

## 8. Теория меры, лекция 8: мера Хаара

Мера Хаара есть одна из самых общих, универсальных и полезных конструкций в теории меры. Это мера на топологической группе, которая определяется исходя из топологии и групповой структуры на пространстве. Мера Хаара существует и единственна для любой локально компактной топологической группы; этот факт имеет массу приложений. Например, усредняя метрику на представлении компактной группы, можно всегда найти метрику, инвариантную относительно этой группы; из этого выводится, что представления компактных групп полупросты. Это одно из основных применений меры Хаара в алгебре. Также без меры Хаара нельзя обойтись в геометрии, теории чисел и анализе.

### 8.1. Топологические группы

**Замечание 8.1.** Все топологические пространства на протяжении этих лекций предполагаются хаусдорфовыми.

**Определение 8.2.** Пусть  $G$  – топологическое пространство, снабженное структурой группы.  $G$  называется **топологической группой**, если отображение умножения  $G \times G \xrightarrow{g \cdot g' \mapsto gg'} G$  и взятия обратного  $G \xrightarrow{g \mapsto g^{-1}} G$  непрерывны.

**Пример 8.3:**  $\mathbb{R}^n$  с аддитивной структурой группы является топологической группой.

**Пример 8.4:** Группа  $GL(n, \mathbb{R})$  и  $GL(n, \mathbb{C})$  обратимых матриц над  $\mathbb{R}$  и  $\mathbb{C}$  является топологической группой. Непрерывность умножения очевидна, потому что оно полиномиально (проверьте). Непрерывность взятия обратного следует из двух наблюдений:

- (i)  $A^{-1} = \frac{A^\circ}{\det A}$ , где  $\det A$  есть определитель, а  $A^\circ$  – матрица, составленная из миноров.
- (ii) Отображение  $A \rightarrow A^\circ$  непрерывно, потому что оно полиномиально, а функция  $A \rightarrow \frac{1}{\det A}$  непрерывна на обратимых матрицах, потому что обратна к ненулевой на  $GL(n)$  полиномиальной функции  $A \rightarrow \det A$  (проверьте).

**Пример 8.5:** Любая подгруппа топологической группы с индуцированной топологией является топологической группой (проверьте).

**Пример 8.6:** Следовательно, топологическими подгруппами являются **матричные группы** (подгруппы  $GL(n)$ ).

**Определение 8.7.** Группа Ли есть гладкое многообразие, снабженное структурой группы, таким образом, что умножение и взятие обратного суть морфизмы многообразий.

**Замечание 8.8.** Очевидно, любая группа Ли является топологической группой.

#### 8.1.1. $p$ -адические числа

**Определение 8.9.** Пусть  $p$  – простое число.  $p$ -адическое нормирование на целых числах определяется по формуле  $\nu_p(p^k n) = p^{-k}$ , где  $n$  – целое число, взаимно простое с  $p$ .



**Упражнение 8.19:** Докажите, что  $\mathbb{Z}_p$  компактно.

**Замечание 8.20.** Компактность  $\mathbb{Z}_p$  доказывает следующий короткий (но не элементарный) аргумент. Рассмотрим отображения  $\rho_n : \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$  построенные выше. Легко видеть, что  $\nu_p(z) = p^{-k}$ , где  $k$  есть наименьшее число, для которого  $\rho_k(z) \neq 0$ . Это задает непрерывное вложение

$$\prod_i \rho_i : \mathbb{Z}_p \xrightarrow{P} \prod_i \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}.$$

Легко видеть, что  $P$  является гомеоморфизмом на образ  $P(\mathbb{Z}_p)$ , который замкнут в топологии произведения на  $\prod_i \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$  (проверьте это). С другой стороны,  $\prod_i \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$  компактно в силу (весьма нетривиальной) теоремы Тихонова, которая утверждает, что любое произведение компактов компактно.

**Определение 8.21.** Топологическое пространство называется **локально компактным**, если у каждой точки есть окрестность, замыкание которой компактно.

**Замечание 8.22.** Легко видеть, что любое многообразие локально компактно.

**Упражнение 8.23:** Докажите, что  $\mathbb{Q}_p = \mathbb{Z}_p(p^{-1}) = \mathbb{Z}_p \cup p^{-1}\mathbb{Z}_p \cup p^{-2}\mathbb{Z}_p \cup \dots$  локально компактно.

**Упражнение 8.24:** Докажите, что группа обратимых матриц  $GL(n, \mathbb{Q}_p)$  локально компактна.

Мы получили немало примеров локально компактных топологических групп: группа  $GL(n, \mathbb{Q}_p)$ , все ее замкнутые подгруппы, группы Ли, и все замкнутые подгруппы групп Ли.

## 8.2. Мера Хаара

### 8.2.1. Мера Хаара: определение

**Определение 8.25.** Пусть  $M, M'$  – множества, снабженные сигма-алгебрами  $A, A'$ . Предположим, что отображение  $\varphi : M \rightarrow M'$  **измеримо**, то есть для каждого  $K \in A'$  имеет место  $\varphi^{-1}(K) \in A$ . Для каждой меры  $\mu$  на  $A$ , обозначим за  $\varphi_*\mu$  соответствующую меру на  $A'$ ,  $\varphi_*\mu(K) := \mu(\varphi^{-1}(K))$ .

**Определение 8.26.** Пусть  $M$  – топологическое пространство. Напомню, что **борелевской алгеброй** называется  $\sigma$ -алгебра, порожденная компактными подмножествами, а **борелевской мерой** – сигма-аддитивная мера на борелевской алгебре.

**Определение 8.27.** Пусть  $G$  – топологическая группа,  $g \in G$  ее элемент. Обозначим за  $L^g : G \rightarrow G$  операцию **действия группы слева**,  $x \rightarrow gx$ , а за  $R^g$  – **правое действие**,  $x \rightarrow xg^{-1}$ . Борелевская мера  $\mu$  называется **лево-инвариантной**, если  $L_*^g(\mu) = \mu$ , для любого  $g \in G$ , и **право-инвариантной**, если  $R_*^g(\mu) = \mu$ .

**Определение 8.28.** Борелевская мера называется **локально конечной**, если у каждой точки есть окрестность, мера которой конечна.

**Замечание 8.29.** Пусть  $K$  компактно, а мера  $\mu$  локально конечна. Тогда  $\mu(K)$  конечно (докажите это).

**Определение 8.30.** **Левая (правая) мера Хаара** на топологической группе есть лево- или правоинвариантная локально конечная борелевская мера на  $G$ .

**Пример 8.31:** Рассмотрим  $\mathbb{R}^n$  как топологическую группу, с аддитивной групповой структурой. Тогда мера Лебега на  $\mathbb{R}^n$  является мерой Хаара (и правой, и левой, так как  $\mathbb{R}^n$  коммутативная группа).

**Задача 8.32.** Пусть  $M = \mathbb{Z}_p$ , а  $\mu_d(K) := \text{card} |\rho_d(K)|$ , где  $\rho_d : \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}/p^d\mathbb{Z}$ , а  $\text{card}$  обозначает число элементов множества. Рассмотрим функцию на компактах  $\mu(K) := \sup \lim \frac{\mu_d(K)}{p^d}$ . Докажите, что она монотонна, аддитивна и полуаддитивна, то есть задает объем в смысле прошлой лекции. Докажите, что соответствующая этому объему мера Каратеодори на  $\mathbb{Z}_p$  является мерой Хаара.

Основным результатом этой лекции является следующая полезная теорема.

**Теорема 8.33:** Мера Хаара существует и единственна с точностью до константы на каждой локально компактной группе  $G$ .

## 8.2.2. Мера Хаара: единственность

Напомню определение абсолютно непрерывной меры и теорему Радона-Никодима, доказанную две лекции назад.

**Определение 8.34.** Пусть  $\nu, \mu$  – меры на пространстве с  $\sigma$ -алгеброй. Множество  $Z$  называется  $\mu$ -**пренебрежимым**, если  $\mu(Z) = 0$ . Мера  $\nu$  называется **абсолютно непрерывной** относительно  $\mu$  (обозначается  $\nu \ll \mu$ ) если каждое  $\mu$ -пренебрежимое множество  $\nu$ -пренебрежимо.

**Определение 8.35.** Пусть  $f$  – неотрицательная измеримая функция на пространстве с сигма-алгеброй и мерой  $\mu$ . Определим новую меру  $f\mu$  формулой  $f\mu(U) = \int_U f\mu$ , где  $\int_U f\mu$  есть интеграл от  $f$  по  $U$ .

**Теорема 8.36:** Пусть  $\nu, \mu$  – меры на пространстве  $M$  с  $\sigma$ -алгеброй, причем  $\nu \ll \mu$ , и  $\nu(M), \mu(M) < \infty$ . Тогда существует измеримая функция  $f$  такая, что  $\nu = f\mu$ , причем  $f$  определено однозначно вне  $\mu$ -пренебрежимого множества.

**Определение 8.37.** Топологическое пространство  $M$  называется **пространством Линделёфа**, если любое покрытие  $M$  имеет счетное подпокрытие.

**Задача 8.38 (\*).** Придумайте связное пространство, не удовлетворяющее условию Линделёфа.

**Определение 8.39.** Пусть  $M$  – топологическое пространство с  $\sigma$ -алгеброй и мерой  $\mu$ . Измеримое подмножество  $K \subset M$  называется **локально пренебрежимым**, если у каждой точки есть окрестность  $U$  такая, что пересечение  $K \cap U$   $\mu$ -пренебрежимо.

**Замечание 8.40.** Если  $M$  – пространство Линделёфа, то из локальной пренебрежимости  $K$  следует пренебрежимость.

Доказательство единственности меры Хаара использует следующую интуитивно очевидную лемму.

**Лемма 8.41:** Пусть  $G$  – локально компактная группа, снабженная левой мерой Хаара  $\mu \neq 0$ , а  $f \geq 0$  – измеримая функция, такая, что для каждого  $g \in G$ , функция  $L_g^*(f)$  равна  $f$  вне локально  $\mu$ -пренебрежимого множества. Тогда  $f$  постоянна вне локально  $\mu$ -пренебрежимого множества.

**Доказательство. Шаг 1:** Определим **предкомпактное** множество  $Z$  как множество, замыкание которого компактно. Тогда  $\mu(Z) < \infty$ . Выведите это из монотонности и локальной конечности  $\mu$ .

**Шаг 2:** Пусть  $U \subset G$  – предкомпактное открытое подмножество, такое, что  $\mu(U) \neq 0$ . Такие подмножества всегда существуют, потому что открытые подмножества  $U$  с компактным замыканием порождают борелевскую алгебру (докажите это), а  $\mu \neq 0$ . Обозначим за  $K$  замыкание  $U$ .

**Шаг 3:** Пусть  $\pi : K \times G \rightarrow G$  – проекция,  $T : K \times G \rightarrow K \times G$  отображение, переводящее  $(k, g)$  в  $(k, k^{-1}g)$ , а  $\tau : K \times G \rightarrow K \times G$  переводит  $(k, g)$  в  $k^{-1}g$ . Поскольку  $T$  гомеоморфизм, это отображение измеримо (прообраз борелевского борелевский). Поскольку  $K$  компактно, проекция  $\pi$  собственная (прообраз компакта компактен), значит, она тоже измерима. Наконец,  $\tau = T \circ \pi$  измеримо как композиция измеримых отображений.

**Шаг 4:** Рассмотрим меру произведения  $\mu \times \mu$  на  $K \times G$ , определенную как в теореме Фубини, и пусть  $\tilde{f} := \pi^* f$ . Поскольку

$$\int_{K \times V} \tilde{f} \mu \times \mu = \mu(K) \int_V \tilde{f} \mu,$$

имеем  $\pi_*(\tilde{f} \mu \times \mu) = f \mu$ , где  $\pi_*$  обозначает прямой образ меры.

**Шаг 5:** Докажем, что мера  $\tilde{f} \mu \times \mu$   $T$ -инвариантна, то есть удовлетворяет  $T_*(\tilde{f} \mu \times \mu) = \tilde{f} \mu \times \mu$ . В силу определения сигма-алгебры на произведении, достаточно проверить равенство этих мер на цилиндрических множествах  $A \times B$ , то есть убедиться, что

$$\tilde{f} \mu \times \mu(A \times B) = \tilde{f} \mu \times \mu(T^{-1}(A \times B)).$$

По теореме Фубини,  $\int_{T^{-1}(A \times B)} \tilde{f} \mu \times \mu = \int_A F \mu$ , где  $F : B \rightarrow \mathbb{R}$  функция, которая почти всюду задается формулой  $F(x) = \int_{Bx^{-1}} \tilde{f} \mu$ . В силу  $G$ -инвариантности меры  $f \mu$ , имеем  $F(x) = \int_B f \mu$ , то есть

$$\tilde{f} \mu \times \mu(T^{-1}(A \times B)) = \int_A F \mu = \int_A \left( \int_B f \mu \right) \mu = \tilde{f} \mu \times \mu(A \times B).$$

**Шаг 6:** Из  $T$ -инвариантности меры  $\tilde{f} \mu \times \mu$  (шаг 5) следует

$$\tau_*(\tilde{f} \mu \times \mu) = \pi_* T_*(\tilde{f} \mu \times \mu) = \pi_*(\tilde{f} \mu \times \mu) = \mu(K) f \mu$$

(последнее равенство следует из теоремы Фубини - проверьте это). С другой стороны, теорема Фубини, примененная к  $\tau$ , дает  $\tau_*(\tilde{f} \mu \times \mu) = \Psi \mu$  где для почти всех  $x$ ,  $\Psi$  задается формулой  $\Psi(x) = \int_{\tau^{-1}(x)} \tilde{f} \mu$ . Поскольку  $\tau^{-1}(x) = \bigcup_{k \in K} (k, kx)$ , это дает  $\Psi(x) = \int_{xK} f \mu$ . Мы получаем  $\mu(K) f = \int_{xK} f \mu$  для почти всех  $x$ .

**Шаг 7:** В силу инвариантности меры  $f\mu$ ,  $\int_{xK} f\mu = \int_K f\mu$ , значит, равенство, полученное на предыдущем шаге, дает  $f = \frac{\int_K f\mu}{\mu(K)}$ . ■

Теперь я займусь доказательством единственности меры Хаара. Пусть  $\nu, \mu$  – левые меры Хаара, а  $U \subset G$  – предкомпактное множество. Тогда  $\nu(U), \mu(U) < \infty$ , потому что  $\nu, \mu$  локально конечны. Применяя теорему Радона-Никодима к  $\nu \preccurlyeq \mu + \nu$ , получаем, что  $\nu|_U = f\mu_1|_U$ , где  $\mu_1 := \mu + \nu$ , для какой-то измеримой функции  $f$ , определенной однозначно вне  $\mu_1$ -пренебрежимого множества. В силу однозначной определенности  $f$ , имеем также  $\nu|_{U'} = f\mu_1|_{U'}$ , для любого  $U' \subset U$  (здесь равенство тоже выполнено вне  $\mu_1$ -пренебрежимого множества). Поскольку  $f$ , определенные на прекомпактных открытых множествах, согласованы на пересечениях, получаем, что  $f$  можно склеить до функции  $f$ , заданной на всем  $G$ . Равенство  $\nu = f\mu_1$  выполнено на всех прекомпактных множествах, значит, на всех борелевских; мы получаем, что меры  $\nu$  и  $f(\mu + \nu)$  равны. Применяя Лемму 8.41, получим, что  $f$  равна константе  $\lambda$  вне локально  $\mu_1$ -пренебрежимого множества. Значит,  $\nu(K) = \lambda\mu_1(K)$  на любом компакте. Получаем, что  $\nu = \lambda(\mu + \nu)$  на любом борелевском множестве.

Это доказывает единственность меры Хаара.

### 8.2.3. Модулярная функция и унимодулярные группы

Поскольку правое действие группы на себе коммутирует с левым, для левой меры Хаара  $\mu$  и любого  $g \in G$  имеем  $L_g^*\mu = \lambda_g\mu$ , где  $\lambda_g \in \mathbb{R}^{>0}$  – какая-то константа. Легко видеть, что отображение  $g \rightarrow \lambda_g$  задает гомоморфизм групп  $G \rightarrow \mathbb{R}^{>0}$  (такой гомоморфизм называется **характером**)

**Определение 8.42.** Гомоморфизм  $g \rightarrow \lambda_g$ , определенный выше, называется **модулярной функцией**. Если  $\lambda_g = 1$  для всех  $g$ , группа  $G$  называется **унимодулярной**.

**Пример 8.43:** Поскольку на абелевой группе правое действие равно (с точностью до знака) левому, правоинвариантная мера Хаара равна левоинвариантной. Значит, любая абелева группа унимодулярна.

**Пример 8.44:** Если группа  $G$  равна своему коммутанту, все характеры этой группы тривиальны (проверьте это). Значит,  $G$  унимодулярна.

**Пример 8.45:** Если  $G$  компактна, то  $\mu(G) < \infty$  в силу локальной конечности. Поскольку  $\mu$   $G$ -инвариантно, имеем  $\mu(G) = L_*^g\mu(G) = \lambda_g\mu(G)$ , значит,  $\lambda_g = 1$ . Мы получили, что любая компактная группа унимодулярна.

**Упражнение 8.46:** Пусть  $G$  – локально компактная группа, а  $K \subset G$  – компактное подмножество ненулевой меры Хаара, инвариантное относительно присоединенного действия  $G$ . Докажите, что  $G$  унимодулярна.

### 8.2.4. Мера Хаара: существование

Пусть  $G$  – локально компактная топологическая группа,  $U \subset G$  – открытое подмножество  $G$ ,  $A \subset G$  – компактное подмножество. Рассмотрим покрытие  $A$  всеми открытыми множествами вида  $Ux$ , где  $x \in G$ , и пусть  $A : U$  есть наименьшее число  $N$ , для которого  $A$  покрывается  $N$  открытыми подмножествами вида  $xU$ .

**Утверждение 8.47:** Зафиксируем компактное множество  $W \subset G$ , которое является замыканием открытой окрестности единицы  $W^\circ$ , и пусть  $\mu_{U,W}(A) := \frac{A:U}{W:U}$  есть соответствующая функция на компактах. Тогда

- (i)  $\mu_{U,W}(A)$  левоинвариантно, полуаддитивно и монотонно как функция  $A$  (для прояснения терминологии, см. предыдущую лекцию, тот раздел, где определялся объем на компактах)
- (ii) Для непересекающихся компактных  $A$  и  $B$ , имеем  $(A \amalg B) : U = A : U + B : U$ , если  $U^{-1}A \cap U^{-1}B = \emptyset$ . Из этого следует  $\mu_{U,W}(A) + \mu_{U,W}(B) = \mu_{U,W}(A \amalg B)$ .
- (iii)  $\mu_{U,W}(A) \leq A : W^\circ$ .
- (iv)  $\mu_{U,W}(W) = 1$

**Доказательство:** Инвариантность, полуаддитивность и монотонность  $\mu_{U,W}$  очевидны. Свойство (ii) следует из того, что если открытое множества вида  $Ux$  пересекает  $A$ , то  $x \in U^{-1}A$ , значит,  $xU$  не может пересекать  $B$ . Наконец, (iii) следует из того, что для любого компактного  $A$ , прекомпактного открытого  $U$  и открытого  $V$ , имеем  $(A : U)(\bar{U} : V) \geq A : V$ , что ясно из следующего нехитрого аргумента. Покроем  $\bar{U}$  открытыми множествами вида  $Vx_i$ , которых  $\bar{U} : V$  штук а  $A$  – открытыми множествами вида  $Uy_j$ , которых  $A : U$  штук. Тогда  $A$  покроеется открытыми множествами вида  $Vx_iy_j$ , и будет их ровно  $(A : U)(\bar{U} : V)$  штук. Свойство (iv) очевидно из определения, так как  $\mu_{U,W}(W) := \frac{W:U}{W:U} = 1$ . ■

Рассмотрим теперь множество  $\mathfrak{C}$  всех компактов в  $G$ , и множество  $\mathcal{R}_W$  всех функций  $\lambda : \mathfrak{C} \rightarrow [0, \infty[$ , принимающих на компакте  $A \in \mathfrak{C}$  значение  $\lambda(A) \in [0, A : W^\circ]$ . В силу свойства (iii) утверждения 8.47, любая функция  $\mu_{U,W}$  принадлежит  $\mathcal{R}_W$ . отождествив  $\mathcal{R}_W$  с произведением вида  $\prod_{A \in \mathfrak{C}} [0, A : W^\circ]$ , введем на  $\mathcal{R}_W$  топологию произведения (тихоновского). По теореме Тихонова,  $\mathcal{R}_W$  компактно, как произведение компактов. Для произвольной окрестности  $V \ni e$  единицы  $e \in G$ , обозначим за  $\mathcal{R}_{V,W}$  замыкание множества всех функций вида  $\mu_{U,W} \in \mathcal{R}_W$ . Ясно, что  $\mathcal{R}_{V,W}$  замкнуто в компакте, а значит, тоже компактно.

Сейчас мы воспользуемся следующей хорошо известной леммой, принадлежащей, видимо, Кантору.

**Лемма 8.48:** Пусть  $\{R_\alpha\}$  – какой-то набор компактных подмножеств топологического пространства, причем любое конечное пересечение  $R_\alpha$  непусто. Тогда пересечение всех  $R_\alpha$  тоже непусто.

**Доказательство:** Пусть  $\bigcap_\alpha R_\alpha$  пусто. Тогда для любого индекса  $\alpha_0$ , дополнения  $M \setminus R_{\alpha_0}$  покрывают  $R_{\alpha_0}$ . Выбрав из этого покрытие конечное подпокрытие  $R_{\alpha_1}, \dots, R_{\alpha_n}$ , мы получим конечный набор подмножеств  $R_{\alpha_0}, R_{\alpha_1}, \dots, R_{\alpha_n}$ , пересечение которых пусто (проверьте это). ■

Отметим, что для конечного набора  $U_i, \bigcap_i \mathcal{R}_{V_i,W} \subset \mathcal{R}_{\bigcup_i V_i,W}$ , то есть непусто. В силу предыдущей леммы, пересечение  $\bigcap_V \mathcal{R}_{V,W}$  тоже непусто.

**Утверждение 8.49:** Пусть  $\mu_W \in \bigcap_V \mathcal{R}_{V,W}$  – функция на компактах, которая лежит в пересечении  $\mathcal{R}_{V,W}$ , для всех открытых окрестностей  $V \ni e$ . Эта функция обладает следующими свойствами.

- (i)  $\mu_W(A)$  левоинвариантна, полуаддитивна, аддитивна и монотонна как функция  $A$ .
- (ii)  $\mu_W(W) = 1$

**Доказательство:** По определению,  $\mu_U$  есть предельная точка множества функций вида  $\mu_{U,W}$ . Левоинвариантность и полуаддитивность  $\mu_W$  следует из аналогичных свойств  $\mu_{U,W}$ , а  $\mu_W(W) = 1$  следует из  $\mu_{U,W}(W) = 1$  (утверждение 8.47).

Аддитивность  $\mu_W(A)$  следует из утверждения 8.47 (ii). В самом деле, пусть  $A, B$  – непересекающиеся компакты. В силу леммы 8.50, доказательство которой см. ниже, существует окрестность  $U \ni e$  такая, что  $U^{-1}A \cap U^{-1}B = \emptyset$ . Значит, для каждого  $\lambda \in \mathcal{R}_{U,W}$ , имеем  $\lambda(A \amalg B) = \lambda(A) + \lambda(B)$ . Поскольку  $\mu_W \in \bigcap_V \mathcal{R}_{V,W}$ ,  $\mu_W$  лежит в  $\mathcal{R}_{U,W}$ , что доказывает аддитивность. ■

Мы получили функцию объема  $\mu_W$ , которая удовлетворяет условиям теоремы Каратеодори о продолжении, а следовательно, определяет инвариантную меру на группе. Из  $\mu_W(W) = 1$  следует, что эта мера ненулевая (проверьте это). Локальная конечность этой меры следует из того, что она конечна на компактах (проверьте), а у любой точки  $G$  найдется предкомпактная окрестность.

Мы свели доказательство существования меры Хаара к следующей интуитивно очевидной лемме.

**Лемма 8.50:** Пусть  $A, B \subset G$  непересекающиеся подмножества в топологической группе  $G$ , причем  $A$  компактно, а  $B$  замкнуто. Тогда существует окрестность единицы  $U \ni e$  такая, что  $UA \cap UB = \emptyset$ .

**Доказательство. Шаг 0:** Напомню хорошо известный факт из топологии, уже использованный в одной из предыдущих лекций (докажите его самостоятельно). Пусть  $A, B$  – непересекающиеся компакты в хаусдорфовом топологическом пространстве. Тогда у  $A, B$  найдутся непересекающиеся открытые окрестности.

**Шаг 1:** Докажем лемму 8.50 для  $A = \{a\}$  (множества из одной точки). Пусть  $W$  – открытая окрестность единицы  $e \in G$ , причем замыкание  $\bar{W}$  компактно (такая окрестность существует в силу локальной компактности). Рассмотрим отображение  $\bar{W} \times \bar{W} \xrightarrow{\varphi} G$  переводящее  $t_1, t_2$  в  $t_1^{-1}t_2a$ . Поскольку  $\bar{W} \times \bar{W}$  компактно, прообраз  $\varphi^{-1}(B)$  тоже компактен. В силу того, что  $a \notin B$ , имеем  $\varphi^{-1}(B) \not\ni (e \times e)$ . Применив шаг 0, получим, что у  $e \times e \in \bar{W} \times \bar{W}$  есть открытая окрестность  $U_1 \times U_2$ , замыкание которой не пересекает  $\varphi^{-1}(B)$ . Мы получили окрестность  $U := U_1 \cap U_2$  такую, что  $\varphi(U \times U) \cap B = \emptyset$ , то есть  $U^{-1}Ua \cap B = \emptyset$ , то есть  $Ua \cap UB = \emptyset$ .

**Шаг 2:** Пусть  $W$  – окрестность  $e \in B$ . Применив утверждение шага 1 к  $A = \{e\}$ ,  $B = G \setminus W$ , получим окрестность  $U \ni e$  такую, что  $U^{-1}Ue \cap B = \emptyset$ . Это равносильно  $U^{-1}U \subset W$ .

**Шаг 3:** Из предыдущего шага ясно, что для доказательства леммы 8.50 достаточно построить открытую окрестность  $U \ni e$  такую, что  $A \cap UB = \emptyset$ . В самом деле, применив шаг 2, найдем окрестность  $U_1 \ni e$  такую, что  $U_1^{-1}U_1 \subset U$ , тогда из  $A \cap UB = \emptyset$  следует  $A \cap U_1^{-1}U_1B = \emptyset$  и  $U_1A \cap U_1B = \emptyset$ .

**Шаг 4:** В силу шага 1, для каждой точки  $a \in A$  найдется  $U$  такое, что  $Ua \cap UB = \emptyset$ . Из этого следует, что замыкание  $\overline{UB}$  не содержит  $a$ . Пусть  $\mathcal{S}$  – множество всех таких замыканий, для всех открытых окрестностей  $U \ni e$ . Тогда  $A \cap \bigcap_{S \in \mathcal{S}} S = \emptyset$ . Значит,  $\{G \setminus S \mid S \in \mathcal{S}\}$  – открытое покрытие  $A$ . Выбрав конечное подпокрытие, получим окрестности единицы  $U_1, \dots, U_n$  такие, что  $A \cap \bigcup_i \overline{U_i B} = \emptyset$ . Обозначив за  $U$  пересечение  $\bigcap_i U_i$ , получим  $A \cap UB = \emptyset$ . Теперь лемма 8.50 следует из утверждения шага 3. ■



### 8.3. Альфред Хаар

Альфред Хаар был учеником Гильберта. Он закончил гимназию в Будапеште, где был победителем различных олимпиад для школьников и участвовал в школьном математическом журнале. В 1909-м году Хаар защитил диссертацию, озаглавленную "Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme", о построении базиса в гильбертовых пространствах. В этой работе Хаар, среди прочего, определил вэйвлеты, ныне чрезвычайно популярные среди специалистов по прикладной математике. После защиты диссертации Хаар стал приватдоцентом в Геттингене, но в 1912-м году он переехал в Коложвар (ныне Клуж-Напока), и стал профессором местного университета; в том же месте профессорствовал другой великий венгерский математик - Фридьеш Рисс (1880 - 1956).



Alfréd Haar  
(11 Oct 1885 – 16 March 1933)

После первой мировой войны (которую Венгрия проиграла) территорию Венгрии было решено сократить на треть; в числе прочих городов Северной Трансильвании Венгрия потеряла Коложвар, который был передан Румынии и переименован в Клуж.

Венгерский Королевский Университет Франца-Иосифа, в котором профессорствовал Хаар, перевезли в Будапешт, а потом в Сегед на юге Венгрии. Там Хаар, совместно с Риссом, основал Институт Яноша Бойяи, в честь венгерского математика Бойяи, который был уроженцем Коложвара.

Хаар больше всего прославился своей работой "Der Massbegriff in der Theorie der kontinuierlichen Gruppen" об инвариантных мерах на топологических группах, опубликованной в 1933. В скором времени его результаты стали применяться весьма широко. Одно из первых применений меры Хаара принадлежит Джону фон Нойману, который решил с помощью меры Хаара важный частный случай 5-й проблемы Гильберта. Фон Нойман доказал, что любая компактная группа, гомотопная многообразию, является группой Ли (случай некомпактных групп гораздо труднее, и оставался открытым вплоть до начала 1950-х). Его решение проблемы Гильберта вышло в том же номере журнала *Annals of Mathematics*, где появилась статья Хаара. Интересно, что фон Нойман первоначально пытался разубедить Хаара, потому что считал, что подобная теорема не может быть правильной.

Хаар умер в 1933-м году, в возрасте 48 лет.