# 3. Метрическая геометрия, лекция 3: свойства внутренних метрик

## 3.1. Внутренние метрики и кратчайшие: введение

Напомню, что “кратчайшая” в метрическом пространстве $M$, соединяющая $x$ и $y$, $d(x, y) = a$, есть изометрическое отображение $\gamma$ из отрезка $[0, a]$ в $M$, такое, что $\gamma(0) = x$, $\gamma(a) = y$. Исторически, интерес к внутренним метрикам связан с тем, что все метрики, допускающие кратчайшие – внутренние, но понятие "внутренней метрики" богаче, и не все пространства с внутренними метриками допускают кратчайшие.

Для нас, основное применение внутренних метрик состоит в том, что они **локальны**, то есть два пространства с внутренними метриками, содержащие изометрические подмножества, можно "склеить" по этим подмножествам. Эта конструкция хорошо известна из алгебраической топологии, работающей с пространствами, склеенными из полиэдров. Впрочем, если мы хотим работать с полиэдральными пространствами, математической строгости проще всего добиться, склеивая их по изометриям и пользуясь внутренними метриками.

Я расскажу о локальности в этой лекции, и о склейке в следующей.

Два другие применения внутренних метрик – теорема Хопфа-Ринова и существование кратчайших

Теорема Хопфа-Ринова является обобщением утверждения, известного из школьного курса анализа: "компакт есть замкнутое, ограниченное пространство". В общем метрическом пространстве это, конечно, неверно: надо как минимум потребовать локальной компактности, то есть наличия у каждой точки окрестности, замыкание которой компактно. Также надо потребовать полноты: скажем, интервал $]a, b[$ локально компактен, ограничен, но никак не компактен.

Но и этих условий недостаточно. Действительно, рассмотрим пространство $\mathbb{R}$ с обычной метрикой $d(x, y) = |x - y|$, и заменим ее на обрезанную метрику $d_1(x, y) := \min(1, d(x, y))$ (Лекция 2). Многообразие $\mathbb{R}$ с такой метрикой – полное, ограниченное, локально компактное пространство (проверьте), но оно некомпактно.

Оказывается, что если пространство с внутренней метрикой удовлетворяет этим условиям (полнота, ограниченность, локальная компактность), оно обязательно компактно. В этом и состоит теорема Хопфа-Ринова, которую я докажу в этой лекции. Из нее уже нетрудно вывести наличие кратчайших в полном, локально компактном пространстве с внутренней метрикой.

Исторически, существование кратчайших использовалось в римановой геометрии как определение полноты, а в метрической геометрии существование кратчайших (или же середин интервалов) постулировалось как альтернатива нашему определению "внутренних метрик". Об этом подробнее написано в историческом очерке в конце этой лекции.

## 3.2. $\varepsilon$-середины

Оказывается, что для наших целей понятие внутренней метрики можно заменить на гораздо более слабое условие: существование $\varepsilon$-середин.

**Определение 3.1.** Точка $z$ называется **$\varepsilon$-серединой** пары $(x, y)$, если $|d(x,z) - \frac{1}{2}d(x,y)| \leqslant \varepsilon$ и $|d(y,z) - \frac{1}{2}d(x,y)| \leqslant \varepsilon$. Говорится, что в $(M, d)$ **существуют $\varepsilon$-середины**, если для любых $x, y$, и любого $\varepsilon > 0$, существует $\varepsilon$-середина.

**Утверждение 3.2:** В любом пространстве с внутренней метрикой существуют $\varepsilon$-середины.

**Доказательство. Шаг 1:** Пусть $r := d(x,y) + \varepsilon$. Если замкнутые шары $\bar{B}_{r/2}(x)$ и $\bar{B}_{r/2}(y)$ пересекаются, мы все доказали: точка их пересечения $z$ и есть искомая $\varepsilon$-середина. Действительно, $d(z,y) \leqslant r/2$ и $d(z,x) \leqslant r/2$, но поскольку $d(z,x) + d(z,y) \geqslant d(x,y)$, ни $d(z,y)$, ни $d(z,x)$ не могут быть меньше, чем $d(x,y) - r/2 = \frac{1}{2}(d(x,y) - \varepsilon)$. Это дает

$$\frac{1}{2}(d(x,y) - \varepsilon) \leqslant d(x,z) \leqslant \frac{r}{2} = \frac{1}{2}(d(x,y) + \varepsilon).$$

**Шаг 2:** Пусть $\gamma : \ [a,b] \longrightarrow M$ – путь, соединяющий две заданные точки $x, y$ и длины не больше, чем $d(x,y) + \frac{1}{2}\varepsilon$. Если шары $\bar{B}_{r/2}(x)$ и $\bar{B}_{r/2}(y)$ не пересекаются, в образе $\gamma$ найдется точка $z$, которая ни одному из них не принадлежит (в противном случае, отрезок распадается в несвязное объединение

$$[a,b] = \gamma^{-1}(\bar{B}_{r/2}(y)) \coprod \gamma^{-1}(\bar{B}_{r/2}(y))$$

двух замкнутых множеств, что противоречит связности отрезка). Для такой точки, $d(x,z) + d(z,y) > r = d(x,y) + \varepsilon$, что невозможно, потому что

$$d(x,y) + \frac{1}{2}\varepsilon \geqslant L_d(\gamma) \geqslant d(x,z) + d(z,y)$$

■

**Теорема 3.3:** Пусть $M$ – пространство, где существуют $\varepsilon$-середины, а $x_0, x_1 \in M$. Тогда для любого $\lambda \in [0,1]$, найдется $x_\lambda \in M$ такая, что $|d(x_0,x_\lambda) - \lambda d(x_0,x_1)| \leqslant \varepsilon$ и $|d(x_1,x_\lambda) - (1-\lambda)d(x_0,x_1)| \leqslant \varepsilon$.

**Доказательство. Шаг 1:** Доказательство Теоремы 3.3 ведется следующим образом. Пусть $\lambda = \frac{2n-1}{2^m}$, $0 < \lambda < 1$. Возьмем за $x_\lambda \in M$ $\frac{\varepsilon}{2^{m+1}}$-середину между $x_{\frac{n}{2^{m-1}}}$ и $x_{\frac{n-1}{2^{m-1}}}$. Воспользовавшись индукцией по $m$, построим $x_\lambda$ для каждого двоично-рационального числа $\lambda = \frac{2n-1}{2^m}$. На каждом шаге, $x_\lambda$, $\lambda = \frac{2n-1}{2^m}$ выбирается как "приблизительная середина" соседних точек $x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}$ с $\lambda_1 = \frac{n}{2^{m-1}}$ и $\lambda_2 = \frac{n+1}{2^{m-1}}$. Такая процедура позволяет построить отображение из двоично-рациональных чисел в $M$, которое будет "приблизительной изометрией", и точно оценить искажения метрики.

**Шаг 2:** Определим отображение $P$ таким образом, чтобы $P$ переводило двоично-рациональное число $\lambda = \frac{2n-1}{2^m}$ в один из концов отрезка с шагом $\frac{1}{2^{m-1}}$, содержащего $\lambda$: $P(\lambda) := \frac{n-1}{2^{m-1}}$. По построению точек $x_\lambda$, имеем

$$\left| d(x_\lambda, x_{P(\lambda)}) - \frac{1}{2^m} d(x_0,x_1) \right| < \frac{\varepsilon}{2^{m+1}} d(x_0,x_1).$$

Чтобы посчитать, насколько отображение $\lambda \mapsto x_\lambda$ искажает расстояния, мы суммируем ряд

$$d(x_\lambda, x_{P(\lambda)}) + d(x_{P(\lambda)}, x_{P(P(\lambda))}) + ...$$

и получаем число, которое отличается от $\lambda d(x_0,x_1)$ на

$$\left| d(x_\lambda, x_{P(\lambda)}) + d(x_{P(\lambda)}, x_{P(P(\lambda))}) + ... - \lambda d(x_0,x_1) \right| \leqslant \sum_{i=0}^{m} \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} \leqslant \varepsilon. \tag{3.2.1}$$

Значит,

$$d(x_0,x_\lambda) \leqslant d(x_\lambda, x_{P(\lambda)}) + d(x_{P(\lambda)}, x_{P(P(\lambda))}) + ... \leqslant \lambda d(x_0,x_1) + \varepsilon.$$

Аналогично, $d(x_1,x_\lambda) \leqslant (1-\lambda)d(x_0,x_1) + \varepsilon$.

Тот же самый аргумент, примененный дважды, доказывает, что

$$d(x_\lambda, x_\mu) \leqslant |\lambda - \mu| d(x_0,x_1) + 2\varepsilon. \tag{3.2.2}$$

**Шаг 3:** Чтобы получить неравенство $d(x_\lambda, x_\mu) \geqslant |\lambda - \mu| d(x_0, x_1) - 2\varepsilon$, мы пользуемся неравенством треугольника:

$$d(x_\lambda, x_\mu) \geqslant d(x_0, x_1) - d(x_0, x_\lambda) - d(x_1, x_\mu) \geqslant |\lambda - \mu| d(x_0, x_1) - 2\varepsilon.$$

■

**Замечание 3.4.** Формулу (3.2.2) можно уточнить следующим образом. Пусть $\lambda = \frac{a}{2^m}$ и $\mu = \frac{b}{2^m}$ принадлежат двоичному отрезку вида $[\frac{k}{2^l}, \frac{k+1}{2^l}]$. В аналоге формулы (3.2.1), который выражает разницу между $|\lambda - \mu| d(x_0, x_1)$ и $d(x_\lambda, x_\mu)$, будут встречаться только члены от $\frac{\varepsilon}{2^{l+1}}$ до $\frac{\varepsilon}{2^{m+1}}$, что дает

$$\left| d(x_\lambda, x_\mu) - |\lambda - \mu| d(x_0, x_1) \right| \leqslant \sum_{i=l}^{m} \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} \leqslant \frac{\varepsilon}{2^l}.$$

**Замечание 3.5.** Из Замечания 3.4 следует, что отображение $\lambda \mapsto x_\lambda$ является $(1+\delta)$-липшицевым, где $\delta = \varepsilon d(x,y)^{-1}$.

Следующее утверждение очевидно.

**Утверждение 3.6:** Пусть $X, Y$ – метрические пространства, а $\varphi : X \longrightarrow Y$ – $C$-липшицево отображение. Тогда $\varphi$ продолжается до $C$-липшицева отображения пополнений $\bar{\varphi} : \bar{X} \longrightarrow \bar{Y}$. ■

Как следствие, получаем следующую полезную теорему.

**Теорема 3.7:** Пусть $M$ – полное метрическое пространство, в котором существуют $\varepsilon$-середины. Тогда метрика в $M$ внутренняя.

**Доказательство:** В силу Замечания 3.5, отображение $\lambda \mapsto x_\lambda$, построенное в Теореме 3.3, продолжается до $d(x_0, x_1)(1+\delta)$-липшицева отображения $[0,1] \xrightarrow{\gamma} M$, то есть до пути, соединяющего $x_0$ и $x_1$. Длина сего пути ограничена $d(x_0, x_1)(1+\delta)$ в силу его липшицевости. ■

**Следствие 3.8:** Существование $\varepsilon$-середин в $M$ равносильно тому, что метрика в его пополнении $M_1$ внутренняя.

**Доказательство:** Если в $M$ есть $\varepsilon$-середины, то и в $M_1$ есть $\varepsilon$-середины (докажите это). Поэтому для любого $\delta$ существуют $(1+\delta)$-липшицевы пути $\gamma: [0, d(x,y)] \longrightarrow M_1$, соединяющие $x$ и $y$. Значит, $\hat{d}(x,y) < d(x,y)(1+\delta)$. ■

## 3.3. Локальные метрики

Локальные метрики – метрики, которые целиком задаются своим ограничением на любое открытое покрытие. Для произвольной метрики, локальность не соблюдается. Для примера, возьмем $\mathbb{R}$ с обычной метрикой $d$, и пусть $d_1(x,y) := \min(d(x,y), 1)$ – ее обрезание (Лекция 2). На каждом покрытии $\mathbb{R}$ отрезками длины 1, метрики $d$ и $d_1$ равны, но на $\mathbb{R}$ они, очевидно, не равны.

С другой стороны, внутренние метрики, очевидно, локальны: чтобы вычислить длину пути, надо сложить длины его частей, проходящих по разным элементам покрытия $\{U_i\}$, а эти длины зависят только от ограничения метрики на $U_i$.

Теперь то же самое, но формально.

**Утверждение 3.9:** Пусть $\mathcal{S}$ – семейство метрик на множестве $M$, а $d_{\mathcal{S}}(x,y) := \sup\limits_{d_\alpha \in \mathcal{S}} d_\alpha(x,y)$ – супремум всех метрик в $\mathcal{S}$. Тогда $d_{\mathcal{S}}$ – тоже метрика.

**Доказательство:** Две из трех аксиом (симметричность, рефлексивность) очевидны. Неравенство треугольника следует из того, что супремум суммы не превосходит сумму супремумов (проверьте это). ■

**Определение 3.10.** Пусть $(M,d)$ – метрическое пространство, $\{U_i\}$ – открытое покрытие $M$, то есть набор открытых множеств $U_i \subset M$ такой, что $M = \bigcup U_i$, а $\mathcal{S}_{\{U_i\}}$ – множество всех метрик $d'$ на $M$ таких, что $d'\Big|_{U_i} \leqslant d\Big|_{U_i}$ для каждого элемента покрытия. Обозначим за $d(\{U_i\})$ супремум метрик в семействе $\mathcal{S}_{\{U_i\}}$. Метрика $d$ называется **локальной**, если $d(\{U_i\}) = d$ для любого покрытия $\{U_i\}$.

**Теорема 3.11:** Внутренние метрики всегда локальны.

**Доказательство. Шаг 1:** Зафиксируем покрытие $\{U_i\}$. Пусть $\gamma$ – спрямляемый путь на $M$. Выберем разбиение $\gamma$ в отрезки $\gamma([x_l, x_{l+1}])$ таким образом, что каждый из отрезков лежит в своем $U_i$. Тогда

$$L_{d(\{U_i\})}(\gamma([x_l, x_{l+1}])) \leqslant L_d(\gamma([x_l, x_{l+1}])).$$

Значит, функционал длины в метрике $d(\{U_i\})$ не больше, чем $L_d$.

**Шаг 2:** Возьмем путь $\gamma$, соединяющий $x$ и $y$, и такой, что $L_d(\gamma) \leqslant d(x,y) - \varepsilon$. Такой путь существует, потому что $d$ внутренняя. Тогда

$$d(\{U_i\})(x,y) \leqslant L_{d(\{U_i\})}(\gamma) \leqslant L_d(\gamma) \leqslant d(x,y) - \varepsilon.$$

Устремляя $\varepsilon$ к 0, получаем $d(\{U_i\}) \leqslant d$. Значит, метрика $d \in \mathcal{S}_{\{U_i\}}$ равна супремуму всех метрик в $\mathcal{S}_{\{U_i\}}$. ■

Локальность равносильна существованию $\varepsilon$-середин.

Пусть $(M,d)$ – метрическое пространство. Определим $d_\varepsilon(x,y)$ как инфимум $\sum d(x_i, x_{i+1})$, взятый по всем последовательностям точек $x_0 = x, x_1, ..., x_n = y$ таким, что $d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon$.

**Упражнение 3.12:** Проверьте, что $d_\varepsilon$ – тоже метрика, $d_\varepsilon \geqslant d$, и она равна $d$ на любом $\varepsilon/2$-шаре.

Из этого упражнения мы получаем следующее простое наблюдение.

**Следствие 3.13:** Если $d$ локальна, то $d_\varepsilon = d$ для любого $\varepsilon > 0$.

**Лемма 3.14:** Для любых $x, y \in M$, существует $z \in M$ такое, что $d_\varepsilon(x,z) - 2\varepsilon < \frac{1}{2} d_\varepsilon(x,y)$ и $d_\varepsilon(y,z) - 2\varepsilon < \frac{1}{2} d_\varepsilon(x,y)$.

**Доказательство:** Возьмем последовательность $x_0 = x, x_1, ..., x_n = y$ такую, что $d_\varepsilon(x,y) \geqslant \sum d(x_i, x_{i+1}) - \varepsilon$, и пусть $z = x_k$ – такая точка из $x_i$, что $d_\varepsilon(x, x_k) \leqslant \frac{1}{2} \sum d(x_i, x_{i+1}) + \varepsilon$ и $d_\varepsilon(y, x_k) \leqslant \frac{1}{2} \sum d(x_i, x_{i+1}) + \varepsilon$. Такая точка всегда существует, потому что $d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon$. ■

**Следствие 3.15:** Локальные метрики допускают $\varepsilon$-середины.

Мы доказали такую теорему.

**Теорема 3.16:** Пусть $(M,d)$ – метрическое пространство. Тогда следующие условия равносильны.

**(i)** Метрика $d$ локальна.

**(ii)** $(M,d)$ допускает $\varepsilon$-середины.

**(iii)** Пополнение $M$ – пространство с внутренней метрикой.

**Доказательство:** Импликация (i) $\Rightarrow$ (ii) это Следствие 3.15. Равносильность (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) это Следствие 3.8. Наконец, импликация (iii) $\Rightarrow$ (i) это Теорема 3.11. ■

## 3.4. Свойства компактных пространств: напоминание

Следующие утверждения суть стандартные факты о компактных метрических пространствах. Схему их доказательства можно найти в первом листке.

**Определение 3.17.** Топологическое пространство $M$ называется **псевдокомпактным**, если каждая непрерывная $\mathbb{R}$-значная функция на $M$ достигает максимума.

**Утверждение 3.18:** Метрическое пространство компактно тогда и только тогда, когда оно псевдокомпактно.

**Определение 3.19.** **$\varepsilon$-сеть** в метрическом пространстве $M$ есть такое множество $N \subset M$, что объединение $\varepsilon$-шаров с центрами в $N$ равно $M$. Метрическое пространство называется **вполне ограниченным**, если для любого $\varepsilon > 0$ в $M$ найдется конечная $\varepsilon$-сеть.

**Утверждение 3.20:** Метрическое пространство компактно тогда и только тогда, когда оно полно и вполне ограниченно.

**Определение 3.21.** Пусть $M$ – метрическое пространство. Говорят, что $M$ **локально компактно**, если для любой точки $x \in M$ существует такое число $\varepsilon > 0$, что замкнутый шар $\overline{B}_\varepsilon(x)$ компактен.

## 3.5. Теорема Хопфа-Ринова-Кон-Фоссена

**Замечание 3.22.** "Условие Хопфа-Ринова" правильно было бы называть "условие Кон-Фоссена", потому что его нет в статье Ринова 1931-го года, но оно есть в статье Кон-Фоссена 1935-го. В этой статье Кон-Фоссен доказывает теорему Хопфа-Ринова в общей ситуации (у Ринова аргумент применяется только к римановым многообразиям), и формулирует это условие. Вообще, теорему Хопфа-Ринова правильнее было бы называть теорема Хопфа-Ринова-Кон-Фоссена; некоторые так и делают.

*Stefan Cohn-Vossen,*
*28 May 1902 - 25 June 1936*

"Условие Кон-Фоссена" является следствием из Теоремы 3.3. Оно равносильно существованию $\varepsilon$-середин.

**Следствие 3.23: ("Условие Кон-Фоссена")** Пусть $M$ – метрическое пространство, в котором существуют $\varepsilon$-середины. Тогда для любых $x, y \in M$, и $r \leqslant d(x,y)$, расстояние от шара $B_r(x)$ до $y$ равно $d(x,y) - r$.

**Доказательство:** Воспользуемся Теоремой 3.3 и выберем точку $z = z_\lambda$ такую, что $|d(x,z) - (r-\varepsilon)| < \varepsilon$ и $|d(y,z) - d(x,y) - r| < \varepsilon$. Тогда $z \in B_r(x)$ и $d(B_r(x), y) \leqslant d(y,z) \leqslant d(x,y) - r + \varepsilon$. ■

**Замечание 3.24.** Для читателей, желающих избежать рассуждений об $\varepsilon$-серединах, я расскажу, как доказать $d(x, B_r(y)) = d(x,y) - r$ для любого пространства с внутренней метрикой. Рассмотрим путь $\gamma$, соединяющий $x$ и $y$, длины $L(\gamma) < d(x,y) + \varepsilon$. Пусть $r' = d(x,y) - r$ Если шары $B_r(y)$ и $B_{r'+\varepsilon}(x)$ пересекаются в точке $z$, мы получаем, что $d(x, B_r(y)) \leqslant d(x,z) \leqslant d(x,y) - r + \varepsilon$. Если же они не пересекаются, получаем точку $z \in \gamma$, которая не принадлежит ни одному из шаров, и она удовлетворяет

$$d(x,z) + d(y,z) > r + r' + \varepsilon = d(x,y) + \varepsilon$$

что невозможно, потому что длина пути $\gamma$ меньше, чем $d(x,y) + \varepsilon$.

**Теорема 3.25:** Пусть $M$ – полное, локально компактное пространство, где выполнено условие Кон-Фоссена (как доказано выше, это равносильно тому, что метрика на $M$ внутренняя). Тогда каждый замкнутый шар в $M$ компактен.

**Доказательство. Шаг 1:** Условие Кон-Фоссена можно переписать так: Для любых $r, \varepsilon \in \mathbb{R}^{>0}$, $\varepsilon$-окрестность шара $\bar{B}_r(m)$ это шар $B_{r+\varepsilon}(m)$ (докажите это).

**Шаг 2:** Пусть $m \in M$ точка, такая, что шары $B_{r-\varepsilon}(m)$ вполне ограниченны для любого $\varepsilon > 0$. Тогда $\bar{B}_r(m)$ тоже вполне ограниченно. Действительно, $\frac{1}{2}\varepsilon$-сеть в $B_{r-\frac{1}{2}\varepsilon}(m)$ будет $\varepsilon$-сетью в $\bar{B}_r(m)$, в силу предыдущего шага.

**Шаг 3:** Определим функцию на метрическом пространстве $M$:

$$\rho(m) := \sup_r \{ r \in \mathbb{R} \ \mid \ \bar{B}_r(m) \text{ компактен } \}.$$

Тогда $\rho$ 1-липшицева, в частности, непрерывна (докажите это).

**Шаг 4:** Пусть $\bar{B}_r(m)$ – компактный шар в локально компактном пространстве. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что каждый замкнутый шар радиуса $\varepsilon$ в с центром в $\bar{B}_r(m)$ компактен. Действительно, $\rho$ достигает минимума где-то на $B_r(m)$.

**Шаг 5:** Для такого шара, $\bar{B}_{r+\frac{1}{2}\varepsilon}(m)$ тоже компактен. Для доказательства, рассмотрим конечную $\frac{1}{2}\varepsilon$-сеть в $\bar{B}_r(m)$. Объединение $V$ замкнутых $\varepsilon$-шаров с центрами в этой сети компактно (конечное объединение компактов компактно) и содержит $\bar{B}_{r+\frac{1}{2}\varepsilon}(m)$ в силу шага 1. Действительно, любая точка $\bar{B}_{r+\frac{1}{2}\varepsilon}(m)$ отстоит не больше, чем на $\frac{1}{2}\varepsilon$ от $\bar{B}_r(m)$, значит, отстоит не больше чем на $\frac{1}{2}\varepsilon$ от какого-то узла $\frac{1}{2}\varepsilon$-сети. Это дает $B_{r+\frac{1}{2}\varepsilon}(m) \subset V$.

**Шаг 6:** Пусть $r(m)$ – супремум всех $r$, для которых шар $\bar{B}_r(m)$ компактен. В силу шага 2, шар $\bar{B}_{r(m)}(m)$ компактен. Значит, шар $\bar{B}_{r(m)+\frac{1}{2}\varepsilon}(m)$ тоже компактен (Шаг 5). Значит, $r(m) = \infty$, и любой замкнутый шар в $M$ компактен. ■

## 3.6. Кратчайшие в метрическом пространстве

**Определение 3.26.** Непрерывное отображение $\gamma : [0, \alpha] \longrightarrow M$ называется **кратчайшей**, если его длина равна $d(\gamma(0), \gamma(\alpha))$.

**Замечание 3.27.** Любой отрезок кратчайшей - снова кратчайшая. Действительно, если если $a, b$ – две точки на кратчайшей $\gamma$, ведущей из $x$ в $y$, неравенство $d(x, y) \leqslant d(x, a) + d(a, b) + d(b, y)$ превращается в равенство, потому что

$$d(x, a) + d(a, b) + d(b, y) \leqslant L_d(\gamma) = d(x, y).$$

Длина каждого из участков пути $\gamma$ от $x$ до $a$, от $a$ до $b$, и от $b$ до $y$ равна расстоянию между концами этих участков, ибо сумма этих длин равна $d(x, a) + d(a, b) + d(b, y) = d(x, y)$.

**Определение 3.28.** Пусть $\varphi : [a, b] \longrightarrow [c, d]$ – монотонное отображение, переводящее концы отрезка в концы. Предположим, что $\varphi \circ \gamma$ непрерывно. Тогда $\varphi \circ \gamma$ называется **репараметризацией пути** $\gamma$. **Параметризация** $\gamma$ – выбор пути в классе путей, эквивалентных с точностью до репараметризации.

**Определение 3.29.** Пусть $\gamma : [0,\alpha] \longrightarrow M$ - кратчайшая, соединяющая $x$ и $y$, причем
$$d(\gamma(x),\gamma(y)) = |x-y|.$$
Такая кратчайшая называется **кратчайшей геодезической**, а соответствующая параметризация - **геодезической параметризацией**.

**Замечание 3.30.** Геодезическая кратчайшая задается изометрическим вложением из отрезка в $M$.

**Утверждение 3.31:** Любая кратчайшая допускает геодезическую параметризацию.

**Доказательство:** Пусть $\gamma$ – кратчайшая длины $d$, соединяющая $x$ и $y$, а $\gamma_1 : [0,d] \longrightarrow M$ переводит $t$ в точку $\gamma_1(t) \in \operatorname{im}\gamma$ такую, что $d(x,\gamma_1(t)) = t$. Такая точка существует, потому что длина отрезка пути является непрерывной функцией параметра. Отображение $t \longrightarrow \gamma_1(t)$ непрерывно, ибо расстояние между $\gamma_1(t)$ и $\gamma_1(t')$ равно $|t-t'|$, так как это отрезки кратчайшей (замечание 3.27). Значит, это кратчайшая. Наконец, $\gamma_1$ получена из $\gamma$ репараметризацией, ибо отображение $t \longrightarrow d(x,\gamma(t))$ непрерывно и монотонно. ■

Доказательство следующей теоремы не отличается от доказательства существования $(1+\delta)$-липшицевых путей в полных пространствах, допускающих $\varepsilon$-середины (Теорема 3.3 и Замечание 3.5). Оно несколько проще, ибо не надо оценивать поправочные члены: в локально компактной ситуации, всегда существуют точные, а не только приблизительные середины. В самом деле, из Шага 1 следующего доказательства видно, что для каждых $x,y$ найдется $z$ такой, что $d(x,z) = d(z,y)$ и $d(x,y) = d(x,z) + d(z,y)$

**Теорема 3.32:** Пусть $M$ - локально компактное, полное пространство, где выполнено условие Кон-Фоссена:[1]
$$d(B_r(x),y) = d(x,y) - r,$$
а $x_0, x_1 \in M$ – любые точки. Тогда существует кратчайшая геодезическая, соединяющая $x_0$ и $x_1$.

[1] Чтобы это условие выполнялось, достаточно, чтобы метрика была внутренней, см. Замечание 3.24.

**Доказательство. Шаг 1:** Пусть $d(x_0, x_1) = \alpha$. В силу компактности, в шаре $\bar{B}_{\alpha/2}(x_1)$ есть точка $x_{1/2}$ такая, что $d(x_0, x_{1/2}) = d(x_{1/2}, x_1) = \alpha/2$. В самом деле, функция $d(\cdot, x_0) : \bar{B}_{\alpha/2}(x_1) \longrightarrow \mathbb{R}$ непрерывна на компакте, значит, достигает минимума, который равен $d(x_0, \bar{B}_{\alpha/2}(x_1)) = \alpha/2$ в силу условия Кон-Фоссена.

**Шаг 2:** Воспользовавшись индукцией, для каждого двоично-рационального числа $\lambda = \frac{n}{2^k}$ в $[0,1]$ выберем последовательно середины отрезков, чтобы найти точку $x_\lambda$ такую, что $d(x_\lambda, x_0) = \alpha|\lambda|$ и $d(x_\lambda, {}_1) = \alpha|1-\lambda|$. Пусть $\lambda, \mu$ – двоично-рациональные числа в $[0,1]$ со знаменателями $2^m$. Точки $x_\lambda$, $x_\mu$, полученные вышеописанным образом, соединяются ломаной с длиной каждого звена $\frac{\alpha}{2^m}$, а число этих звеньев равно $|\lambda - \mu| 2^m$. Это дает $d(x_\lambda, x_\mu) \leqslant \alpha|\lambda - \mu|$ в силу неравенства треугольника (длина ломаной не меньше расстояния между концами). С другой стороны, сумма длин всех отрезков

$$\sum_{i=0}^{2^n-1} d\left(x_{\frac{i}{2^n}}, x_{\frac{i+1}{2^n}}\right)$$

равна $\alpha$, соответственно, в каждой ломаной, составленной из этих отрезков, неравенство треугольника является равенством. Это и дает

$$d(x_\lambda, x_\mu) = \alpha|\lambda - \mu|.$$

**Шаг 3:** Мы получили изометрическое, с точностью до постоянного множителя $\alpha$, вложение множества двоично-рациональных чисел в $M$. Продолжим на пополнение, получим путь $\gamma$, соединяющий $x_0$ и $x_1$, длина которого равна $d(x_0, x_1)$. ■

## 3.7. Исторический очерк

.

Абстрактные метрические пространства были определены Фреше (1905) и Хаусдорфом (1913), но их мало интересовали метрики на римановых многообразиях. В 1920-е метриками и метризацией топологических пространств интересовался Урысон, но он тоже не занимался применениями к римановой геометрии. Соответственно, их не очень занимали кратчайшие и внутренние метрики.

Существование кратчайших на римановых многообразиях было впервые доказано Хопфом и Риновым, которые занимались дифференциальной геометрией. Следующие занятные исторические подробности подчерпнуты мной из лекции Шломо Стернберга в Гарварде, 2009: http://isites.harvard.edu/fs/docs/icb.topic540503.files/230b09HopfRinow.pdf

Вплоть до 1960-х, единственным учебником по римановой геометрии была книга Эли Картана "La Géométrie des espaces de Riemann" (1928), дополненная и переизданная в 1946. Даже во втором издании этой книги, Картан сообщает

*...La notion générale de variété est assez difficile à définire avec précision...*

"...в общей ситуации, точное определение многообразия – предмет сложный" (страница 56). В учебниках по дифференциальной геометрии, вплоть до появления учебника Стернберга "Лекции по дифференциальной геометрии" (1962) не было точного определения многообразия, и им приходилось руководствоваться понятиями и "геометрической интуицией". В качестве альтернативы книге Картана, были доступны учебники по теории относительности, написанные физиками, но там никаких определений, естественно, тоже не было. Определение многообразий было хорошо известно топологам, но их больше интересовали топологические многообразия. Первый раз четкое определение гладкого многообразия в литературе по геометрии появилось у Стернберга (1962), и одновременно в учебнике Ленга "Introduction to differentiable manifolds".

Теорема Хопфа-Ринова изначально утверждает, что "геодезическая полнота" (существование кратчайших геодезических) равносильна метрической. В силу шаткости понятийной базы, статья Хопфа-Ринова не производит слишком убедительного впечатления, особенно в сравнении с текстом Кон-Фоссена, написанным несколькими годами позже, где все то же самое делается в общей ситуации для метрических пространств. Но еще до Хопфа и Ринова, кратчайшие в метрических пространствах изучал Карл Менгер младший, сын австрийского экономиста Карла Менгера – основателя "австрийской школы экономики".

Менгер называл метрическое пространство "выпуклым", если для любых двух точек $x, y \in M$ есть $z$ такая, что $d(x,y) = d(y,z)$, а $d(x,z) + d(z,y) = d(x,y)$. Буземан в учебнике, написанном в 1953-м, называл такие пространство "выпуклыми по Менгеру", но в дальнейшим их стали называть "выпуклыми по Буземану". Используя трансфинитную индукцию, Менгер доказал, что две точки в выпуклом по Менгеру пространстве соединяются всегда сегментом кратчайшей. Впоследствии этот результат был передоказан без трансфинитной индукции польским математиком Нахманом Аронсайном[2], учеником Мазуркевича и Фреше. Его

[2] Aronszajn, N. Neuer Beweis der Streckenverbundenheit vollständiger konvexer Räume,

доказательство более-менее идентично тому, которое я дал в этой лекции.

Кроме того, Менгер вместе со своим студентом Вальдом ввел понятие "кривизны Вальда-Менгера" в терминах четырехугольников сравнения, весьма мало отличающееся от определения, данного Александровым, Топоноговым и Громовым.

*Karl Menger Jr.,*
*January 13, 1902 - October 5, 1985*

Результаты Хопфа-Ринова и Кон-Фоссена были Менгеру неведомы, по крайней мере в подробном изложении трудов Менгера, написанном его коллегой и соавтором Леонардом Блюменталем[3] никаких упоминаний Кон-Фоссена или Хопфа-Ринова нет. Кон-Фоссен ссылается на Хопфа-Ринова, но про Менгера ничего не знает. Кажется, единственным современным математиком, ссылавшимся на работы Вальда или Менгера по метрической геометрии, был Валерий Берестовский, омский математик, тоже происходящий из школы А. Д. Александрова. В со-

Ergebnisse eines Math. Kolloquiums (Wien) 6 (1935), 45-56
[3]Blumenthal L.M. Theory and applications of distance geometry (1953).

временной западной литературе кривизну Вальда-Менгера обыкновенно называют кривизна Берестовского-Вальда.

## 3.8. Степан Эммануилович Кон-Фоссен

Стефан Кон-Фоссен (28 May 1902 – 25 June 1936) больше всего известен как соавтор чудесной детской книжки "Наглядная Геометрия", написанной вместе с Гильбертом. Он родился во Вроцлаве, и там же защитил диссертацию в нежном возрасте 22 года. Его руководителем был Адольф Кнезер, ученик Кронекера и Куммера, прославленный как дед великого немецкого математика Мартина Кнезера, специалиста по квадратичным формам. Кон-Фоссен получил хабилитацию в Геттингене под руководством Куранта, и в 1930-м стал приват-доцентом в Кельне. Он лишился работы в 1933-м году после того, как нацисты приняли закон, требовавший увольнения еврейских профессоров. В 1934 году Кон-Фоссен переехал в СССР, по приглашению Германа Мюнца, и стал именоваться Стефаном Эммануиловичем.

Мюнц проработал в СССР с 1929-го до 1937-го. В 1937-м году он был выслан из СССР, как гражданин Германии, и перебрался в Швецию, где переписывался с Мартином Бубером и писал книги об иудаизме. Кон-Фоссен умер от воспаления легких летом 1936-го года, в Москве, 34 лет от роду.

Оба они, можно считать, хорошо отделались. Фриц Нетер, младший брат Эмми Нетер и тоже великий математик, эмигрировавший по еврейской линии из Германии в СССР, был арестован НКВД в 1937-м году, получил 25 лет, расстрелян осенью 1941-м в Орле. Согласно С. П. Новикову, теорема об индексе, метод решения эллиптических уравнений через параметрикс и другие великие достижения геометрии XX века все принадлежат Фрицу Нетеру, а фредгольмовы операторы надо на самом деле называть нетеровыми. Детям Фрица Нетера, Герману и Готтфриду, повезло: их тоже выслали в Германию. К тому моменту у них уже не было немецкого гражданства (Нетера с семьей лишили гражданства именным указом). Друзья семьи похлопотали, и детей приняли в Норвегии, а впоследствии позволили эмигрировать в США.

Кон-Фоссен предвосхитил сразу несколько направлений дифференциальной геометрии, став их основателем. Его ранние работы посвящены изгибаемости поверхностей. Теорема Кон-Фоссена о неизгибаемости выпуклых поверхностей была обобщена А. Д. Александровым и А. В. Погореловым, став основой для современной теории уравнений Монжа-

Ампера и опосредованно для науки о многообразиях Калаби-Яу. В статье Яу о решении комплексного уравнения Монжа-Ампера, за которую ему дали филдса, есть всего три ссылки; одна из них на Погорелова. Также Кон-Фоссен впервые построил изгибаемую замкнутую поверхность, предвосхитив популярную ныне науку об объеме и свойствах изгибаемых многогранников.

*Эльфрида и Стефан Кон-Фоссен*

В начале 1930-х Кон-Фоссен занимается вопросами дифференциальной геометрии “в целом”. Он доказывает существование геодезических (теорема Хопфа-Ринова-Кон-Фоссена) и связывает их поведение, кривизну и топологию многообразия. Например, он доказывает, что двумерное компактное многообразие с положительной кривизной это сфера, и еще доказывает, что компактное многообразие положительной секционной кривизны не может иметь геодезических без критических точек, любые геодезические там пересекаются, а накрытие не содержит геодезической, которая изометрична $\mathbb{R}$, то есть продолжается в обе стороны невозбранно.

Судя по тому, что в 1947-м году А. Д. Александров обращается к наследию Кон-Фоссена и публикует большой обзор его ранних работ (с обещанием опубликовать в будущем другой большой обзор) - влияние Кон-Фоссена на дальнейшую деятельность А. Д. Александрова (а через него и на всю историю геометрии в XX веке) было определяющим.

Кроме занятий математикой, Кон-Фоссен был музыкантом и композитором. Большой архив сочинений Кон-Фоссена, его фотографий и музыкальных произедений на сайте университета Кёльна, где Кон-Фоссен был профессором в 1930-1933: `http://www.mi.uni-koeln.de/home-institut/alle/Personen/HistorischesZumInstitut/Person.de.html&COHN-VOSSEN,Stefan`

После его смерти, жена Кон-Фоссена Эльфрида вышла замуж за Альфреда Куреллу, немецкого писателя, переводчика и деятеля Коминтерна. В 1930-х Курелла был секретарем Георгия Димитрова и переводил на немецкий Герцена и Добролюбова, а после войны уехал в ГДР, где стал большим начальством и прославился. Впрочем, и Курелле пришлось пострадать от ужасов сталинизма: его брат Генрих был арестован и убит палачами сталинского НКВД.

Сын Кон-Фоссена и Эльфриды – известный восточно-германский режиссер Рихард Кон-Фоссен, неоднократно запрещенный кровавой коммунистической властью.

*Стефан Кон-Фоссен с младенцем Рихардом Стефановичем*