8. Теория меры, лекция 8: мера Хаара

Мера Хаара есть одна из самых общих, универсальных и полезных конструкций в теории меры. Это мера на топологической группе, которая определяется исходя из топологии и групповой структуры на пространстве. Мера Хаара существует и единственна для любой локально компактной топологической группы; этот факт имеет массу приложений. Например, усредняя метрику на представлении компактной группы, можно всегда найти метрику, инвариантную относительно этой группы; из этого выводится, что представления компактных групп полупросты. Это одно из основных применений меры Хаара в алгебре. Также без меры Хаара нельзя обойтись в геометрии, теории чисел и анализе.

8.1. Топологические группы

Замечание 8.1. Все топологические пространства на протяжении этих лекций предполагаются хаусдорфовыми.

Определение 8.2. Пусть G – топологическое пространство, снабженное структурой группы. G называется **топологической группой**, если отображение умножения $G \times G \xrightarrow{g,g' \mapsto gg'} G$ и взятия обратного $G \xrightarrow{g \mapsto g^{-1}} G$ непрерывны.

Пример 8.3: $\mathbb{R}^n$ с аддитивной структурой группы является топологической группой.

Пример 8.4: Группа $GL(n,\mathbb{R})$ и $GL(n,\mathbb{C})$ обратимых матриц над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ является топологической группой. Непрерывность умножения очевидна, потому что оно полиномиально (проверьте). Непрерывность взятия обратного следует из двух наблюдений:

(i) $A^{-1} = \frac{A^\circ}{\det A}$, где $\det A$ есть определитель, а A° – матрица, составленная из миноров.

(ii) Отображение $A \longrightarrow A^\circ$ непрерывно, потому что оно полиномиально, а функция $A \longrightarrow \frac{1}{\det A}$ непрерывна на обратимых матрицах, потому что обратна к незануляющейся на $GL(n)$ полиномиальной функции $A \longrightarrow \det A$ (проверьте).

Пример 8.5: Любая подгруппа топологической группы с индуцированной топологией является топологической группой (проверьте).

Пример 8.6: Следовательно, топологическими подгруппами являются **матричные группы** (подгруппы $GL(n)$).

Определение 8.7. Группа Ли есть гладкое многообразие, снабженное структурой группы, таким образом, что умножение и взятие обратного суть морфизмы многообразий.

Замечание 8.8. Очевидно, любая группа Ли является топологической группой.

8.1.1. p-адические числа

Определение 8.9. Пусть p – простое число. **p-адическое нормирование** на целых числах определяется по формуле $\nu_p(p^k n) = p^{-k}$, где n – целое число, взаимно простое с p.

Упражнение 8.10: Проверьте, что $x, y \longrightarrow \nu_p(x-y)$ задает метрику на $\mathbb{Z}$.

Замечание 8.11. Такая метрика называется **p-адической.**

Определение 8.12. Кольцо целых p-адических чисел (обозначается $\mathbb{Z}_p$) есть пополнение $\mathbb{Z}$ в p-адической метрике.

Упражнение 8.13: Проверьте, что это кольцо.

Замечание 8.14. Деление на p^k с остатком непрерывно в p-адической метрике (проверьте), что дает непрерывный гомомоморфизм $\mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathbb{Z}/(p^k\mathbb{Z})$. p-адическое число называется **неделящимся на** p, если его образ при гомоморфизме $\mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathbb{Z}/(p\mathbb{Z})$ ненулевой.

Замечание 8.15. Каждое p-адическое число имеет p-адическую норму $\leqslant 1$. В силу критерия Коши сходимости, любой ряд $\sum_{i=0}^\infty p^i a_i$ сходится, где a_i – целые p-адические. В частности, сходится ряд $\frac{1}{1+pA} = 1 - pA + p^2A^2 - p^3A^3 + ...$

Утверждение 8.16: Любое целое p-адическое число A, не делящееся на p, обратимо в $\mathbb{Z}_p$.

Доказательство: Пусть a – остаток от A по модулю p. Поскольку $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ поле, найдется такое b, что $ab = 1 \mod p$. Значит, $C_1 = AB - 1$ делится на p, для какого-то $B \in \mathbb{Z}_p$. Получаем $C_1 = pC$

$$\frac{1}{A} = \frac{B}{AB} = \frac{B}{pC+1} = B(1 - pC + p^2C^2 - p^3C^3 + ...).$$

■

Определение 8.17. Поле частных $\mathbb{Z}_p$ называется **поле p-адических чисел**, и обозначается $\mathbb{Q}_p$.

Замечание 8.18. В силу предыдущего утверждения,

$$\mathbb{Q}_p = \mathbb{Z}_p(p^{-1}) = \mathbb{Z}_p \cup p^{-1}\mathbb{Z}_p \cup p^{-2}\mathbb{Z}_p \cup ...$$

Последовательность $\{z_i\}$ целых чисел сходится в p-адической метрике тогда и только тогда, когда для любого целого $n > 0$ найдется N такое, что для всех $i, j > N$, $z_i = z_j \mod p^n$ (проверьте это). Другими словами, $\{z_i\}$ сходится $\Leftrightarrow$ для любого n найдется N такое, что в представлении z_i, $i > N$ в p-ичной системе счисления все знаки вплоть до n-го равны:

0000000000000000000000000000000000020
0000000000093275091374509172340957210
0000000000000026381637617631863181610
0000000000007927931793719279129881610
0000000000000000009812038102829881610
0000082739812739127397038102829881610
0003719237912723927397038102829881610
7213719237912723927397038102829881610

Пределом такой последовательности будет сумма ряда вида $\sum_{i=0}^\infty a_i p^i$, где $0 \leqslant a_i < p$. Иначе говоря, целое p-адическое число есть число, записанное в p-ичной системе счисления, но с бесконечным (возможно) числом ненулевых разрядов. Такие числа можно складывать и умножать в столбик, как и обычные целые.

Используя такое представление p-адических чисел, легко доказать следующее

Упражнение 8.19: Докажите, что $\mathbb{Z}_p$ компактно.

Замечание 8.20. Компактность $\mathbb{Z}_p$ доказывает следующий короткий (но не элементарный) аргумент. Рассмотрим отображения $\rho_n: \mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ построенные выше. Легко видеть, что $\nu_p(z) = p^{-k}$, где k есть наименьшее число, для которого $\rho_k(z) \neq 0$. Это задает непрерывное вложение

$$\prod_i \rho_i: \mathbb{Z}_p \xrightarrow{P} \prod_i \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}.$$

Легко видеть, что P является гомеоморфизмом на образ $P(\mathbb{Z}_p)$, который замкнут в топологии произведения на $\prod_i \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$ (проверьте это). С другой стороны, $\prod_i \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$ компактно в силу (весьма нетривиальной) теоремы Тихонова, которая утверждает, что любое произведение компактов компактно.

Определение 8.21. Топологическое пространство называется **локально компактным**, если у каждой точки есть окрестность, замыкание которой компактно.

Замечание 8.22. Легко видеть, что любое многообразие локально компактно.

Упражнение 8.23: Докажите, что $\mathbb{Q}_p = \mathbb{Z}_p(p^{-1}) = \mathbb{Z}_p \cup p^{-1}\mathbb{Z}_p \cup p^{-2}\mathbb{Z}_p \cup ...$ локально компактно.

Упражнение 8.24: Докажите, что группа обратимых матриц $GL(n, \mathbb{Q}_p)$ локально компактна.

Мы получили немало примеров локально компактных топологических групп: группа $GL(n, \mathbb{Q}_p)$, все ее замкнутые подгруппы, группы Ли, и все замкнутые подгруппы групп Ли.

8.2. Мера Хаара

8.2.1. Мера Хаара: определение

Определение 8.25. Пусть M, M' – множества, снабженные сигма-алгебрами A, A'. Предположим, что отображение $\varphi: M \longrightarrow M'$ **измеримо**, то есть для каждого $K \in A'$ имеет место $\varphi^{-1}(K) \in A'$. Для каждой меры μ на A, обозначим за $\varphi_*\mu$ соответствующую меру на A', $\varphi_*\mu(K) := \mu(\varphi^{-1}(K))$.

Определение 8.26. Пусть M – топологическое пространство. Напомню, что **борелевской алгеброй** называется σ-алгебра, порожденная компактными подмножествами, а **борелевской мерой** – сигма-аддитивная мера на борелевской алгебре.

Определение 8.27. Пусть G – топологическая группа, $g \in G$ ее элемент. Обозначим за $L^g: G \longrightarrow G$ операцию **действия группы слева**, $x \longrightarrow gx$, а за R^g – **правое действие**, $x \longrightarrow xg^{-1}$. Борелевская мера μ называется **лево-инвариантной**, если $L^g_*(\mu) = \mu$, для любого $g \in G$, и **право-инвариантной**, если $R^g_*(\mu) = \mu$.

Определение 8.28. Борелевская мера называется **локально конечной**, если у каждой точки есть окрестность, мера которой конечна.

Замечание 8.29. Пусть K компактно, а мера μ локально конечна. Тогда $\mu(K)$ конечно (докажите это).

Определение 8.30. Левая (правая) мера Хаара на топологической группе есть лево- или правоинвариантная локально конечная борелевская мера на G.

Пример 8.31: Рассмотрим $\mathbb{R}^n$ как топологическую группу, с аддитивной групповой структурой. Тогда мера Лебега на $\mathbb{R}^n$ является мерой Хаара (и правой, и левой, так как $\mathbb{R}^n$ коммутативная группа).

Задача 8.32. Пусть $M = \mathbb{Z}_p$, а $\mu_d(K) := \mathsf{card}\,|\rho_d(K)|$, где $\rho_d: \ \mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathbb{Z}/p^d\mathbb{Z}$, а card обозначает число элементов множества. Рассмотрим функцию на компактах $\mu(K) := \sup\lim \frac{\mu_d(K)}{p^d}$. Докажите, что она монотонна, аддитивна и полуаддитивна, то есть задает объем в смысле прошлой лекции. Докажите, что соответствующая этому объему мера Каратеодори на $\mathbb{Z}_p$ является мерой Хаара.

Основным результатом этой лекции является следующая полезная теорема.

Теорема 8.33: Мера Хаара существует и единственна с точностью до константы на каждой локально компактной группе G.

8.2.2. Мера Хаара: единственность

Напомню определение абсолютно непрерывной меры и теорему Радона-Никодима, доказанную две лекции назад.

Определение 8.34. Пусть ν, μ – меры на пространстве с σ-алгеброй. Множество Z называется **μ-пренебрежимым**, если $\mu(Z) = 0$. Мера ν называется **абсолютно непрерывной** относительно μ (обозначается $\nu \preccurlyeq \mu$) если каждое μ-пренебрежимое множество ν-пренебрежимо.

Определение 8.35. Пусть f – неотрицательная измеримая функция на пространстве с сигма-алгеброй и мерой μ. Определим новую меру $f\mu$ формулой $f\mu(U) = \int_U f\mu$, где $\int_U f\mu$ есть интеграл от f по U.

Теорема 8.36: Пусть ν, μ – меры на пространстве M с σ-алгеброй, причем $\nu \preccurlyeq \mu$, и $\nu(M), \mu(M) < \infty$. Тогда существует измеримая функция f такая, что $\nu = f\mu$, причем f определено однозначно вне μ-пренебрежимого множества.

Определение 8.37. Топологическое пространство M называется **пространством Линделёфа**, если любое покрытие M имеет счетное подпокрытие.

Задача 8.38 (*). Придумайте связное пространство, не удовлетворяющее условию Линделефа.

Определение 8.39. Пусть M – топологическое пространство с σ-алгеброй и мерой μ. Измеримое подмножество $K \subset M$ называется **локально пренебрежимым**, если у каждой точки есть окрестность U такая, что пересечение $K \cap U$ μ-пренебрежимо.

Замечание 8.40. Если M – пространство Линделефа, то из локальной пренебрежимости K следует пренебрежимость.

Доказательство единственности меры Хаара использует следующую интуитивно очевидную лемму.

Лемма 8.41: Пусть G – локально компактная группа, снабженная левой мерой Хаара $\mu \neq 0$, а $f \geqslant 0$ – измеримая функция, такая, что для каждого $g \in G$, функция $L_g^*(f)$ равна f вне локально μ-пренебрежимого множества. Тогда f постоянна вне локально μ-пренебрежимого множества.

Доказательство. Шаг 1: Определим **предкомпактное** множество Z как множество, замыкание которого компактно. Тогда $\mu(Z) < \infty$. Выведите это из монотонности и локальной конечности μ.

Шаг 2: Пусть $U \subset G$ – предкомпактное открытое подмножество, такое, что $\mu(U) \neq 0$. Такие подмножества всегда существуют, потому что открытые подмножества U с компактным замыканием порождают борелевскую алгебру (докажите это), а $\mu \neq 0$. Обозначим за K замыкание U.

Шаг 3: Пусть $\pi: K \times G \longrightarrow G$ – проекция, $T: K \times G \longrightarrow K \times G$ отображение, переводящее (k, g) в $(k, k^{-1}g)$, а $\tau: K \times G \longrightarrow K \times G$ переводит (k, g) в $k^{-1}g$. Поскольку T гомеоморфизм, это отображение измеримо (прообраз борелевского борелевский). Поскольку K компактно, проекция π собственная (прообраз компакта компактен), значит, она тоже измерима. Наконец, $\tau = T \circ \pi$ измеримо как композиция измеримых отображений.

Шаг 4: Рассмотрим меру произведения $\mu \times \mu$ на $K \times G$, определенную как в теореме Фубини, и пусть $\tilde{f} := \pi^* f$. Поскольку

$$\int_{K \times V} \tilde{f}\mu \times \mu = \mu(K) \int_V \tilde{f}\mu,$$

имеем $\pi_*(\tilde{f}\mu \times \mu) = f\mu$, где π_* обозначает прямой образ меры.

Шаг 5: Докажем, что мера $\tilde{f}\mu \times \mu$ T-инвариантна, то есть удовлетворяет $T_*(\tilde{f}\mu \times \mu) = \tilde{f}\mu \times \mu$. В силу определения сигма-алгебры на произведении, достаточно проверить равенство этих мер на цилиндрических множествах $A \times B$, то есть убедиться, что

$$\tilde{f}\mu \times \mu(A \times B) = \tilde{f}\mu \times \mu(T^{-1}(A \times B)).$$

По теореме Фубини, $\int_{T^{-1}(A \times B)} \tilde{f}\mu \times \mu = \int_A F\mu$, где $F: B \longrightarrow \mathbb{R}$ функция, которая почти всюду задается формулой $F(x) = \int_{Bx^{-1}} f\mu$. В силу G-инвариантности меры $f\mu$, имеем $F(x) = \int_B f\mu$, то есть

$$\tilde{f}\mu \times \mu(T^{-1}(A \times B)) = \int_A F\mu = \int_A \left(\int_B f\mu \right) \mu = \tilde{f}\mu \times \mu(A \times B).$$

Шаг 6: Из T-инвариантности меры $\tilde{f}\mu \times \mu$ (шаг 5) следует

$$\tau_*(\tilde{f}\mu \times \mu) = \pi_* T_*(\tilde{f}\mu \times \mu) = \pi_*(\tilde{f}\mu \times \mu) = \mu(K) f\mu$$

(последнее равенство следует из теоремы Фубини - проверьте это). С другой стороны, теорема Фубини, примененная к τ, дает $\tau_*(\tilde{f}\mu \times \mu) = \Psi\mu$ где для почти всех x, Ψ задается формулой $\Psi(x) = \int_{\tau^{-1}(x)} f\mu$. Поскольку $\tau^{-1}(x) = \bigcup_{k \in K}(k, kx)$, это дает $\Psi(x) = \int_{xK} f\mu$. Мы получаем $\mu(K) f = \int_{xK} f\mu$ для почти всех x.

Шаг 7: В силу инвариантности меры $f\mu$, $\int_{xK} f\mu = \int_K f\mu$, значит, равенство, полученное на предыдущем шаге, дает $f = \frac{\int_K f\mu}{\mu(K)}$. ■

Теперь я займусь доказательством единственности меры Хаара. Пусть ν, μ – левые меры Хаара, а $U \subset G$ – предкомпактное множество. Тогда $\nu(U), \mu(U) < \infty$, потому что ν, μ локально конечны. Применяя теорему Радона-Никодима к $\nu \preccurlyeq \mu + \nu$, получаем, что $\nu\Big|_U = f\mu_1\Big|_U$, где $\mu_1 := \mu+\nu$, для какой-то измеримой функции f, определенной однозначно вне μ_1-пренебрежимого множества. В силу однозначной определенности f, имеем также $\nu\Big|_{U'} = f\mu_1\Big|_{U'}$, для любого $U' \subset U$ (здесь равенство тоже выполнено вне μ_1-пренебрежимого множества). Поскольку f, определенные на прекомпактных открытых множествах, согласованы на пересечениях, получаем, что f можно склеить до функции f, заданной на всем G. Равенство $\nu = f\mu_1$ выполнено на всех прекомпактных множествах, значит, на всех борелевских; мы получаем, что меры ν и $f(\mu+\nu)$ равны. Применяя Лемму 8.41, получим, что f равна константе λ вне локально μ_1-пренебрежимого множества. Значит, $\nu(K) = \lambda\mu_1(K)$ на любом компакте. Получаем, что $\nu = \lambda(\mu+\nu)$ на любом борелевском множестве.

Это доказывает единственность меры Хаара.

8.2.3. Модулярная функция и унимодулярные группы

Поскольку правое действие группы на себе коммутирует с левым, для левой меры Хаара μ и любого $g \in G$ имеем $L_g^*\mu = \lambda_g\mu$, где $\lambda_g \in \mathbb{R}^{>0}$ – какая-то константа. Легко видеть, что отображение $g \longrightarrow \lambda_g$ задает гомоморфизм групп $G \longrightarrow \mathbb{R}^{>0}$ (такой гомоморфизм называется **характером**)

Определение 8.42. Гомоморфизм $g \longrightarrow \lambda_g$, определенный выше, называется **модулярной функцией**. Если $\lambda_g = 1$ для всех g, группа G называется **унимодулярной**.

Пример 8.43: Поскольку на абелевой группе правое действие равно (с точностью до знака) левому, правоинвариантная мера Хаара равна левоинвариантной. Значит, любая абелева группа унимодулярна.

Пример 8.44: Если группа G равна своему коммутанту, все характеры этой группы тривиальны (проверьте это). Значит, G унимодулярна.

Пример 8.45: Если G компактна, то $\mu(G) < \infty$ в силу локальной конечности. Поскольку μ G-инвариантно, имеем $\mu(G) = L_*^g\mu(G) = \lambda_g\mu(G)$, значит, $\lambda_g = 1$. Мы получили, что любая компактная группа унимодулярна.

Упражнение 8.46: Пусть G – локально компактная группа, а $K \subset G$ – компактное подмножество ненулевой меры Хаара, инвариантное относительно присоединенного действия G. Докажите, что G унимодулярна.

8.2.4. Мера Хаара: существование

Пусть G – локально компактная топологическая группа, $U \subset G$ – открытое подмножество G, $A \subset G$ – компактное подмножество. Рассмотрим покрытие A всеми открытыми множествами вида Ux, где $x \in G$, и пусть $A : U$ есть наименьшее число N, для которого A покрывается N открытыми подмножествами вида xU.

Утверждение 8.47: Зафиксируем компактное множество $W \subset G$, которое является замыканием открытой окрестности единицы W°, и пусть $\mu_{U,W}(A) := \frac{A:U}{W:U}$ есть соответствующая функция на компактах. Тогда

(i) $\mu_{U,W}(A)$ левоинвариантно, полуаддитивно и монотонно как функция A (для прояснения терминологии, см. предыдущую лекцию, тот раздел, где определялся объем на компактах)

(ii) Для непересекающихся компактных A и B, имеем $(A \coprod B) : U = A : U + B : U$, если $U^{-1}A \cap U^{-1}B = \emptyset$. Из этого следует $\mu_{U,W}(A) + \mu_{U,W}(B) = \mu_{U,W}(A \coprod B)$.

(iii) $\mu_{U,W}(A) \leqslant A : W^\circ$.

(iv) $\mu_{U,W}(W) = 1$

Доказательство: Инвариантность, полуаддитивность и монотонность $\mu_{U,W}$ очевидны. Свойство (ii) следует из того, что если открытое множества вида Ux пересекает A, то $x \in U^{-1}A$, значит, xU не может пересекать B. Наконец, (iii) следует из того, что для любого компактного A, прекомпактного открытого U и открытого V, имеем $(A : U)(\bar{U} : V) \geqslant A : V$, что ясно из следующего нехитрого аргумента. Покроем $\bar{U}$ открытыми множествами вида Vx_i, которых $\bar{U} : V$ штук а A – открытыми множествами вида Uy_j, которых $A : U$ штук. Тогда A покроется открытыми множествами вида Vx_iy_j, и будет их ровно $(A : U)(\bar{U} : V)$ штук. Свойство (iv) очевидно из определения, так как $\mu_{U,W}(W) := \frac{W:U}{W:U} = 1$. ■

Рассмотрим теперь множество $\mathfrak{C}$ всех компактов в G, и множество $\mathcal{R}_W$ всех функций $\lambda : \mathfrak{C} \longrightarrow [0, \infty[$, принимающих на компакте $A \in \mathfrak{C}$ значение $\lambda(A) \in [0, A : W^\circ]$. В силу свойства (iii) утверждения 8.47, любая функция $\mu_{U,W}$ принадлежит $\mathcal{R}_W$. Отождествив $\mathcal{R}_W$ с произведением вида $\prod_{A\in\mathfrak{C}}[0, A : W^\circ]$, введем на $\mathcal{R}_W$ топологию произведения (тихоновского). По теореме Тихонова, $\mathcal{R}_W$ компактно, как произведение компактов. Для произвольной окрестности $V \ni e$ единицы $e \in G$, обозначим за $\mathcal{R}_{V,W}$ замыкание множества всех функций вида $\mu_{U,W} \in \mathcal{R}_W$. Ясно, что $\mathcal{R}_{V,W}$ замкнуто в компакте, а значит, тоже компактно.

Сейчас мы воспользуемся следующей хорошо известной леммой, принадлежащей, видимо, Кантору.

Лемма 8.48: Пусть $\{R_\alpha\}$ – какой-то набор компактных подмножеств топологического пространства , причем любое конечное пересечение R_α непусто. Тогда пересечение всех R_α тоже непусто.

Доказательство: Пусть $\bigcap_\alpha R_\alpha$ пусто. Тогда для любого индекса α_0, дополнения $M \backslash R_\alpha$ покрывают R_{α_0}. Выбрав из этого покрытие конечное подпокрытие $R_{\alpha_1}, ..., R_{\alpha_n}$, мы получим конечный набор подмножеств $R_{\alpha_0}, R_{\alpha_1}, ..., R_{\alpha_n}$, пересечение которых пусто (проверьте это). ■

Отметим, что для конечного набора U_i, $\bigcap_i \mathcal{R}_{V_i,W} \subset \mathcal{R}_{\cup_i V,W}$, то есть непусто. В силу предыдущей леммы, пересечение $\bigcap_V \mathcal{R}_{V,W}$ тоже непусто.

Утверждение 8.49: Пусть $\mu_W \in \bigcap_V \mathcal{R}_{V,W}$ – функция на компактах, которая лежит в пересечении $\mathcal{R}_{V,W}$, для всех открытых окрестностей $V \ni e$. Эта функция обладает следующими свойствами.

(i) $\mu_W(A)$ левоинвариантна, полуаддитивна, аддитивна и монотонна как функция A.

(ii) $\mu_W(W) = 1$

Доказательство: По определению, μ_U есть предельная точка множества функций вида $\mu_{U,W}$. Левоинвариантность и полуаддитивность μ_W следует из аналогичных свойств $\mu_{U,W}$, а $\mu_W(W)=1$ следует из $\mu_{U,W}(W)=1$ (утверждение 8.47).

Аддитивность $\mu_W(A)$ следует из утверждения 8.47 (ii). В самом деле, пусть A, B – непересекающиеся компакты. В силу леммы 8.50, доказательство которой см. ниже, существует окрестность $U \ni e$ такая, что $U^{-1}A \cap U^{-1}B = \emptyset$. Значит, для каждого $\lambda \in \mathcal{R}_{U,W}$, имеем $\lambda(A \coprod B) = \lambda(A) + \lambda(B)$. Поскольку $\mu_W \in \bigcap_V \mathcal{R}_{V,W}$, μ_W лежит в $\mathcal{R}_{U,W}$, что доказывает аддитивность. ■

Мы получили функцию объема μ_W, которая удовлетворяет условиям теоремы Каратеодори о продолжении, а следовательно, определяет инвариантную меру на группе. Из $\mu_W(W)=1$ следует, что эта мера ненулевая (проверьте это). Локальная конечность этой меры следует из того, что она конечна на компактах (проверьте), а у любой точки G найдется предкомпакнтая окрестность.

Мы свели доказательство существования меры Хаара к следующей интуитивно очевидной лемме.

Лемма 8.50: Пусть $A, B \subset G$ непересекающиеся подмножества в топологической группе G, причем A компактно, а B замкнуто. Тогда существует окрестность единицы $U \ni e$ такая, что $UA \cap UB = \emptyset$.

Доказательство. Шаг 0: Напомню хорошо известный факт из топологии, уже использованный в одной из предыдущих лекций (докажите его самостоятельно). Пусть A, B – непересекающиеся компакты в хаусдорфовом топологическом пространстве. Тогда у A, B найдутся непересекающиеся открытые окрестности.

Шаг 1: Докажем лемму 8.50 для $A = \{a\}$ (множества из одной точки). Пусть W – открытая окрестность единицы $e \in G$, причем замыкание $\bar W$ компактно (такая окрестность существует в силу локальной компактности). Рассмотрим отображение $\bar W \times \bar W \xrightarrow{\varphi} G$ переводящее t_1, t_2 в $t_1^{-1} t_2 a$. Поскольку $\bar W \times \bar W$ компактно, прообраз $\varphi^{-1}(B)$ тоже компактен. В силу того, что $a \notin B$, имеем $\varphi^{-1}(B) \not\ni (e \times e)$. Применив шаг 0, получим, что у $e \times e \in \bar W \times \bar W$ есть открытая окрестность $U_1 \times U_2$, замыкание которой не пересекает $\varphi^{-1}(B)$. Мы получили окрестность $U := U_1 \cap U_2$ такую, что $\varphi(U \times U) \cap B = \emptyset$, то есть $U^{-1}Ua \cap B = \emptyset$, то есть $Ua \cap UB = \emptyset$.

Шаг 2: Пусть W – окрестность $e \in B$. Применив утверждение шага 1 к $A = \{e\}$, $B = G \backslash W$, получим окрестность $U \ni e$ такую, что $U^{-1}Ue \cap B = \emptyset$. Это равносильно $U^{-1}U \subset W$.

Шаг 3: Из предыдущего шага ясно, что для доказательства леммы 8.50 достаточно построить открытую окрестность $U \ni e$ такую, что $A \cap UB = \emptyset$. В самом деле, применив шаг 2, найдем окрестность $U_1 \ni e$ такую, что $U_1^{-1}U_1 \subset U$, тогда из $A \cap UB = \emptyset$ следует $A \cap U_1^{-1}U_1 B = \emptyset$ и $U_1 A \cap U_1 B = \emptyset$.

Шаг 4: В силу шага 1, для каждой точки $a \in A$ найдется U такое, что $Ua \cap UB = \emptyset$. Из этого следует, что замыкание $\overline{UB}$ не содержит a. Пусть $\mathcal{S}$ – множество всех таких замыканий, для всех открытых окрестностей $U \ni e$. Тогда $A \cap \bigcap_{S \in \mathcal{S}} S = \emptyset$. Значит, $\{G \backslash S \mid S \in \mathcal{S}\}$ – открытое покрытие A. Выбрав конечное подпокрытие, получим окрестности единицы $U_1, ..., U_n$ такие, что $A \cap \bigcup_i \overline{U_i B} = \emptyset$. Обозначив за U пересечение $\bigcap_i U_i$, получим $A \cap UB = \emptyset$. Теперь лемма 8.50 следует из утверждения шага 3. ■

8.3. Альфред Хаар

Альфред Хаар был учеником Гильберта. Он закончил гимназию в Будапеште, где был победителем различных олимпиад для школьников и участвовал в школьном математическом журнале. В 1909-м году Хаар защитил диссертацию, озаглавленную "Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme", о построении базиса в гильбертовых пространствах. В этой работе Хаар, среди прочего, определил вэйвлеты, ныне чрезвычайно популярные среди специалистов по прикладной математике. После защиты диссертации Хаар стал приватдоцентом в Геттингене, но в 1912-м году он перебрался в Коложвар (ныне Клуж-Напока), и стал профессором местного университета; в том же месте профессорствовал другой великий венгерский математик - Фридьеш Рисс (1880 - 1956).

Alfréd Haar
(11 Oct 1885 – 16 March 1933)

После первой мировой войны (которую Венгрия проиграла) территорию Венгрии было решено сократить на треть; в числе прочих городов Северной Трансильвании Венгрия потеряла Коложвар, который был передан Румынии и переименован в Клуж.

Венгерский Королевский Университет Франца-Иосифа, в котором профессорствовал Хаар, перевезли в Будапешт, а потом в Сегед на юге Венгрии. Там Хаар, совместно с Риссом, основал Институт Яноша Бойяи, в честь венгерского математика Бойяи, который был уроженцем Коложвара.

Хаар больше всего прославился своей работой "Der Massbegriff in der Theorie der kontinuierlichen Gruppen" об инвариантных мерах на топологических группах, опубликованной в 1933. В скором времени его результаты стали применяться весьма широко. Одно из первых применений меры Хаара принадлежит Джону фон Нойману, который решил с помощью меры Хаара важный частный случай 5-й проблемы Гильберта. Фон Нойман доказал, что любая компактная группа, гомеоморфная многообразию, является группой Ли (случай некомпактных групп гораздо труднее, и оставался открытым вплоть до начала 1950-х). Его решение проблемы Гильберта вышло его том же номере журнала Annals of Mathematics, где появилась статья Хаара. Интересно, что фон Нойман первоначально пытался разубедить Хаара, потому что считал, что подобная теорема не может быть правильной.

Хаар умер в 1933-м году, в возрасте 48 лет.