

1. Метрическая геометрия, лекция 1: обзор методов и результатов

В этой главе я вкратце расскажу о применениях метрической геометрии, опуская многие существенные детали. Читатель, который хочет обучиться конкретным методам и избежать научно-популярных экскурсов и философских рассуждений, приглашается в следующую главу, которая никак не опирается на эту.

1.1. Метрическая геометрия: история и применения

Мне очень не нравится, как звучат слова "метрическая геометрия". Это выражение, которое выглядит дурной тавтологией в духе "масло масляное". Но подобное сравнение далеко от реальности: в геометрии, вплоть до последнего времени (условно – 1990-х) метрические методы находились на далекой периферии.

"Геометрия" – наука об измерении земли; метрические пространства – те пространства, где результатом измерения было число. Это не нравилось ни грекам, которым казалось, что лучше не измерять расстояния числами, а определять числа как классы эквивалентности отрезков, ни Гильберту, который разработал систему аксиом планиметрии, вообще не упоминавшую чисел и измерений.

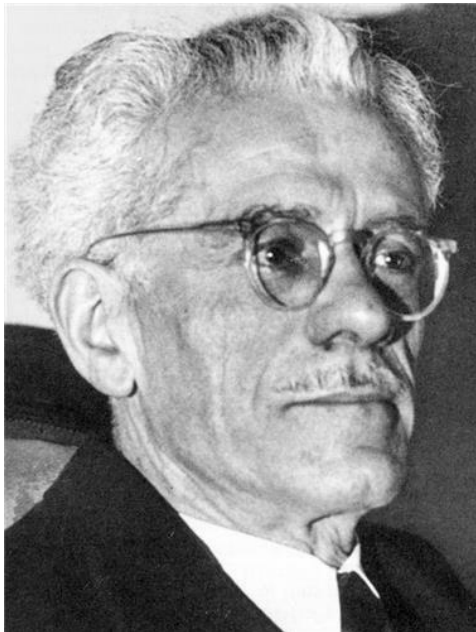
Дальнейшее развитие математики 20-го века, от Гильберта и до Бурбаки, отодвигало геометрию все дальше и дальше от метрических пространств; кульминацией этого подхода была идея Андре Вейля, который определил "униформные структуры", с целью избавиться от метрики в последнем участке топологии, в котором она все еще присутствовала. Развитая в стройную теорию Дьедонне и Туки, теория униформных структур вошла в учебники Бурбаки, окончательно выкинув метрики из топологии.

Возвращение метрических пространств в топологию связано с деятельностью А. Д. Александрова и его школы, особенно М. Л. Громова, который сделал из топологического применения метрических структур целый раздел математики с крайне изящными методами и чрезвычайно широкой областью применения.

Основная учебная литература по этим методам – книга самого Громова "Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces" и

Бураго, Бураго, Иванов, "Курс метрической геометрии".

Определение метрического пространства принадлежит Морису Фреше (1878-1973); оно опубликовано в 1905 ("La notion d'ècart et le calcul fonctionnel") и в его докторской диссертации (1906). Название "метрическое пространство" придумал Хаусдорфф.



Maurice Fréchet
(1878 – 1973)

Эмансипация топологии от метрических пространств была одним из главных направлений топологии 1920-х и 1930-х. Основное применение метрических пространств на тот момент состояло в том, что в метрическом пространстве непрерывность можно определить в терминах сходимости последовательностей. Для более общих (неметризуемых) топологических пространств это понятие заменили на понятие сходимости по фильтру, ультрафильтру и фильтрованному множеству.

Ныне эти вещи редко упоминаются, потому что для более общих топологических пространств можно определить непрерывное отображение как такое, что прообраз каждого открытого множества открыт, а для практических применений обыкновенно можно обойтись метризуемыми.

Зато оказалось, что методы метрической геометрии можно применять в самых неожиданных разделах математики; так, из объединения

теории метрических пространств и теории групп появилась "геометрическая теория групп", изучающая абстрактные группы методами топологии, функционального анализа и метрической геометрии.

Один из наиболее важных классов групп, "группы, гиперболические по Громову", определяется целиком в терминах метрической геометрии.

Теория групп - не единственная сфера применения метрической геометрии, но наиболее активная. Помимо теории групп, методы Громова нашли широкое применение в дифференциальной геометрии, топологии и эргодической теории.

В этих лекциях я ограничусь гиперболическими группами и расскажу их определение и некоторые свойства; также я расскажу, как доказать метрическими методами классический результат римановой геометрии – теорему Картана-Адамара.

1.2. Пространство метрических пространств

Метрическое пространство есть пространство с заданной на нем "метрикой", которая формально определяется так.

Определение 1.1. Пусть M – множество. **Метрикой** на M называется функция $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0} \cup \infty$, удовлетворяющая следующим условиям

Невырожденность: $d(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$.

Симметричность: $d(x, y) = d(y, x)$

Неравенство треугольника: $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

для любых точек $x, y, z \in M$.

Основная идея, на которой основаны почти применения метрической геометрии, такова. На множестве классов изометрии всех полных метрических пространств ограниченной мощности задана "метрика Громова-Хаусдорфа", которая превращает это множество в метрическое пространство. Ее можно определить следующим образом.

Определение 1.2. Если $x \in X$ – точка, а ε – вещественное число, множество $B_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$ называется (**открытым**) **шаром радиуса ε с центром в x** , или **ε -шаром**. **Замкнутый шар** это $\overline{B}_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid d(x, y) \leq \varepsilon\}$.

Определение 1.3. Пусть $A, B \subset M$ – замкнутые подмножества метрического пространства. Обозначим за $A(\varepsilon)$ ε -окрестность A , то есть объединение всех ε -шаров с центром в A . **Расстояние Хаусдорфа** $d_H(A, B)$ есть инфимум всех $\varepsilon \in \mathbb{R}$ таких, что $A \subset B(\varepsilon)$ и $B \subset A(\varepsilon)$.

Следующее упражнение требует хорошего знакомства с методами теории метрических пространств; при первом чтении его, возможно, имеет смысл пропустить.

Задача 1.4. Докажите, что d_H задает на замкнутых подмножествах метрического пространства M метрику.

Определение 1.5. **Диаметр метрического пространства** M есть супремум $d(x, y)$ для всех $x, y \in M$.

Определение 1.6. **Изометрическое вложение** это отображение, которое сохраняет метрику (и а постериори является вложением).

Определение 1.7. Последовательность $\{a_i\}$ точек метрического пространства называется **последовательностью Коши**, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется ε -шар B_ε , содержащий почти все элементы $\{a_i\}$. Метрическое пространство называется **полным** если в нем каждая последовательность Коши сходится.

Определение 1.8. Пусть A, B – полные метрические пространства конечного диаметра. Определим **расстояние Громова-Хаусдорфа** $d_G(A, B)$ как инфимум $d_H(\psi(A), \varphi(B))$ взятый по всем изометрическим вложениям из A, B в третье метрическое пространство M .

Следующее упражнение существенно нетривиально.

Задача 1.9. Докажите, что d_G задает на множестве $\mathcal{M}$ полных метрических пространств конечного диаметра метрику. Более того, $\mathcal{M}$ полно.

Без требования полноты это, очевидно, не так.

Задача 1.10. Докажите, что расстояние Громова-Хаусдорфа между отрезком $[0, 1]$ и множеством всех рациональных точек в этом отрезке равно нулю.

Одно из основных применений этой геометрической идеи – теорема Громова о прекомпактности, которая утверждает, что замыкание некоторого множества римановых многообразий компактно в громовском пространстве всех метрик. Эта теорема имеет множество применений к геометрии и топологии; на ней и аналогичных идеях основано доказательство Перельмана гипотезы Пуанкаре.

Я не хочу определять тут, что такое кривизна Риччи Ric ; достаточно сказать, что Ric это симметрическая форма на многообразии, которая однозначно определяется его римановой метрикой g . Читатель, не знающий, что такое риманова метрика, может не огорчаться: пользоваться римановыми многообразиями я в дальнейшем не планирую.

Говорится, что кривизна Риччи **ограничена снизу**, если существует такое $C > 0$, что $\text{Ric} + Cg$ – положительно определенная билинейная симметрическая форма.

Определение 1.11. ε -**сеть** в метрическом пространстве M есть такое подмножество $S \subset M$, что $S(\varepsilon) = M$. ε -сеть **минимальна**, если никакие ее собственные подмножества $S' \subsetneq S$ не являются ε -сетями.

В скором времени я воспользуюсь следующим тривиальным наблюдением.

Лемма 1.12: Пусть $\mathcal{X}$ – множество всех конечных метрических пространств мощности N и диаметра d . Тогда $\mathcal{X}$ компактно по Громову.

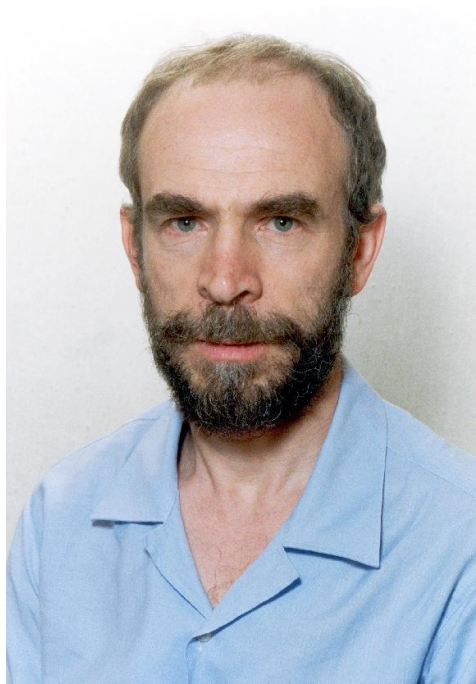
Задача 1.13. Докажите это!

Бишоп и Громов доказали, что на многообразии M с ограниченной кривизной Риччи объем шара не превышает объем такого же шара в пространстве Лобачевского, евклидовом или сфере с таким же ограничением на кривизну Риччи. Немного повозившись, из этого можно вывести, что любая минимальная ε -сеть в многообразии M с кривизной Риччи, ограниченной C и диаметром d имеет не больше $N(\varepsilon)$ элементов, где $N(\varepsilon)$ – какая-то функция ε , зависящая только от констант C и d .

С другой стороны, каждое компактное многообразие является пределом (по Громову-Хаусдорфу) любой последовательности своих ε -сетей, с ε сходящимся к 0. В ситуации, когда каждая из этих ε -сетей имеет число элементов, ограниченное универсальной константой $N(\varepsilon)$, множество этих ε -сетей компактно по Громову в силу Леммы 1.12. Из этого следует, что и множество таких многообразий компактно. Этот же самый

аргумент применим к доказательству следующего более общего утверждения.

Задача 1.14. Пусть $N(\varepsilon)$ какая-то функция, а $\mathcal{X}$ множество метрических пространств M диаметра $\leq d$ таких, что для каждого $\varepsilon > 0$ в каждом $M \in \mathcal{X}$ найдется ε -сеть с не более чем $N(\varepsilon)$ элементами. Докажите, что замыкание $\mathcal{X}$ в пространстве Громова всех метрических пространств компактно.



Михаил Громов
(р. 23 декабря 1943)

1.3. Асимптотический конус

Другое применение пространства метрических пространств таково.

Определение 1.15. Отмеченное пространство есть пространство с выбранной на нем точкой. Метрика Громова-Хаусдорфа на отмеченных пространствах определяется похожим образом.

Определение 1.16. Пусть A, B – локально компактные отмеченные метрические пространства конечного диаметра. Определим **расстояние Громова-Хаусдорфа** $d_G(A, B)$ как инфимум $d_H(\psi(A), \varphi(B))$ взятый по всем изометрическим вложениям из A, B в какое-то третье метрическое пространство M , переводящие отмеченные точки A, B в одну и ту же точку.

Это определение позволяет ввести топологию на множестве отмеченных метрических пространств бесконечного диаметра.

Определение 1.17. Последовательность (M_i, m_i) отмеченных метрических пространств сходится к (M, m) , если для каждого $R > 0$, соответствующие последовательности шаров $B_R(m_i)$ сходятся к $B_R(m)$ в смысле Громова-Хаусдорфа.

Определение 1.18. **Асимптотический конус** (X, d) отмеченного метрического пространства (M, m, d) есть предел последовательности $(M, m, \alpha_i d)$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$ стремится к ∞ (в этом случае (X, d) называется **асимптотическим конусом в m**) или α стремится к 0 (**асимптотический конус на бесконечности**).

Асимптотический конус в m можно визуализировать как картинку в микроскопе, приложенном к M в точке m , при увеличении разрешения микроскопа, стремящемся к бесконечности. Асимптотический конус на бесконечности – картинка в телескопе, который отнесен от M на расстояние, которое стремится к бесконечности.

Если наше многообразие имело ограниченную кривизну Риччи, асимптотический конус на бесконечности существует по теореме Громова о компактности. Асимптотический конус в нуле всегда существует, потому что при растяжении метрики в C раз кривизна Риччи не меняется, значит, неравенство $\text{Ric} + Cg > 0$ остается верным.

Одно из применений этой идеи встречается в доказательстве Перельмана гипотезы Пуанкаре. Начав с трехмерного риманова многообразия, Перельман запускал на нем "поток Риччи", решая уравнение $\dot{g}_t = -\text{Ric}(g_t)$, где g_t – семейство метрик, зависящих от параметра $t \in \mathbb{R}$ ("уравнение Риччи-Гамильтона"). Если бы это уравнение решалось для всех t , гипотеза Пуанкаре бы следовала из асимптотического поведения потока Риччи: это наблюдение сделал Гамильтон в начале 1980-х. К сожалению, на практике поток Риччи может привести к особой метрике. Перельман рассмотрел асимптотический конус предельной метрики в ее особенности, и доказал, что она задает стационарное решение уравнения

Риччи-Гамильтона. С помощью классификации стационарных решений ("солитонов Риччи") Перельман установил, что, вырезав особенность и доклеив вместо нее подходящую пленку, можно добиться того, что уравнение Риччи-Гамильтона будет решаться еще какое-то время, вплоть до появления новых особенностей, и так далее.

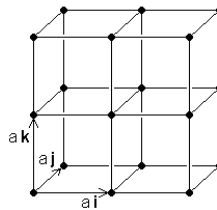
1.4. Графы Кэли

С помощью асимптотического конуса очень удобно изучать графы. Надо представить граф в виде метрического пространства (вершины – точки, ребра – соединяющие их отрезки). Изобразив группу в виде графа, эти же методы можно применять к группам.

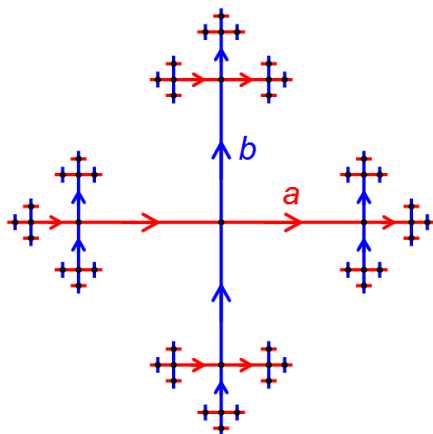
Определение 1.19. Набор образующих группы G есть множество элементов S , мультипликативно порождающих G . В дальнейшем, мы будем всегда предполагать, что $s \in S \Leftrightarrow s^{-1} \in S$.

Определение 1.20. Пусть G – группа, $\{s_i\}$ – набор образующих. **Граф Кэли** пары $(G, \{s_i\})$ есть граф, вершины которого – элементы G , а ребра соединяют точки вида g и gs_i . Полагая длину ребер графа равной 1, мы определяем граф Кэли как метрическое пространство с естественной метрикой графа (в дальнейшем я буду подробнее говорить о таких метриках, и дам строгое определение).

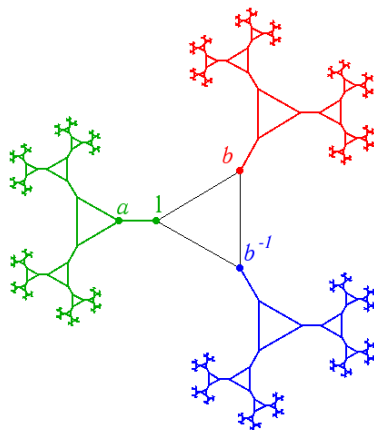
Пример 1.21: Граф Кэли для $\mathbb{Z}^n$ с обычным набором образующих есть кубическая решетка.



Граф Кэли для свободной группы – регулярное дерево



Граф Кэли свободной группы $\mathbb{F}_2$ с образующими a, b, a^{-1}, b^{-1} .



Граф Кэли для $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Громов изучал этим методом "группы полиномиального роста": такие группы, что в шаре радиуса R в графе Кэли содержится не более R^d вершин, для заданного $d \in \mathbb{Z}$. Он доказал, что ее асимптотический конус – топологическое многообразие. В силу 5-й проблемы Гильберта, решенной в 1953-м Ямабе, Глизоном, Монтгомери и Зиппиным, она должна быть группой Ли, то есть гладким многообразием. Но "альтернатива Титса" утверждает, что дискретная подгруппа группы Ли либо разрешима, либо содержит свободную группу, то есть имеет экспоненциальный рост. Из этого Громов вывел, что все группы полиномиального роста нильпотентны.

1.5. Квазиизометрии

Отображение $\varphi : M \longrightarrow M'$ метрических пространств называется **квазиизометрией**, если заданы константы $C, C' > 0$ такие, что для любых $x, y \in M$ имеет место

$$C^{-1}d(x, y) - C' \leq d(\varphi(x), \varphi(y)) \leq Cd(x, y) + C',$$

иначе говоря, если отображение искажает расстояние не больше, чем линейным образом. Два пространства M, M' называются **квазиизометричными**, если существуют отображения $\varphi : M \longrightarrow M'$ и $\psi : M' \longrightarrow M$, такие, что $\varphi \circ \psi$ и $\psi \circ \varphi$ – квазиизометрии.

Задача 1.22. Докажите, что квазиизометричность является отношением эквивалентности.

Как и асимптотический конус, класс квазиизометрии – весьма грубый инвариант метрического пространства. Его полезность объясняется двумя наблюдениями.

Лемма 1.23: Пусть G – конечно-порожденная группа, S, S' два набора ее образующих, а M, M' соответствующие графы Кэли. Тогда они квазиизометричны.

Доказательство. Шаг 1: Отметим сначала, что граф Кэли M квазиизометричен множеству своих вершин M_0 . Действительно, он лежит в $\frac{1}{2}$ -окрестности $M_0 \subset M$. В качестве $\varphi : M_0 \longrightarrow M$ можно взять тождественное вложение, в качестве $\psi : M \longrightarrow M_0$ отображение, которое переводит точку в ближайшую к ней вершину; очевидно, $\varphi \circ \psi$ не искажает расстояния, а $\psi \circ \varphi$ искажает не больше, чем на 1.

Шаг 2: Возьмем множества вершин M_0, M'_0 графов Кэли M, M' с присущими им метриками, а в качестве φ и ψ возьмем тождественные отображения. Пусть C_1 есть максимальная длина слова от образующих S , выражающего образующие из S' , а C_2 – максимальная длина слова от образующих S' , выражающего образующие из S . Обозначим за C произведение $C_1 C_2$. Поскольку $\psi : M \longrightarrow M'$ искажает расстояние не больше, чем C_1 раз, а $\varphi : M' \longrightarrow M$ не больше, чем в C_2 раз, их композиция искажает расстояния не больше, чем в C раз, давая

$$C^{-1}d(x, y) \leq d(\varphi(x), \varphi(y)) \leq Cd(x, y).$$

■

Из этого следует, что метрика, заданная на группе через ее вложение в граф Кэли, единственна с точностью до квазиизометрии. Такая метрика называется **метрикой слов** (word metric).

Другое наблюдение называется "теорема Милнора-Шварца", в честь Дж. Милнора и А. С. Шварца, впоследствии ставшего знаменитым математиком и пионером суперсимметрии. Работа Шварца¹ где эта теорема доказана – еще студенческая, ему был 21 год на момент публикации. Статья Милнора, который независимо получил этот результат - 1968 года.²

Теорема 1.24: (Милнор-Шварц)

Пусть G – дискретная группа, свободно действующая изометриями на метрическом пространстве M , а M/G – пространство орбит с метрикой Хаусдорфа. Предположим, что метрика Хаусдорфа на M/G невырождена, и этот фактор компактен. Тогда M квазиизометрична группе G с метрикой слов.

Читатель может попробовать доказать этот нетривиальный результат самостоятельно; в конце этих лекций и в листочках доказательство приводится.

1.6. Интересная цитата из воспоминаний С. П. Новикова

Коль скоро уж речь зашла о А. С. Шварце, он знаменит своими работами по матфизике, и сейчас никто особо и не помнит, что Шварц в бытность свою аспирантом стал основателем московской топологической школы и через это пострадал. Я процитирую соответствующий кусок из воспоминаний С. П. Новикова (многократно слышанный мною от московских топологов).³

- “Собственно говоря, именно по инициативе Шварца на мехмате начались семинары по топологии. Не Постникова и не тем более

¹A. S. Švarc, *A volume invariant for coverings*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **105** (1955), 32–34.

²Milnor, J. *A note on curvature and fundamental group*, J. Differential Geom. **2** (1968), no. 1, 1–7.

³Мехматяне вспоминают 2, ред. В. Б. Демидовича, Москва, мехмат МГУ, 2009, <http://www.math.ru/lib/files/pdf/mehmat/mm3.pdf>

Болтянского - у Болтянского уровень понимания топологии был ниже, чем у Постникова и Шварца...

- *Кстати, семинар этот был объявлен на кафедре алгебры, потому что Михаил Михайлович Постников был на ней уже профессором. Болтянский был тогда ещё кандидатом, а Шварц - аспирантом. В объявлении писалось, какая это замечательная наука - алгебраическая топология - в отличие от топологии теоретико-множественной. Конечно, это объявление для классической топологии было оскорбительным!*
- *И кто-то Павлу Сергеевичу, так сказать, “стукнул” про это. Павел Сергеевич вызвал всех нас - и студентов, и профессоров - и сказал, правильно сказал: “Я считаю, что за это омерзительное объявление, которое висело, несёт ответственность старший по званию, то есть вы, Михаил Михайлович!” И тут Постников сделал вещь, которую я ему никогда простить не мог... Он сказал: “Мы с Владимиром Григорьевичем здесь ни при чём, это всё Альберт Соломонович”.*
- *Поэтому-то Шварц не был оставлен на мехмате. Павел Сергеевич ему этого объявления просто не простил, и Шварц уехал в Воронеж.*
- *Вся активность на семинаре шла от Шварца. Шварц - замечательный учёный!*



Альберт Соломонович Шварц (р. 24.06.1934)
фотография: Renate Schmid, MFO, 2004

Интересно, что Новиков запомнил объявление, вывешенное Шварцем, как оскорбительное для общей топологии и ее адептов, в то время как там было написано просто "Общая топология изучает простые свойства сложных пространств, геометрическая топология изучает сложные свойства простых пространств (многообразий многогранников)". Сейчас уже непонятно, что такого ужасно оскорбительного они там нашли.

1.7. Группы, гиперболические по Громову

Другой класс групп, для которого полезно рассматривать асимптотический конус - группы, гиперболические по Громову. Гиперболическую группу можно определить как группу, асимптотический конус которой - это дерево (возможно, с континуальным количеством ребер и вершин). Это не самое удобное определение (в этих лекциях я буду пользоваться десятком других определений, доказывая их равносильность), но оно - самое геометрически наглядное.

Общая группа устроена весьма парадоксально; Громов где-то замечает, что "любая теорема, относящаяся ко всем группам, либо неверна, либо очевидна". В группах неразрешима проблема слов (в общем случае нельзя ни доказать, ни опровергнуть что данные два слова представляют один и тот же объект) и проблема изоморфизма (нельзя ни доказать, ни опровергнуть, что данные две группы, заданные образующими и соотношениями, изоморфны).

Громов предположил, что в "достаточно общих" группах эти парадоксы неверны. И в самом деле, можно доказать, что общая группа гиперболическа с вероятностью 1. Точнее можно сказать так: группа, заданная случайным набором k образующих и m соотношений длины $l_1, \dots, l_m$, является гиперболической с вероятностью, которая стремится к 1, когда $l_1, \dots, l_m$ стремятся к бесконечности. В гиперболических группах проблема различения слов и проблема изоморфизма алгоритмически разрешима.

Помимо случайных групп, гиперболическими являются решетки в полупростых группах Ли ранга 1 (то есть в группах $SO(1, n)$, $SU(1, n)$, $Sp(1, n)$ и некоторых других), фундаментальные группы пространств отрицательной кривизны, свободные группы и так далее.

У моих лекций есть две основные задачи: дать введение в метрическую геометрию, и рассказать, почему основные определения гиперболических групп равносильны и не зависят от выбора образующих и соотношений.