2. Метрическая геометрия, лекция 2: внутренние метрики

2.1. Общая топология: введение

Для удобства читателя, я соберу тут некоторые определения из общей топологии. В принципе, предполагается, что читателю они известны; для первого знакомства можно прорешать первый листочек из этого курса, а еще лучше – проработать какой-нибудь учебник с основами топологии.

Определение 2.1. Пусть M - множество, а $\mathcal{U} \subset 2^M$ набор подмножеств, называемых **открытыми**. $\mathcal{U}$ **задает топологию** на M, если

(i) Любое объединение открытых подмножеств открыто.

(ii) Конечное пересечение открытых подмножеств открыто.

(iii) M и пустое множество $\emptyset$ открыты.

Такое M называется **топологическим пространством**.

Определение 2.2. **Замкнутым множеством** называется множество, дополнение которого открыто.

Определение 2.3. **Базой топологии** на M называется набор $\mathcal{U}$ подмножеств M, состоящий из открытых множеств, и такой, что любое открытое подмножество M получено из элементов $\mathcal{U}$ взятием объединений.

Определение 2.4. **Окрестностью** подмножества $Z \subset M$ называется любое открытое множество, содержащее Z. **Замыканием** подмножества $Z \subset M$ называется пересечение всех замкнутых подмножеств, содержащих Z.

Определение 2.5. Отображение $\varphi : M \longrightarrow N$ называется **непрерывным**, если прообраз любого открытого множества открыт.

Определение 2.6. **Пределом** последовательности $\{x_i\}$ точек $x_i \in M$ называется такая точка $x \in M$, что в любой окрестности x содержатся почти все элементы $\{x_i\}$.

Определение 2.7. Пусть M - множество. **Метрикой** на M называется функция $d: \ M \times M \longrightarrow \mathbb{R}^{\geqslant 0} \cup \infty$, удовлетворяющая следующим условиям

Невырожденность: $d(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$.

Симметричность: $d(x, y) = d(y, x)$

Неравенство треугольника: $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$

для любых точек $x, y, z \in M$.

Определение 2.8. Если $x \in X$ – точка, а ε – вещественное число, множество
$$B_\varepsilon(x) = \{y \in X \ \ | \ \ d(x, y) < \varepsilon\}$$
называется **(открытый) шар радиуса ε с центром в x**, или **ε-шар**. **Замкнутый шар** это
$$\overline{B}_\varepsilon(x) = \{y \in X \ \ | \ \ d(x, y) \leqslant \varepsilon\}.$$

Определение 2.9. Открытое множество в метрическом пространстве M есть объединение открытых шаров.

Задача 2.10. Докажите, что это задает топологию на M.

2.2. Общие метрики и внутренние метрики

Общая метрика не определяется своими локальными свойствами. Некоторые свойства метрических пространств являются **локальными**. Например, если каждая точка метрического пространства M имеет окрестность, замыкание которой полно, M тоже полно. Но восстановить произвольную метрику из ограничения на элементы покрытия невозможно.

Для иллюстрации этого, рассмотрим метрическое пространство (M, d), и положим $d_1(x, y) := \min(1, d(x, y))$. Легко видеть, что d_1 удовлетворяет двум из трех аксиом метрики (симметричность, положительность). Чтобы убедиться, что $d_1(x, y) \leqslant d_1(x, z) + d_1(z, y)$, мы докажем более общее утверждение.

Лемма 2.11: Пусть $\tau: \ \mathbb{R}^{\geqslant 0} \longrightarrow \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ монотонное отображение, вогнутое ("выпуклое вверх"), причем $\tau(0) = 0$, а (M, d) – метрическое пространство. Тогда $d_\tau(x, y) := \tau(d(x, y))$ тоже метрика.

Доказательство: Вогнутость τ равносильна тому, что $\tau(x+y) \leqslant \tau(x)+\tau(y)$ (проверьте это). В частности, функция $m_1(a) := \min(1,a)$ вогнута (проверьте). С другой стороны, неравенство треугольника для d_τ следует из монотонности и $\tau(x+y) \leqslant \tau(x)+\tau(y)$ (проверьте) ∎

Определение 2.12. Рассмотрим метрическое пространство (M,d), и положим $d_r(x,y) := \min(r, d(x,y))$. Метрическое пространство (M,d_r), полученное из (M,d), называется **обрезанным** (cutoff metric space).

Такое метрическое пространство не "локально": каждый шар радиуса $\leqslant \frac{1}{2}$ в (M,d) изометричен такому же шару в (M,d_1), но эти две метрики, вообще говоря, не эквивалентны.

Также, в (M,d_1) не верна теорема Хопфа-Ринова (см. следующую лекцию): замкнутые, ограниченные подмножества (M,d_1) не компактны, даже если (M,d_1) локально компактно.

Для многих потребностей метрической геометрии и топологии без локальности обойтись невозможно. Как известно, основная конструкция алгебраической топологии – склейка топологических пространств; в этой науке, основные примеры топологических пространств получаются из полиэдров и шаров склейкой границ.

В метрической геометрии, полиэдральные пространства играют такую же центральную роль. Но если у нас нет локальности, операция склейки не имеет смысла: даже если мы знаем локальное поведение нашей метрики, расстояние на больших дистанциях не определено. Поэтому воленс-ноленс приходится работать с локальными метриками.

Самый простой способ добиться локальности – ограничиться *внутренними метриками.* В этой лекции я определю внутренние метрики и объясню, как их строить.

2.3. Функционал длины на путях

Напомню, что **путь** в топологическом пространстве M есть непрерывное отображение из отрезка $[a,b]$ в M. **Концы** пути $\gamma: [a,b] \longrightarrow M$ суть точки $\gamma(a), \gamma(b)$. В такой ситуации также говорится, что путь γ **соединяет точки** a **и** b.

По разным причинам, о которых я расскажу немного погодя, нам будет удобнее определять метрику в терминах путей и функционала длины на путях. При таком подходе, мы сначала определяем "длину пути", а потом определяем расстояние между точками как инфимум длин всех путей, соединяющих эти точки.

Длину пути можно определить аксиоматически, следующим образом.

Определение 2.13. Пусть M – топологическое пространство. Говорится, что на M **задан класс допустимых путей**, если задано "множество допустимых путей" $[a, b] \longrightarrow M$ и выполнены следующие условия

склейка путей Для любых двух путей $[a, b] \xrightarrow{\gamma_1} M$ и $[b, c] \xrightarrow{\gamma_2} M$, удовлетворяющих $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$, путь $\gamma : [a, c] \longrightarrow M$, равный γ_1 на $[a, b]$ и γ_2 на $[b, c]$, тоже допустим. Такая операция называется **"склейка путей".**

замена параметра Если $\varphi : [a, b] \longrightarrow [c, d]$ – линейное отображение, а путь $\gamma : [c, d] \longrightarrow M$ допустим, путь $\varphi \circ \gamma$ тоже допустим.

ограничение Для каждого пути $[a, b] \xrightarrow{\gamma} M$, и отрезка $[c, d] \subset [a, b]$, ограничение $\gamma|_{[c,d]}$ – тоже допустимый путь. Здесь, как и везде, $\gamma|_{[c,d]}$ обозначает **ограничение пути,** то есть ограничение функции $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ на отрезок $[c, d] \subset [a, b]$.

Пример 2.14: Кусочно-линейные пути (ломаные) в $\mathbb{R}^n$ образуют допустимый класс путей.

Пример 2.15: Кусочно-полиномиальный путь получен склейкой конечного числа путей $\gamma_i : [x_i, x_{i+1}]$, заданных полиномиальными отображениями. Кусочно-полиномиальные пути в $\mathbb{R}^n$ образуют допустимый класс путей.

Пример 2.16: Кусочно-гладкий путь получен склейкой конечного числа путей $\gamma_i : [x_i, x_{i+1}]$, заданных гладкими отображениями. Кусочно-гладкие пути в $\mathbb{R}^n$ образуют допустимый класс путей.

Определение 2.17. **C-Липшицево отображение** есть отображение метрических пространств $\varphi : M \longrightarrow M'$, удовлетворяющее $Cd(x, y) \geqslant d(\varphi(x), \varphi(y))$. **Липшицево отображение** есть C-липшицево с какой-то константой C.

Пример 2.18: Липшицевы пути образуют допустимый класс.

Определение 2.19. Пусть M – топологическое пространство, снабженное допустимым классом путей. Функционал $L(\gamma)$, отображающий допустимые пути в числа, называется **функционалом длины**, если он удовлетворяет следующим условиям.

1. **Аддитивность длины.** Для любого пути $\gamma: [a,c] \longrightarrow M$, и любого $b \in [a,c]$, имеет место равенство $L(\gamma) = L(\gamma|_{[a,b]}) + L(\gamma|_{[b,c]})$.
2. **Непрерывность длины пути как функции от параметра.** Для любого пути $\gamma: [a,c] \longrightarrow M$, функция $L(\gamma\Big|_{[a,b]})$ непрерывно зависит от $b \in [a,c]$.
3. **Замена параметра.** Если $\varphi: [a,b] \longrightarrow [c,d]$ – гомеоморфизм отрезков, а $\gamma: [c,d] \longrightarrow M$ и $\varphi \circ \gamma: [a,b] \longrightarrow M$ – допустимые пути, то $L(\gamma) = L(\varphi \circ \gamma)$.
4. **Длина пути согласована с топологией.** Пусть Z – замкнутое подмножество M, а $x \notin Z$ точка, не лежащая на Z. Тогда существует число $\varepsilon > 0$ такое, что любой путь, соединяющий x с какой-то точкой Z, имеет длину $\geqslant \varepsilon$.

Определение 2.20. Пусть M – топологическое пространство, снабженное классом допустимых путей и функционалом длины. **Метрика путей, связанная с функционалом длины** $d_L: M \times M \longrightarrow \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ определяется как $d_L(x,y) := \inf_\gamma L(\gamma)$, где инфимум берется по всем путям, соединяющим x и y.

Утверждение 2.21: Это метрика.

Доказательство: Симметричность d_L следует из замены параметра $t \longrightarrow (b-t)+a$ в пути $\gamma: [a,b] \longrightarrow M$ (из пути, соединяющего a и b, получаем путь, соединяющий b и a, той же длины).

Положительность $d_L(x,y)$, $x \neq y$ следует из условия 4 ("Длина пути согласована с топологией"), примененного к $Z = y$. В самом деле, существует такое $\varepsilon > 0$, что любой путь, соединяющий x и Z, имеет длину $\geqslant \varepsilon$.

Неравенство треугольника доказывается через склейку путей. Пусть γ_1 – путь, соединяющий x и y, длины $d_L(x,y)+\varepsilon$, а γ_2 – путь, соединяющий y и z, длины $d_L(y,z)+\varepsilon$. Склеив γ_1 и γ_2, получим путь γ, соединяющий x и z, длины $d_L(x,y)+d_L(y,z)+2\varepsilon$, что дает

$$d_L(x,y)+d_L(y,z)+2\varepsilon \geqslant d_L(x,z).$$

■

2.4. Римановы и финслеровы метрики

На практике большинство метрик определяются в терминах функционалов длины.

Пример 2.22: $M = \mathbb{R}^n$ с обычной топологией, класс допустимых путей – кусочно-линейные пути (то есть ломаные), со звеньями $[x_i, x_{i+1}]$, а длина пути определяется формулой $L(\gamma) = \sum |d(x_i, x_{i+1})|$ **("длина ломаной").**

Утверждение 2.23: Построенная по этому функционалу метрика d_L равна обычной метрике.

Доказательство: Действительно, самая короткая ломаная, соединяющая две точки – это отрезок прямой. ■

Пример 2.24: "переход болота" (конформно плоская метрика): $M = \mathbb{R}^n$, класс допустимых путей - кусочно-линейные пути (то есть ломаные), со звеньями $[x_i, x_{i+1}]$, $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{>0}$ непрерывная, положительная функция, а длина пути определяется формулой

$$L(\gamma) = \sum \int_{[x_i, x_{i+1}]} f$$

(интеграл от f по отрезку $[x_i, x_{i+1}]$).

Утверждение 2.25: На классе спрямляемых путей, $\gamma \longrightarrow L(\gamma)$ задает функционал длины.

Доказательство: Единственное нетривиальное место – свойство 2 (непрерывность длины пути как функции его концов). Пусть $\gamma: [a, b] \longrightarrow M$ – спрямляемый путь. Достаточно доказать, что

$$\lim_{b_1 \to b} L\left(\gamma\Big|_{[b_1, b]}\right) = 0.$$

Пусть $a = x_1, ..., x_n = b$ – такое разбиение отрезка $[a, b]$, что

$$\sum d(\gamma(x_i), \gamma(x_{i+1})) \geqslant L(\gamma) - \varepsilon,$$

причем последний отрезок имеет длину не больше ε:

$$d(\gamma(x_{n-1}), \gamma(x_n)) \leqslant \varepsilon.$$

Тогда для каждого $b_1 \in [x_{n-1}, x_n]$, длина $L\left(\gamma\Big|_{[b_1,b]}\right)$ не больше, чем ε плюс длина отрезка $\gamma(x_{n-1}), \gamma(x_n))$, то есть не больше, чем 2ε. Это значит, что для каждого $\varepsilon > 0$, имеем $L\left(\gamma\Big|_{[b_1,b]}\right) \leqslant 2\varepsilon$ для b_1, достаточно близких к b. ■

Пример 2.26: Длина кусочно-гладкого пути $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ с евклидовой метрикой вычисляется по формуле $L(\gamma(t)) := \int_a^b |\gamma'(t)|dt$.

Задача 2.27. Докажите, что это функционал длины, и соответствующая метрика L_d – обычная, плоская.

Пример 2.28: "Финслерова метрика"
Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ открытое подмножество, а $\nu_x : T_x\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ – норма на касательном пространстве, непрерывно зависящая от x. Для кусочно-гладкого пути $\gamma : [a,b] \longrightarrow U$, определим

$$L_\nu(\gamma(t)) := \int_a^b \nu_{\gamma(t)}(\gamma'(t))dt$$

Утверждение 2.29: Это функционал длины.

Доказательство: Условия аддитивности и непрерывности очевидны.

Чтобы доказать согласованность с топологией, выберем такую константу δ, что $\nu_x(v) \geqslant \delta|v|$ в открытом $V \ni x$, не пересекающем Z. Тогда каждый путь γ, соединяющий x и границу ∂V, удовлетворяет $L_\nu(\gamma) \geqslant \delta L(\gamma)$, где L – длина γ в евклидовой метрике. Но $L(\gamma) \geqslant d(x, \partial V)$, а это число положительно, так как ∂V замкнуто.

Инвариантность L_ν при репараметризации следует из формулы

$$\begin{aligned} L_\nu(\varphi\circ\gamma) &= \int_a^b \nu_{\gamma(\varphi(t))}(\varphi\circ\gamma)'(t)dt = \\ &= \int_a^b \nu_{\gamma(\varphi(t))}(\varphi'(t)\gamma'(\varphi(t))dt = \int_a^b \varphi'(t)\nu_{\gamma(\varphi(t))}(\gamma'(\varphi(t))dt = \\ &= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \nu_{\gamma(\varphi(t))}(\gamma'(\varphi(t))d\varphi(t) = L_\nu(\gamma) \end{aligned}$$

■

Определение 2.30. Финслерова метрика на U определяется как внутренняя метрика, определенная функционалом длины L_ν.

Определение 2.31. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ – открытое подмножество, а норма $\nu_x : \ T_x\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ задается формулой $\nu_x(v) = \sqrt{g_x(v,v)}$, где $g_x \in \mathsf{Sym}^2 T_x^*\mathbb{R}^n$ – положительно определенное скалярное произведение, заданное гладким отображением $U \longrightarrow \mathsf{Sym}^2 \mathbb{R}^n = \mathsf{Sym}^2 T_x^*\mathbb{R}^n$. В такой ситуации g_x называется **римановой формой** на U, а соответствующая метрика путей **римановой метрикой** на U.

2.5. Спрямляемые пути и внутренние метрики

Приведенный выше формализм естественно появляется в ситуации, когда метрика определяется через длину пути. Оказывается, что длину пути можно определить для любой метрики; это дает функционал длины, который называется **внутренним** (intrinsic). Соответствующая метрика тоже называется **внутренней**. Не любая метрика внутренняя, но внутренние метрики образуют важный класс метрик, замкнутый относительно многих естественных операций на метрических пространствах.

Определение 2.32. Пусть (M, d) – метрическое пространство, а $\gamma : [a, b] \to M$ – путь. Рассмотрим разбиение отрезка $[a, b] = [a, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup ... \cup [x_{n-1}, b]$. Обозначим $x_0 := a, x_n := b$. Положим

$$L_\gamma(x_1, ...x_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} d(x_i, x_{i+1}).$$

Определим **длину пути** γ формулой

$$L_d(\gamma) := \sup_{a<x_1<...<x_{n-1}<b} L_\gamma(x_1, ...x_{n-1}).$$

где супремум берется по всем разбиениям отрезка. Путь γ называется **спрямляемым**, если $L_d(\gamma) < \infty$.

Пример 2.33: Любой липшицев путь – спрямляемый (докажите это).

Замечание 2.34. Любой кусочно гладкий путь – липшицев (докажите это).

Утверждение 2.35: Пусть M – произвольное метрическое пространство. Тогда спрямляемые пути образуют допустимый класс, а L_d является функционалом длины.

Задача 2.36. Докажите это.

Определение 2.37. Пусть (M, d) – метрическое пространство, а L_d – функционал длины на спрямляемых путях. Обозначим соответствующую внутреннюю метрику d_{L_d} за $\hat{d}$. Она называется **внутренней метрикой, индуцированной с d.**

Теорема 2.38: Для любого метрического пространства, $\hat{\hat{d}} = \hat{d}$.

Доказательство. Шаг 1: Длина пути, соединяющего x и y, не меньше, чем $d(x, y)$, в силу неравенства треугольника. Поэтому $\hat{d} \geqslant d$.

Шаг 2: Поскольку $\hat{d} \geqslant d$, имеем $L_d(\gamma) \leqslant L_{\hat{d}}(\gamma)$ для любого пути.

Шаг 3: Пусть $\gamma : [a, b] \to M$ – спрямляемый путь. Выберем такое разбиение отрезка $[a, b]$, что $L_{\hat{d}}(\gamma) - \sum \hat{d}(\gamma(x_i), \gamma(x_{i+1})) < \varepsilon$. Тогда

$$L_{\hat{d}}(\gamma) - \varepsilon \leqslant \sum_i \hat{d}\left(\gamma\Big|_{[x_i, x_{i+1}]}\right) \leqslant \sum_i L_d\left(\gamma\Big|_{[x_i, x_{i+1}]}\right) = L_d(\gamma).$$

Устремляя ε к нулю, получаем $L_{\hat{d}}(\gamma) \leqslant L_d(\gamma)$, что дает $\hat{d} \leqslant d$. ∎

Определение 2.39. Метрика d на M называется **внутренней**, если $\hat{d} = d$.

2.6. Внутренние метрики и функционалы длины

Оказывается, что метрика путей, полученная из функционала длины, всегда внутренняя.

Теорема 2.40: Пусть (M, d) – пространство с метрикой путей, построенной по функционалу длины L. Тогда d внутренняя.

Доказательство. Шаг 1: Для каждого допустимого пути γ, соединяющего a и b в M, имеем $d(a, b) \leqslant L(\gamma)$. С другой стороны, $L_d(\gamma)$ есть супремум $\sum_i d(\gamma(x_i), \gamma(x_{i+1}))$ по всем разбиениям пути γ. Значит, для каждого $\varepsilon > 0$ найдется разбиение пути γ такое, что

$$L_d(\gamma) \leqslant \sum_i d(\gamma(x_i), \gamma(x_{i+1})) + \varepsilon \leqslant \sum_i L(\gamma_{[x_i, x_{i+1}]}) + \varepsilon = L(\gamma) + \varepsilon$$

Это дает $L_d(\gamma) \leqslant L(\gamma)$, то есть $\hat{d} \leqslant d$.

Шаг 2: По определению, $\hat{d}(x,y)$ есть инфимум L_d-длин всех спрямляемых путей, соединяющих x и y. Значит, для любого заданного $\varepsilon > 0$, найдется спрямляемый путь γ, соединяющий x и y, и его разбиение $\gamma = \bigcup \gamma_{[x_i,x_{i+1}]}$ такое, что

$$\hat{d}(x,y) \geqslant L_d(\gamma) - \varepsilon \geqslant \sum_i d(\gamma(x_i), \gamma(x_{i+1})) - 2\varepsilon \geqslant d(x,y) - 2\varepsilon.$$

Устремляя ε к нулю, получаем $\hat{d} \geqslant d$. ■

2.7. Упражнения

Задачи в этом разделе сделаются существенно проще, когда вы прочтете следующую главу. Пока вы ее не прочли, имеет смысл поломать над ними голову. Если ничего не получится – не огорчайтесь, а читайте дальше.

Задача 2.41. Пусть $S^2 \supset \mathbb{R}^3$ – подмножество $\mathbb{R}^3$ с плоской метрикой d. Ограничим d на S^2. Докажите, что полученная метрика не внутренняя.

Задача 2.42. В этой же ситуации, рассмотрим соответствующую метрику $\hat{d}$. Докажите, что $\hat{d}(x,y)$ равна углу дуги большого круга, проходящего через x, y.

Определение 2.43. **Кратчайшей** называется путь γ, соединяющий x и y, такой, что $L(\gamma) = d(x,y)$.

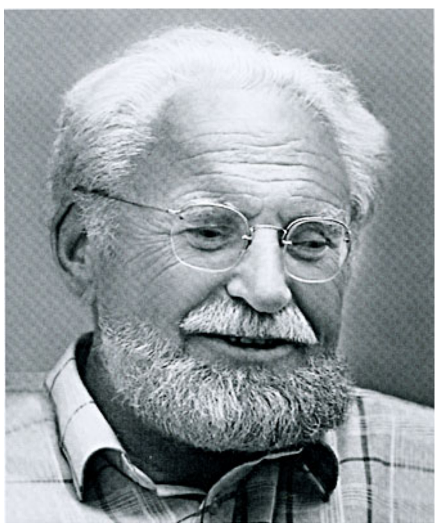
Пример 2.44: На сфере S^2 с внутренней метрикой, построенной выше, кратчайшие суть дуги большого круга длины $\leqslant \pi$ (докажите это).

Задача 2.45. Пусть M – компактное метрическое пространство с внутренней метрикой. Докажите, что любые две точки можно соединить кратчайшей.

Задача 2.46. Пусть $M = \mathbb{R}^n$ – векторное пространство с нормой ν и метрикой $d(x,y) = \nu(x-y)$. Докажите, что эта метрика внутренняя, а отрезки прямых являются кратчайшими.

2.8. История внутренних метрик

Определение длины отрезка, приведенное выше, принадлежит Буземану (Herbert Busemann, The geometry of geodesics, 1955), но его можно (в совершенно нестрогом изложении) найти в книжке А. Д. Александрова "Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей" (1946, издана в 1948). У Александрова также есть неформальное (но достаточно точное) определение внутренней метрики. Никакой библиографии (никакой вообще) у Александрова нет. Возможно, ее удалили по случаю кампании "борьбы с космополитизмом", а может ее и не было. Строгое определение внутренних метрик и функционалов длины приводится у Громова, "Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces". До Громова, геометры пользовались понятием "выпуклого метрического пространства", введенного Карлом Менгером Мл. в 1930-х: метрическое пространство называется "выпуклым", если любые две точки x, y с $d(x, y) = r$ можно соединить геодезической длины r.



А. Д. Александров,
22.07(4.08).1912, с. Волынь Рязанской губ. –
27.07.1999, Санкт-Петербург