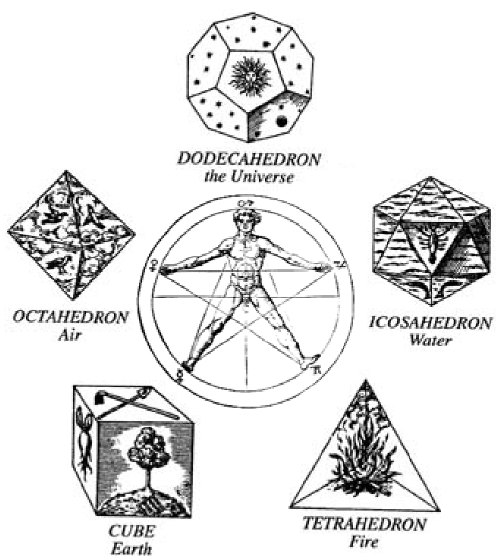
4. Метрическая геометрия, лекция 4: полиэдральные пространства

4.1. Полиэдральные пространства: введение

Теория полиэдров (многогранников) остается одним из центральных предметов математики со времен древних греков. Для Платона (“Тимей”), правильные многогранники были теми самыми атомами, из которых составлено мироздание согласно Левкиппу и Демокриту. Четыре элемента (вода, земля, огонь и воздух) соответствуют икосаэдру (вода: текучий элемент, в силу своей округлости проникающий в малейшие поры), кубу (земля: стабильный элемент, спокойно лежащий вокруг штабелями) тетраэдру (острые углы тетраэдра больно колются и травмоопасны) и октаэдру (воздух). Оставшийся без атомической интерпретации додекаэдр, с 12 гранями по числу знаков зодиака, изображал космос, дух и межпланетный эфир. Сейчас эти 5 правильных многогранников называются “платоновы тела”.



Первым результатом по метрической геометрии полиэдров была теорема Коши о жесткости: если заданы длины ребер выпуклого многогранника, вложение многогранника в $\mathbb{R}^3$ восстанавливается однозначно.

Этот результат присутствует уже в “Началах” Евклида; там он был сформулирован как определение равенства многогранников, но доказательства, конечно, не было. Впрочем, и доказательство Коши содержало ошибки, поправленные в 20-м веке Штейницем и А. Д. Александровым.

Александров придумал решать геометрические задачи в два этапа: сначала мы доказываем теорему для метрических полиэдров, а потом приближаем заданное гладкое многообразие полиэдрами. Эта идея была совершенно революционной и целиком изменила ландшафт дифференциальной геометрии, примерно так же, как изобретение клеточных пространств революционизировало топологию. Но перед тем, как мы сможем доказывать теоремы гладкой геометрии методами метрической, мы должны научиться интерпретировать гладкие инварианты (геодезическая, кривизна) в терминах метрической геометрии. Этим и занимается CAT-теория.

4.2. Топология фактора

Определение 4.1. Пусть M – топологическое пространство, а $\sim$ – отношение эквивалентности. Подмножество $U \subset M/\!\sim$ множества классов $M/\!\sim$ называется **открытым**, если его прообраз в M открыт. Это определяет **топологию фактора** на $M/\sim$, которое называется **факторпространством** по соотношению эквивалентности $\sim$.

Предостережение: Факторпространство может быть нехаусдорфово, даже если M хаусдорфово.

Определение 4.2. Пусть G – группа, действующая на топологическом пространстве M. **Факторпространством** по действию группы называется пространство классов эквивалентности $M/\sim$, где $x \sim y$, если x и y лежат в одной орбите G. Также факторпространство называют **пространство орбит действия** G.

Замечание 4.3. Пусть G - группа, действующая на топологическом пространстве M гомеоморфизмами. Тогда естественная проекция $M \xrightarrow{\pi} M/G$ является открытым отображением.[1].

В качестве приложения, мы определим топологическое пространство графа.

[1]Открытое отображение есть отображение, переводящее открытые множества в открытые

Определение 4.4. **Графом** называется набор вершин и набор ребер, причем каждому ребру соответствует две вершины (возможно, одинаковые), которые называются его **концами**, или **концом и началом**, причем каждая вершина является концом хотя бы одного из ребер. Если двум ребрам соответствует одна и та же вершина, эти ребра называются **смежными**, а вершина – **общей вершиной** ребер. Граф называется **конечным**, если число его ребер и вершин конечно.

Замечание 4.5. С каждым графом ассоциировано топологическое пространство: набор отрезков, соединяющих набор отмеченных точек – вершин.

Определение 4.6. Пусть Γ – граф, а S – множество его ребер. Рассмотрим S как пространство с дискретной топологией, и пусть $X := S \times [0,1]$ – несвязное объединение S копий отрезка. В этом случае $x = s \times \{1\}$ или $x = s \times \{0\}$ – точки X, соответствующая началу или концу отрезка. Если у ребра s_1 и у ребра s_2 имеется общий конец, напишем $x_1 \sim x_2$, где $x_i = s_i \times \{1\}$ или $x_i = s_i \times \{1\}$ соответствующие точки X. **Топологическим пространством графа** называется факторпространство $X/\sim$ по такому отношению эквивалентности.

Задача 4.7. Докажите, что топологическое пространство любого графа хаусдорфово.

4.3. Полуметрики

Определение 4.8. Пусть $d: M \times M \longrightarrow \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ функция, такая, что выполнены:

Рефлексивность: $d(x,x) = 0$.

Симметричность: $d(x,y) = d(y,x)$.

Неравенство треугольника: $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$.

Тогда d называется **полуметрикой**.

Замечание 4.9. От определения метрики это отличается только отсутствием **условия невырожденности:** $d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$.

Определение 4.10. Открытым шаром в полуметрике d называется множество

$$B_{r,d}(x) = \{y \in M \quad | \quad d(x,y) < r\}.$$

Открытые шары задают на M топологию, нехаусдорфову, если M не метрика.

Замечание 4.11. Условие $d(x,y) = 0$ задает на M отношение эквивалентности (докажите это).

Если $d(x,y) = 0$, то

$$d(z,x) + d(x,y) \geqslant d(y,z), \quad d(z,y) + d(y,x) \geqslant d(z,x),$$

поэтому $d(z,x) = d(y,z)$. Следовательно, функция d корректно определена на множестве $\underline{M}$ классов эквивалентности по отношению $d(x,y) = 0$. Она задает метрику на $\underline{M}$.

Утверждение 4.12: Каждое пространство (M,d) с полуметрикой наделено сюрьективным отображением $\pi: \ M \longrightarrow \underline{M}$ в метрическое пространство $(\underline{M}, \underline{d})$, при этом

$$d(x,y) = \underline{d}(\pi(x), \pi(y)). \tag{4.3.1}$$

■

Замечание 4.13. Если задано отображение $\pi: \ M \longrightarrow \underline{M}$ в метрическое пространство, то формула (4.3.1) определяет на M полуметрику.

Определение 4.14. Пусть $\sim$ – отношение эквивалентности на метрическом пространстве (X,d). Определим функцию $d_\sim: \ X/\!\sim \times X/\!\sim \longrightarrow \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ на факторе $X/\!\sim$ по формуле

$$d_\sim(x,y) = \inf \sum_{i=0}^{n-1} d(p_i, q_{i+1}),$$

где инфимум берется по всем наборам точек $p_i, q_i \in X$ таким, что $p_0 \sim x, q_n \sim y$, и $p_i \sim q_i$.

Утверждение 4.15: Эта функция – полуметрика.

Доказательство: Нетривиально только неравенство треугольника. Но $d(x, y)$ есть инфимум длины "ломаных" $p_0, p_1, q_1, p_2, q_2, ...$ соединяющих x с y, где расстояние между $p_i \sim q_i$ положено равным 0. Если x соединен с y, y с z подобными ломаными, то x соединен с z объединением этих ломаных, что дает $d_\sim(x, z) \leqslant d_\sim(x, y) + d_\sim(y, z)$. ■

Определение 4.16. Пусть $\sim$ – отношение эквивалентности на метрическом пространстве (X, d). Определенная выше полуметрика $d_\sim$ на $X/\sim$ называется **полуметрикой факторпространства**. **Метрическое факторпространство** получается из $X/\sim$ дополнительным отождествлением всех точек x, y таких, что $d_\sim(x, y) = 0$, с метрикой, которая индуцирована с $d_\sim$.

Пример 4.17: Пусть G – группа, действующая на метрическом пространстве (X, d) изометриями, а $x \sim y$, если x и y лежат в одной орбите G. Тогда $d_\sim(a, b)$ есть инфимум расстояний между представителями a, b в X (докажите это).

Замечание 4.18. Метрика $d_\sim$, определенная выше, допускает ε-единицы (докажите это).

4.4. Метрические графы

Определение 4.19. **Несвязное объединение** метрических пространств (X_α, d_α) есть $\coprod X_\alpha$ с метрикой $d(x, y)$ которая равна $d_\alpha(x, y)$, когда x и y лежат в X_α, и ∞ в противном случае.

Определение 4.20. Пусть I_α – набор отрезков, изометричных $[0, x_\alpha]$, а $\sim$ – отношение эквивалентности, полученное склейкой некоторых вершин. Метрический фактор $\coprod_\alpha I_\alpha$ называется **метрическим графом**. Он называется **локально конечным**, если каждая точка отождествляется с конечным числом точек, а длины всех ребер ограничены снизу числом $\varepsilon > 0$.

Утверждение 4.21: Метрика на метрическом графе - всегда внутренняя.

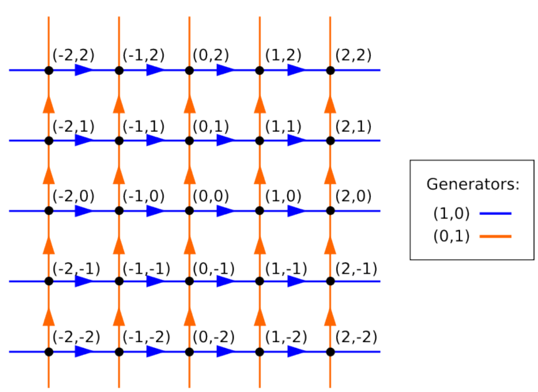
Доказательство: Каждую "ломаную" $p_0, p_1, q_1, p_2, q_2, ...$, соединяющую x и y, можно реализовать объединением отрезков в графе, такой же длины. ■

Замечание 4.22. Естественое отображение из топологического пространства графа в метрический граф – гомеоморфизм для локально конечного графа. Для не локально конечных графов это может быть не биекция, или биекция, но не гомеоморфизм (приведите примеры).

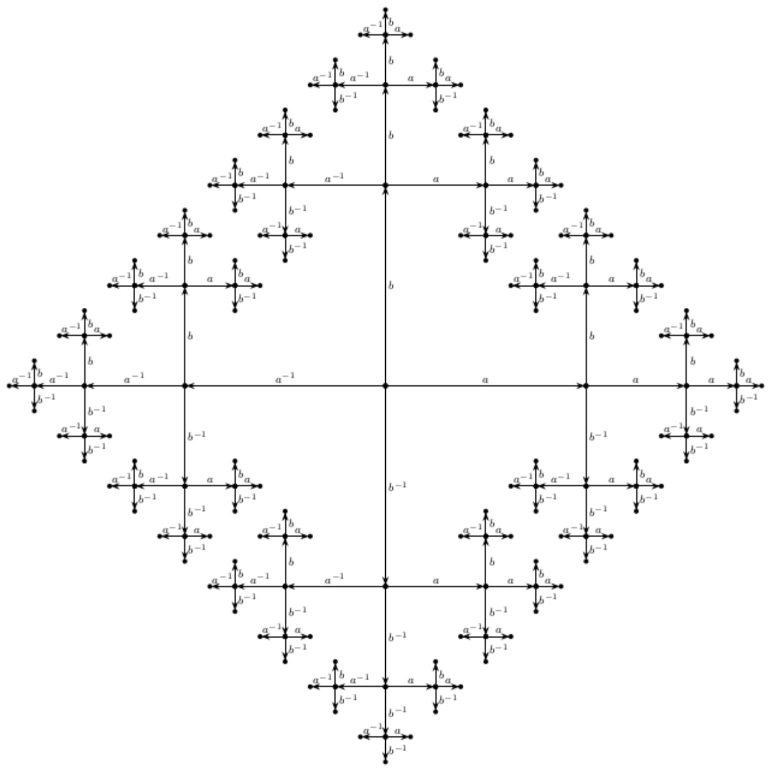
Определение 4.23. **Набор образующих** группы G есть множество элементов S, мультипликативно порождающих G. В дальнейшем, мы будем всегда предполагать, что $s \in S \Leftrightarrow s^{-1} \in S$.

Определение 4.24. Пусть G – группа, $\{s_i\}$ – набор образующих. **Граф Кэли** пары $(G, \{s_i\})$ есть граф, вершины которого – элементы G, а ребра соединяют точки вида g и gs_i. Полагая длину ребер графа равной 1, мы определяем метрическое пространства граф Кэли как описано выше.

Пример 4.25: Граф Кэли для $\mathbb{Z}^n$ с обычным набором образующих есть кубическая решетка.

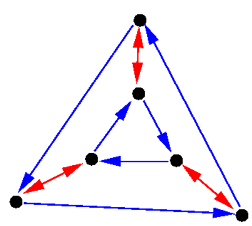


Пример 4.26: Граф Кэли для свободной группы – регулярное дерево



Граф Кэли свободной группы $\mathbb{F}_2$ с образующими a, b, a^{-1}, b^{-1}.

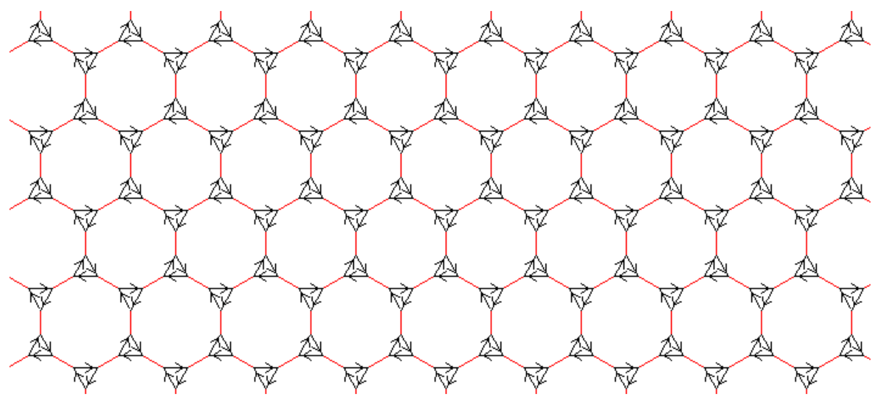
Пример 4.27:



Граф Кэли для симметрической группы S_3.

Группа $S^3 = \langle k, r \mid k^2 = r^3 = (kr)^3 = 1\rangle$ задается образующими k, r, и соотношениями $k^2 = r^3 = (kr)^2 = 1$.

Пример 4.28:



Граф Кэли для группы, заданной образующими k, r, и соотношениями $k^2 = r^3 = (kr)^6 = 1$.

4.5. Полиэдральные метрические пространства

Полиэдральные метрические пространства определяются индуктивно, как результат склейки k-мерных выпуклых многогранников и $k-1$-мерного полиэдрального пространства по границе.

Определение 4.29. Полиэдральное метрическое пространство размерности k определяется по индукции. Каждое k-мерное полиэдральное метрическое пространство получено объединением своих **l-скелетов** K_l, $l = 1, 2, 3, ..., k$, причем $K_k = K$, а каждое из K_l есть полиэдральное метрическое пространство размерности l. Каждое K_k получено из K_{k-1} приклеиванием выпуклых евклидовых многогранников, следующим образом.

Пусть задано полиэдральное метрическое пространство K размерности $k-1$ и набор выпуклых многоогранников V_i в k-мерном евклидовом пространстве. Пусть для каждого из V_i задано изометрическое вложение $\tau_i : \partial V_i \longrightarrow {}_{k-1}$ границы V_i в K_{k-1}, переводящее l-мерные грани V_i в K_l. Метрический фактор $K_{k-1} \coprod_i V_i$ по соотношению, заданному таким склеиванием, называется **полиэдральным метрическим пространством размерности k.**

Задача 4.30. Докажите, что метрика на полиэдральном метрическом пространстве - внутренняя.

4.6. Клеточные пространства в алгебраической топологии

При склейке полиэдрального пространства, топологию на факторе можно обрести двумя способами, рассмотрев метрический фактор или же рассмотрев топологический фактор. Для конечного числа полиэдральных клеток, никакой разницы нет (докажите это). Для бесконечного полиэдра, метрический фактор может отличаться от топологического (приведите примеры).

В такой ситуации, топологи употребляют понятие "CW-комплекса", клеточного пространства со слабой топологией; буква C отвечает за клетки (cells), а W за слабую топологию (weak).

CW-комплексы были определены Уайтхедом в 1949-м году. Их определение не слишком отличается от определения полиэдральных пространств, данного выше: берется 0-скелет (дискретное множество), к нему подклеивается 1-клетки (набор компактных отрезков), что дает граф с вершинами в этом дискретном множестве: 1-скелет. К 1-скелету приклеиваьтся двумерные клетки (компактные диски) с границей на этом графе и так далее.

"Слабая топология" означает, что подмножество в CW-комплексе открыто тогда и только тогда, когда его пересечение с каждой клеткой открыто. Это соответствует топологии фактора, определенной в начале лекции.