Метрическая геометрия: задачи для экзамена

Каждому студенту выдается по t задач, где $t = \min(12 - 0.2 * k, 4)$, а k количество баллов за листки и контрольные (если какие-то листки сданы частично, сумма баллов дополнительно округляется вверх, и k увеличивается, по усмотрению экзаменатора, то есть меня). Задачи выдаются из тех разделов, которые студент мало сдавал. Каждая сданная на экзамене задача приносит 5 баллов. Суммарная оценка за курс выставляется по формуле $3 + \lceil 0.1b \rceil$ (10-балльная система) и $\lceil 1.5 + 0.05b \rceil$ (5-балльная), b – сумма баллов.

Задачи сдаются устно, но студент должен приготовить краткую запись решения.

Можно пользоваться любой литературой, но требуется знать в общих чертах доказательство любого используемого утверждения и все подробности определений.

1.1. Метрические пространства и внутренние метрики (листки 1-2, 4)

Задача 1.1. Пусть (M, d) – пространство с внутренней метрикой, $A \subset M$ – связное открытое подмножество. Докажите, что на A существует внутренняя метрика d', такая, что у каждой точки $a \in A$ есть окрестность U, такая, что $d'\Big|_U = d\Big|_U$.

Задача 1.2. Пусть X – компактное топологическое пространство, а $\{d_i\}$ – набор метрик, согласованных с топологией. Предположим, что $d_i: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ равномерно сходится к $d: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^{\geqslant 0}$, а все метрики d_i внутренние. Докажите, что d – тоже внутренняя метрика.

Задача 1.3. Докажите, что каждое компактное метрическое пространство можно изометрично вложить в компактное пространство с внутренней метрикой.

Задача 1.4 (2 балла). Пусть $f: M \longrightarrow M$ – отображение метрических компактов, такое, что $d(f(x), f(y)) \geqslant d(x, y)$. Докажите, что это изометрия.

Задача 1.5. Неравенство неархимеда есть неравенство $d(x, y) \leqslant \max(d(x, z), d(y, z))$. Метрическое пространство, в котором выполнено это неравенство для всех x, y, z, называется **неархимедовым**. Пусть M – бесконечное неархимедово метрическое пространство. Докажите, что M несвязно.

Задача 1.6. Дана выпуклая функция на бесконечномерном нормированном пространстве. Всегда ли она непрерывна?

Задача 1.7. Докажите, что норма $|\cdot|$ на векторном пространстве является евклидовой тогда и только тогда, когда $|v + w|^2 + |v - w|^2 = 2(|v|^2 + |w|^2)$ для всех v, w.

Задача 1.8. Приведите пример полного пространства с внутренней метрикой, в котором не существует кратчайших между некоторыми точками.

Задача 1.9. Приведите пример кривой $\gamma: [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}^2$ такой, что угол между γ и γ не существует.

1.2. Метрические графы и метрика слов на группе (листки 3, 9)

Определение 1.1. Отображение $f: X \longrightarrow Y$ называется **билипшицевым с константой** C, или просто **билипшицевым**, если это биекция, причем f и f^{-1} C-липшицевы (то есть удовлетворяют $d(f(x), f(y)) \leqslant C d(x, y)$).

Определение 1.2. ε**-сеть** в метрическом пространстве M есть такое множество $N \subset M$, что объединение ε-шаров с центрами в N равно M.

Определение 1.3. Пространства X и Y **квазиизометричны**, если для какого-то ε в X и в Y существуют ε-сети X_ε и Y_ε, между которыми есть билипшицево отображение.

Определение 1.4. Пусть G – группа. Множество $S \subset G$ называется **набором образующих**, если все элементы G выражаются через произведения элементов x_i, x_j^{-1}, для каких-то $x_i, x_j \in S$. Каждое такое произведение называется **словом** от x_i, x_j^{-1}. В дальнейшем, мы будем предполагать по умолчанию, что любой набор образующих S содержит x^{-1} вместе с каждым $x \in S$.

Определение 1.5. Пусть G – группа, а $S \subset G$ – набор образующих. **Граф Кэли** G есть метрический граф, полученный следующим образом. Вершины графа Кэли суть элементы G, а ребра соединяют две вершины g, g', если $g' = gs$, где $s \in S$. Длины всех ребер графа Кэли равны 1.

Определение 1.6. Пусть G – группа, а $S \subset G$ – набор образующих. **Метрика слов** d_S на группе есть метрика на G как на множестве вершин графа Кэли.

Определение 1.7. Две группы с заданными наборами образующих называются **квазиизометричными**, если квазиизометричны их графы Кэли.

Задача 1.10. Докажите, что $\mathbb{Z}^n$ с метрикой слов не квазиизометрична $\mathbb{Z}^m$, для $n \neq m$. Докажите, что $\mathbb{Z}^2$ не квазиизометрична свободной группе.

Задача 1.11 (2 балла). Пусть $A = \langle a, b \;\;|\;\; aba^{-1}b^{-1} = b\rangle$ – группа, заданная образующими a, b и соотношением $aba^{-1}b^{-1} = b$. Докажите, что количество вершин $|B_r(1)|$ в шаре радиуса r растет быстрее любого полинома от r. Выведите из этого, что A не квазиизометрична $\mathbb{Z}^n$ для любых n.

Задача 1.12. Пусть $\Gamma_0 \subset \Gamma$ – подгруппа конечного индекса. Докажите, что Γ_0 квазиизометрична Γ. Выведите из этого, что свободная группа $\mathbb{F}_3$ от трех образующих квазиизометрична $\mathbb{F}_2$.

Указание. Реализуйте $\mathbb{F}_3$ как подгруппу конечного индекса в $\mathbb{F}_2$.

Задача 1.13. Докажите, что $\mathbb{R}^2$ не квазиизометрично гиперболической плоскости (плоскости Лобачевского) $\mathbb{H}^2$.

Задача 1.14. Докажите, что бесконечномерное гильбертово пространство не квазиизометрично $\mathbb{H}^2$.

Определение 1.8. Напомню, что **расстояние Громова-Хаусдорфа** между метрическими пространствами X, Y есть инфимум всех ε таких, что X и Y изометрично вкладываются в метрическое пространство M, причем образ X содержится в ε-окрестности образа Y, а образ Y содержится в ε-окрестности образа X.

Задача 1.15. Докажите, что всякое компактное метрическое пространство с внутренней метрикой можно получить как предел Громова-Хаусдорфа последовательности метрических графов.

1.3. Пространства Александрова (листки 5-7)

Определение 1.9. Пусть a, b, c – точки в пространстве (M, d) со строго внутренней метрикой, а $\gamma : [0, d(a,b)] \longrightarrow M$ – кратчайшая с геодезической параметризацией, соединяющая точки a, b. Рассмотрим функцию $d_c : [0, d(a,b)] \longrightarrow \mathbb{R}^{\geqslant 0}$, переводящую t в $d(c, \gamma(t))$. Пусть $\triangle(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) \subset \mathbb{R}^2$ – треугольник сравнения, а $d_{\bar{c}} : [0, d(a,b)] \longrightarrow \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ – функция, переводящая t в $d(\bar{c}, \bar{\gamma}(t))$, где $\bar{\gamma} : [0, d(a,b)] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ обозначает сторону треугольника сравнения с нормальной параметризацией. Функция $d_{\bar{c}}$ называется **функцией сравнения**. Пространство M называется **пространством неотрицательной/неположительной кривизны в целом**, если для любых a, b, c, функция сравнения удовлетворяет неравенству $d_c \geqslant d_{\bar{c}}$ (соответственно, $d_c \leqslant d_{\bar{c}}$). Пространство M называется **пространством Александрова неотрицательной/неположительной кривизны**, если у каждой точки есть окрестность неотрицательной/неположительной кривизны в целом. Пространства неположительной кривизны в целом также называются **CAT(0)-пространствами** (в честь Эли Картана, Д. А. Александрова и В. А. Топоногова; это название принадлежит М. Громову).

Задача 1.16. Докажите, что конус над метрическим графом Γ является пространством неположительной кривизны тогда и только тогда, когда в Γ нет циклов короче 2π.

Задача 1.17. Докажите, что $\mathbb{R}^n$ с нормой L^1 не имеет ни неотрицательной, ни неположительной кривизны.

Задача 1.18. Пусть M – векторное пространство с нормой, которое является пространством неотрицательной кривизны. Докажите, что эта норма евклидова.

Задача 1.19. Пусть $M \subset \mathbb{R}^2$ – евклидова плоскость с вырезанным из нее кругом. Докажите, что M – пространство неположительной кривизны.

Определение 1.10. **Геодезическое пространство** есть пространство, любые две точки которого соединяются кратчайшей. **Пространство Адамара** есть полное, односвязное пространство Александрова неположительной кривизны, которое геодезично.

Определение 1.11. **Выпуклая функция** на геодезическом пространстве есть функция, которая выпукла на любой кратчайшей. **Выпуклое подмножество** есть подмножество, которое содержит вместе с любой парой точек любую соединяющую их кратчайшую.

Определение 1.12. Функция $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ на метрическом пространстве называется **λ-выпуклая**, если для любой геодезической $\gamma : [0, t] \longrightarrow M$, фукция $u \longrightarrow f(\gamma(u)) - \lambda u^2$ выпукла.

Задача 1.20 (2 балла). Докажите, что в пространстве Адамара расстояние до выпуклого множества – выпуклая функция.

Задача 1.21 (2 балла). Пусть $\lambda > 0$. Докажите, что любая λ-выпуклая функция на полном геодезическом пространстве имеет минимум.

Задача 1.22 (2 балла). Пусть M – геодезическое пространство. Обозначим за $K_4(M) \subset \mathbb{R}^6$ подмножество в $\mathbb{R}^6$, образованное числами $|ab|, |ac|, |ad|, |bc|, |bd|, |cd|$ для всех четверок $\{a, b, c, d\} \subset M$. Предположим, что $K_4(M) \subset K_4(\mathbb{R}^2)$. Постройте изометрию между M и выпуклым подмножеством $\mathbb{R}^2$.

1.4. Пространства, гиперболические по Громову (листок 8)

Определение 1.13. Геодезический треугольник $\triangle(abc)$ в метрическом пространстве есть треугольник, составленный из трех вершин a, b, c, соединенных кратчайшими, которые я буду обозначать за $[a, b], [b, c]$ и $[c, a]$. **Талия** треугольника есть супремум расстояния от точки z, лежащей на одной из сторон, до объединения двух других. Треугольник называется **δ-тонким (по Рипсу)**, если его талия не больше δ. Иначе говоря, каждая сторона такого треугольника лежит в δ- окрестности двух других.

Определение 1.14. Метрическое пространство X с внутренней метрикой называется **δ-гиперболическим** (по Рипсу), если все геодезические треугольники δ-тонкие. Будем говорить, что X **гиперболично**, если оно δ-гиперболично для какой-то константы δ.

Задача 1.23 (2 балла). Пусть M – геодезическое пространство, такое, что любая петля может быть стянута в точку внутри своей δ-окрестности. Докажите, что M гиперболично.

Задача 1.24. Пусть a, b, c, d – четыре точки в δ-гиперболическом геодезическом пространстве, а D – объединение всех отрезков, соединяющих эти точки. Докажите, что существует дерево T из пяти геодезических сегментов, соединяющих a, b, c и d, такое, что D лежит в 2δ-окрестности T, а T лежит в 2δ-окрестности D.

Задача 1.25 (2 балла). Пусть M δ-гиперболическое, а D – геодезический 2^n-угольник. Докажите, что каждая его сторона лежит в $n\delta$-окрестности остальных сторон.

Определение 1.15. ε-квазивыпуклое подмножество геодезического пространства есть такое подмножество $Z \subset M$, что кратчайшая, соединяющая любые две точки Z, лежит в ε-окрестности Z.

Задача 1.26. Пусть M – δ-гиперболическое пространство, а $B_r(x)$ – шар радиуса r. Докажите, что он δ-квазивыпуклый.

Задача 1.27. Пусть x, y, z – точки на границе шара $B_r(s)$ в δ-гиперболическом пространстве, причем расстояние $|xy| = |yz| = d < \frac{1}{10}r$. Докажите, что $|xz| \leqslant d + 4\delta$.

Задача 1.28. Пусть $\gamma_1, \gamma_2 : \mathbb{R} \longrightarrow M$ – бесконечные кратчайшие в δ-гиперболическом пространстве, причем какая-то точка γ_1 отстоит от γ_2 на расстояние больше 2δ. Докажите, что $\lim\limits_{t \mapsto \infty} d(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) = \infty$, или $\lim\limits_{t \mapsto -\infty} d(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) = \infty$.