Для зачета по каждому листку надо сдать все задачи со звездочками, либо все задачи без звездочек. Задачи с двумя звездочками можно не сдавать. Сдавшим k задач с двумя звездочками разрешается не сдавать $2k$ задач со звездочками из того же листочка. Задачи, обозначенные (!), следует сдавать всем.

Теория меры 1: Объемы многогранников

1.1. Кольца подмножеств и конечно-аддитивные меры

Определение 1.1. Пусть задано множество S. Множество всех подмножеств S обозначается 2^S. Пусть $\mathfrak{U} \subset 2^S$ - некоторый набор подмножеств S. $\mathfrak{U}$ называется **кольцом**, если для любых $A, B \in \mathfrak{U}$, объединение $A \cup B$, пересечение $A \cap B$ и дополнение $A \backslash B$ принадлежит $\mathfrak{U}$. В этом случае $\mathfrak{U}$ называется **подкольцом** в 2^S.

Задача 1.1. Пусть S конечно. Опишите все подкольца в 2^S и найдите их число для $|S| = 5$ (множества из 5 элементов).

Определение 1.2. Характеристической функцией подмножества $U \subset S$ называется функция

$$\chi_U : S \longrightarrow \{0,1\} \ \mid \ \chi_U(x) = 1, \ \text{ если } \ x \in U \qquad \chi_U(x) = 0, \ \text{ если } \ x \notin U.$$

Задача 1.2. Пусть $\mathfrak{U} \subset 2^S$ - набор подмножеств, а $R_\mathfrak{U} = \{\chi_U\}$ множество всех характеристических функций для всех $U \in \mathfrak{U}$. Рассмотрим $\{0,1\}$ как поле из двух элементов. Это задает естественную аддитивную и мультипликативную структуру на множестве всех отображений из S в $\{0,1\}$ (поточечное сложение и умножение). Докажите, что $R_\mathfrak{U}$ образует кольцо (возможно, без единицы) тогда и только тогда, когда $\mathfrak{U}$ это кольцо.

Определение 1.3. Пусть $\mathfrak{V} \subset 2^S$ - произвольный набор подмножеств. Минимальное подкольцо в 2^S, содержащее $\mathfrak{V}$, называется **подкольцом, порожденным** $\mathfrak{V}$.

Задача 1.3 (**). Пусть в $\mathfrak{V} \subset 2^S$ N элементов. Какая максимальная мощность может быть у подкольца, порожденного $\mathfrak{V}$?

Определение 1.4. Пусть задано подмножество $S \subset \mathbb{R}^n$. **Выпуклой оболочкой** S называется наименьшее выпуклое подмножество, содержащее S.

Задача 1.4.

Докажите, что выпуклая оболочка S это множество всех векторов вида $\sum \alpha_i s_i$, где $\{s_i\}$ это конечный набор точек из S, а α_i вещественные числа, $0 \leqslant \alpha_i \leqslant 1$, $\sum \alpha_i = 1$.

[*] Докажите, что любой вектор в выпуклой оболочке $S \subset \mathbb{R}^n$, представляется в виде $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i s_i$, где $s_1, ... s_{n+1}$ - точки S, а $0 \leqslant \alpha_i \leqslant 1$, $\sum \alpha_i = 1$.

Определение 1.5. **Симплексом** в $\mathbb{R}^n$ называется выпуклая оболочка множества $\{x_0, ... x_n\}$ из $n+1$ точек в $\mathbb{R}^n$. Такой симплекс называется **натянутым на точки** $x_0, ... x_n$.

Задача 1.5. Перечислите все классы гомеоморфизма симплексов в $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$.

Определение 1.6. Пусть $\Delta(x_0, ...x_n)$ - симплекс, натянутый на точки $\{x_0, ...x_n\}$. **Гранью** Δ размерности k называется выпуклая оболочка $k+1$ точек из $\{x_0, ...x_n\}$.

Задача 1.6. Ребра (одномерные грани) n-мерного симплекса $\Delta(x_0, ...x_n)$ образуют граф. Предположим, что внутренность симплекса $\Delta(x_0, ...x_n)$ не пустая. Сколько ребер в этом графе? Изобразите его. Сколько разных k-мерных граней есть у $\Delta(x_0, ...x_n)$?

Определение 1.7. Кольцо полиэдров (многогранников) есть кольцо подмножеств в $\mathbb{R}^n$, порожденное замкнутыми симплексами. Многогранником называется элемент этого кольца.

Задача 1.7. Докажите, что каждый замкнутый многогранник можно представить в виде конечного объединения симплексов, пересекающихся по граням (такое разбиение называется **триангуляцией** многогранника).

Задача 1.8 (*). Докажите, что каждый выпуклый, замкнутый многогранник можно представить в виде конечного пересечения симплексов.

Определение 1.8. Два многогранника A, B называются **равносоставленными**, если их можно триангулировать, разрезав на симплексы $A_1, ...A_k$, $B_1, ...B_k$ таким образом, что A_i конгруэнтен B_i для любого i.

Задача 1.9. Докажите, что равносоставленность это соотношение эквивалентности.

Задача 1.10. Докажите, что любой треугольник A равносоставлен паралеллограмму с таким же основанием и высотой в половину высоты A.

Задача 1.11. Докажите, что любой паралеллограмм равносоставлен прямоугольнику с таким же основанием и же высотой.

Задача 1.12 (*). Докажите, что прямоугольник со сторонами a и b и прямоугольник со сторонами c и d равносоставлены, при условии $ab = cd$.

Определение 1.9. Пусть $\mathfrak{U} \subset 2^S$ кольцо подмножеств. Отображение $\mu : \mathfrak{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ называется **конечно аддитивной мерой**, или же **аддитивной функцией множества**, или **валюацией**, если для любых $A, B \in \mathfrak{U}$,

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B).$$

Валюация называется **неотрицательной**, если она принимает неотрицательные значения. Очевидно, валюации образуют линейное пространство над $\mathbb{R}$.

Задача 1.13. Пусть S это отрезок $[0, 1]$, а $\mathfrak{U}$ множество конечных объединений отрезков, интервалов и полуинтервалов. Докажите, что $\mathfrak{U}$ это кольцо. Докажите, что отображение $\coprod_i A_i \longrightarrow \sum |A_i|$ (несвязное объединение отрезков переводится в сумму их длин) это неотрицательная конечно-аддитивная мера.

Задача 1.14 (!). Пусть $\mathfrak{U} = 2^S$, где S это конечное множество. Обозначим за L линейное пространство всех конечно-аддитивных мер на $\mathfrak{U}$. Найдите размерность L над $\mathbb{R}$.

Задача 1.15. Пусть дан $\mathbb{Q}$-линейный гомоморфизм $\mathbb{R} \xrightarrow{\xi} \mathbb{R}$,[1] множество S и кольцо подмножеств $\mathfrak{U} \subset 2^S$. Докажите, что для любой конечно-аддитивной меры $\mu: \mathfrak{U} \longrightarrow \mathbb{R}$, композиция $\mu \circ \xi$ это опять конечно-аддитивная мера.

Задача 1.16. Пусть задана точка $x \in S$, кольцо подмножеств $\mathfrak{U} \subset 2^S$, и функция $\mu: \mathfrak{U} \longrightarrow \mathbb{R}$, принимающая значения $\mu(U) = 1$ для $x \in U$ и $\mu(U) = 0$ для $x \notin U$. Докажите, что это конечно-аддитивная мера.

Замечание. Напомним, что движением в $\mathbb{R}^n$ (или любом другом метрическом пространстве) называется любая изометрическая биекция. Два подмножества называются **конгруэнтными**, если одно в другое можно перевести движением.

Определение 1.10. Пусть $\mathfrak{U} \subset 2^{\mathbb{R}^n}$ некоторое кольцо множеств. Конечно-аддитивная мера $\mu: \mathfrak{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ называется **инвариантной**, если $\mu(A) = \mu(B)$ для конгруэнтных фигур $A, B \subset \mathbb{R}^n$.

Задача 1.17. Пусть $\mathfrak{U} \subset 2^{\mathbb{R}^n}$ кольцо многогранников, и пусть $\mu: \mathfrak{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ инвариантная неотрицательная конечно-аддитивная мера.

а. **Вырожденный симплекс** – это симплекс, лежащий внутри какой-то гиперплоскости. Докажите, что симплекс $\Delta(x_0, x_1, ...x_n)$ вырожденный тогда и только тогда, когда вектора $x_1 - x_0, x_2 - x_0, ...x_n - x_0$ линейно зависимы.

б. Докажите, что $\mu(I) = 0$, где I это вырожденный симплекс.

в. Докажите, что $\mu(A) = \mu(\bar{A})$, где A многогранник, а $\bar{A}$ - его замыкание.

г. Докажите, что $\mu(A) = \mu(B)$, если A и B равносоставлены.

1.2. Объем

Определение 1.11. Пусть V n-мерное векторное пространство над $\mathbb{R}$. Рассмотрим одномерное векторное пространство $\Lambda^n(V)$ анти-симметричных форм старшей степени. Это пространство также называется **пространством форм объема**.

Зафиксируем ненулевой вектор $\nu \in \Lambda^n(V)$.

Если в V задан симплекс $\Delta = \Delta(x_0, ...x_n)$, **объемом** Δ называется неотрицательное вещественное число

$$\int_\Delta \nu := |\nu(x_1 - x_0, x_2 - x_0, ...x_n - x_0)|.$$

Задача 1.18. В этих условиях, докажите, что

а. $\int_\Delta \nu > 0$ тогда и только тогда, когда Δ невырожден.

б. [!]

$$\int_{\Delta(x_0,....x_n)} \nu = \int_{\Delta(x_{\sigma_0},....x_{\sigma_n})} \nu,$$

где $(x_0, ...x_n) \longrightarrow (x_{\sigma_0}, ...x_{\sigma_n})$ произвольная перестановка.

[1] Здесь $\mathbb{R}$ рассматривается как векторное пространство над $\mathbb{Q}$.

в. [!] Если симплексы Δ и Δ' конгруэнтны, то $\int_\Delta \nu = \int_{\Delta'} \nu$.

г. [*] Если симплекс Δ представлен в виде объединения непересекающихся симплексов $\Delta = \Delta_1 \coprod \Delta_2$, то
$$\int_\Delta \nu = \int_{\Delta_1} \nu + \int_{\Delta_2} \nu.$$

Задача 1.19 (*). Пусть симплекс Δ представлен в виде объединения непересекающихся симплексов $\Delta = \coprod_i \Delta_i$. Докажите, что
$$\int_\Delta \nu = \sum \int_{\Delta_i} \nu.$$

Задача 1.20 (*). Докажите, что свойства объема, перечисленные в задаче 1.18, задают отображение $\Delta \longrightarrow \int_\Delta \nu$ единственным образом, с точностью до постоянного положительного множителя.

Задача 1.21 (*). Пусть задан многогранник $C \subset V$, и $C = \coprod A_i = \coprod B_i$ его разбиение на непересекающиеся симплексы. Докажите, что
$$\sum \int_{A_i} \nu = \sum \int_{B_i} \nu.$$

Это число называется **объемом многогранника** C, и обозначается $\int_C \nu$. Докажите, что эта функция задает неотрицательную, инвариантную конечно-аддитивную меру на кольце многогранников.

Задача 1.22 (*). Пусть V евклидово векторное пространство, а C единичный куб (куб с ребром 1).[2] Докажите, что существует единственная инвариантная неотрицательная конечно-аддитивная мера μ на кольце многогранников, такая, что $\mu(C) = 1$. Запишите ее явно.

Определение 1.12. Эта конечно-аддитивная мера называется **евклидов объем многогранника**.

1.3. Третья проблема Гильберта

Определение 1.13. Два многогранника называются **равновеликими**, если они имеют одинаковый объем. Легко видеть, что равносоставленные многогранники равновелики.

Третья проблема Гильберта: Постройте два равновеликих многогранника, которые не равносоставлены.

Задача 1.23 (*). Пусть A и B равновеликие многогранники на плоскости (многогранники на плоскости называются **многоугольники**, или **полигоны**). Докажите, что они равносоставлены.

---

[2] Куб можно определить, например, следующим образом. Выберем ортонормальный базис $\{\xi_1, ...\xi_n\}$ в V. Рассмотрим множество линейных комбинаций вида $\sum \alpha_i \xi_i$, где $0 \leqslant \alpha_i \leqslant 1$. Это множество называется **единичный куб** в V.

Замечание. Это утверждение называется **теорема Бойяи-Гервина**.

Замечание. Предположим, что существует конечно-аддитивная мера $\mu: \mathfrak{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ на кольце многогранников, такая, что $\mu(A) \neq \mu(B)$, а A и B равновелики. Тогда A и B не равносоставлены.

Задача 1.24 (!). Выведите из теоремы Бойяи-Гервина следующее утверждение. Пусть задана конечно-аддитивная мера $\mu: \mathfrak{U} \longrightarrow \mathbb{R}$, где $\mathfrak{U}$ - кольцо многоугольников (многогранников в $\mathbb{R}^2$). Докажите, что $\mu = \operatorname{Vol} \circ \xi$, где $\operatorname{Vol}: \mathfrak{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ конечно-аддитивная мера, заданная объемом, а $\xi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ - $\mathbb{Q}$-линейный гомоморфизм абелевых групп.

Задача 1.25. Постройте нетривиальный (не $\mathbb{R}$-линейный) $\mathbb{Q}$-линейный гомоморфизм $\xi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Используйте аксиому выбора.

Задача 1.26 (!). Докажите, что такой гомоморфизм обязательно переводит некоторые положительные числа в отрицательные.

Определение 1.14. Пусть задан $\mathbb{Q}$-линейный гомоморфизм $\phi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, переводящий π в 0, а C - многогранник в $\mathbb{R}^3$, с ребрами длины $d_1, ... d_n$ и прилежащими им двугранными углами, выраженными (в радианах) как $\alpha_1, ... \alpha_n$. Инвариант Дена $D_\phi(C)$ записывается как

$$D_\phi(C) := \sum_{i=1}^{n} d_i \phi(\alpha_i).$$

Задача 1.27 (!). Докажите, что пространство $\mathbb{Q}$-линейных гомоморфизмов, переводящих π в 0, не пусто, и его мощность больше континуума.

Определение 1.15. Это множество наделяется структурой векторного пространства над $\mathbb{R}$:

$$\lambda(\phi)(c) = \lambda\phi(c).$$

Оно называется **пространством инвариантов Дена**.

Задача 1.28. Докажите, что пространство инвариантов Дена бесконечномерно над $\mathbb{R}$. Докажите, что для любого числа $\lambda \in R$ существует гомоморфизм $\phi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, такой, что $\phi(\lambda) \neq 0$, при условии, что λ/π иррационально. Воспользуйтесь аксиомой выбора.

Задача 1.29 (!). Пусть симплекс Δ представлен в виде объединения симплексов $\Delta = \bigcup_i \Delta_i$, пересекающихся по граням. Докажите, что

$$D_\phi(\Delta) = \sum_i D_\phi(\Delta_i)$$

Задача 1.30 (*). Докажите, что инвариант Дена D_ϕ является конечно-аддитивной мерой на пространстве многогранников в $\mathbb{R}^3$.

Задача 1.31. Рассмотрим правильный тетраэдр. Докажите, что его двугранные углы равны $\arccos(1/3)$.

Задача 1.32. Пусть $\cos(\pi\alpha) = 1/n$, а α рационально. Выведите из этого, что

$$e^{\sqrt{-1}\pi k\alpha} = \left(\frac{1}{n} + \sqrt{-1}\frac{\sqrt{n^2-1}}{n}\right)^k = 1.$$

для какого-то целого $k > 0$.

Задача 1.33 (*). Пусть $n = 3$, а $\left(\frac{1}{n} + \sqrt{-1}\frac{\sqrt{n^2-1}}{n}\right)^k = 1$. Докажите, что $k = 0$.

Указание. Докажите однозначность разложения на множители в кольце $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ и воспользуйтесь ею.

Задача 1.34 (*). Обозначим за α двугранный угол правильного тетраэдра. Докажите, что $\frac{\alpha}{\pi}$ иррационально.

Задача 1.35 (*). Найдите такое D_ϕ в пространстве инвариантов Дена что $D_\phi(\alpha) \neq 0$, где α - двугранный угол правильного тетраэдра.

Задача 1.36 (*). В условиях предыдущей задачи, докажите, что $D_\phi(\Delta) \neq 0$, где Δ есть правильный тетраэдр.

Задача 1.37. Докажите, что $D_\phi(C) = 0$ для любого параллелепипеда.

Задача 1.38 (*). Докажите, что равновеликие правильный тетраэдр и правильный куб не равносоставлены.

Задача 1.39 (**). (теорема Дена-Сидлера) Пусть два многогранника A и B в $\mathbb{R}^3$ равновелики, и $D_\phi(A) = D_\phi(B)$ для любого инварианта Дена. Докажите, что A и B равносоставлены.