_1$ и $A_1 \cap A_2$. Она задает триангуляцию A, A_1и A_2. Связанный с этой триангуляцией объем удовлетворяет $\operatorname{Vol}(A) = \operatorname{Vol}(A_1) + \operatorname{Vol}(A_2) - \operatorname{Vol}(A_1 \cap A_2)$, (легко видеть, что в этой формуле объем каждого симплекса, составляющего A, учитывается один раз).

Для доказательства того, что объем не зависит от триангуляции, рассмотрим две триангуляции S_1, S_2 многогранника M, и пусть S – общее измельчение S_1 и S_2. Каждый симплекс X из S_1, S_2 разбивается в объединение симплексов X_i из S. Если мы докажем, что суммарный объем X_i равен объему X, из этого будет следовать, что объем M, посчитанный с обоими триангуляциями, равен сумме объемов всех симплексов S. Значит, теорема 1.27 вытекает из следующего утверждения.

Теорема 1.28: Пусть S - триангуляция симплекса X, разбивающая X в объединение симплексов $X_1, ..., X_n$. Тогда $\operatorname{Vol}(X) = \sum \operatorname{Vol}(X_i)$.

В следующей лекции я буду считать, что объем определен корректно, и займусь третьей проблемой Гильберта и инвариантом Дэна. Доказательство теоремы 1.28 приводится в лекции 3.