5. Метрическая геометрия, лекция 5: углы и конус

5.1. Углы и конусы: введение

Понятие угла между путями переносится на случай метрических пространств практически без затруднений. Эта конструкция принадлежит А. Д. Александрову.

Используя понятие угла, можно определить "равнонаправленные пути" как пути, угол между которыми в данной точке равен нулю. В этой лекции я докажу, что угол определяет метрику на "пространстве направлений", которое можно определить как пространство классов эквивалентности равнонаправленных путей.

Что интересно, существует и обратная конструкция: каждое пространство X с диаметром не больше, чем π, является пространством направлений для метрического пространства $C(X)$, которое называется **конусом** X и устроено как произведение X и луча $[0, \infty[$, с $X \times \{0\}$ стянутым в точку, и с метрикой, такой, что естественное действие группы $\mathbb{R}^{>0}$ на $C(X)$ определяет гомотетию.

В этой лекции я расскажу обе конструкции. Понятие угла играет центральную роль в геометрии Александрова, ибо на нем основаны два из множества эквивалентных определений пространств Александрова, и соответствующая версия CAT-неравенства чрезвычайно проста для проверки.

5.2. Углы

Определение 5.1. Пусть a, b, c – точки в метрическом пространстве (M, d). Здесь и в дальнейшем $\mathbb{R}^2$ предполагается метрическим пространством, с обычной (евклидовой) метрикой. **Треугольник сравнения** $\triangle(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ есть треугольник в $\mathbb{R}^2$, с вершинами $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, и сторонами $|\bar{a}, \bar{b}| = d(a, b)$, $|\bar{a}, \bar{c}| = d(a, c)$, и $|\bar{b}, \bar{c}| = d(b, c)$ (такой треугольник, очевидно, существует, и определен единственно с точностью до конгруэнтности). Угол $\measuredangle(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ в треугольнике $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ обозначается $\theta(a, b, c)$; он называется **углом сравнения**.

Определение 5.2. Пусть $\gamma_1 : [0, a] \longrightarrow M$, $\gamma_2 : [0, b] \longrightarrow M$ – два пути в метрическом пространстве M, $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$. **Угол** между путями

γ_1, γ_2 в p есть число

$$\measuredangle(\gamma_1, p, \gamma_2) := \lim_{t,s\to 0} \theta(\gamma_1(t), p, \gamma_2(s)),$$

если такой предел существует (в противном случае, говорится, что **угол между γ_1 и γ_2 не существует**). **Верхний угол** есть

$$\measuredangle_{\sup}(\gamma_1, p, \gamma_2) := \limsup_{t,s\to 0} \theta(\gamma_1(t), p, \gamma_2(s)),$$

где $\limsup$ обозначает супремум всех предельных точек последовательностей $\theta(\gamma_1(t_i), p, \gamma_2(s_j))$, для всех t_i, s_j сходящихся к 0.

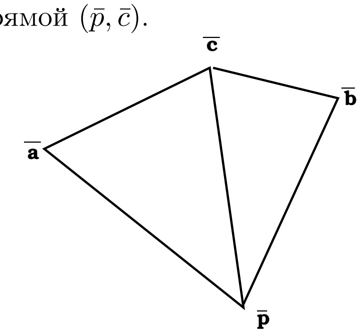
Задача 5.3. Проверьте, что угол между гладкими путями в $\mathbb{R}^n$ существует и равен углу между их касательными.

Замечание 5.4. Пусть $\gamma : : [0, a] \longrightarrow M$ – кратчайшая, наделенная геодезической параметризацией, а $\gamma(0) = p$. Тогда угол $\measuredangle_{\sup}(\gamma, p, \gamma)$ существует и равен нулю. Действительно, для любой тройки точек a, b, p на кратчайшей, неравенство треугольника $d(a, p) + d(a, b) \geqslant d(p, b)$ превращается в равенство, если a ближе к p, чем b. Но в этом случае, в соответствующем треугольнике сравнения угол при p равен 0, что дает $\theta(a, p, b) = 0$.

Теорема 5.5: Пусть $\gamma_i : [0, a] \longrightarrow M$ – пути в M, Тогда верно **неравенство треугольника для верхних углов:**

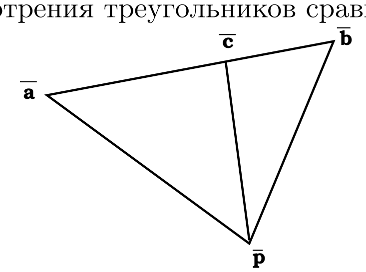
$$\measuredangle_{\sup}(\gamma_1, p, \gamma_2) + \measuredangle_{\sup}(\gamma_2, p, \gamma_3) \geqslant \measuredangle_{\sup}(\gamma_1, p, \gamma_3).$$

Доказательство. Шаг 1: Пусть $\gamma_i(0) = p$, $a = \gamma_1(s), b = \gamma_3(t)$, $c = \gamma_2(u)$. Рассмотрим треугольники сравнения $\triangle(\bar{p}, \bar{a}, \bar{c})$ и $\triangle(\bar{p}, \bar{c}, \bar{b})$, и нарисуем их на плоскости, с общей стороной $|\bar{p}, \bar{c}|$, чтобы они лежали по разные стороны от прямой $(\bar{p}, \bar{c})$.



В силу непрерывности $d(p, \gamma_2(u))$, для любых заданных s, t, можно подобрать u таким образом, что $\bar{c}$ лежит на отрезке $[\bar{a}, \bar{b}]$.

Шаг 2: Из рассмотрения треугольников сравнения



убеждаемся, что

$$\theta(a,p,b)+\theta(b,p,c)=\measuredangle(\bar{a},\bar{p},\bar{c})=\arccos\left(\frac{s^2+t^2-|\bar{a},\bar{c}|^2}{2st}\right)$$

где $s=d(p,a)$ и $t=d(p,c)$.

Шаг 3: По определению, $|\bar{a},\bar{c}|=|\bar{a},\bar{b}|+|\bar{b},\bar{c}|=d(a,b)+d(b,c)\geqslant d(a,c)$. В силу монотонности арккосинуса, получаем

$$\measuredangle(\bar{a},\bar{p},\bar{c})=\arccos\left(\frac{s^2+t^2-|\bar{a},\bar{c}|^2}{2st}\right)\geqslant\arccos\left(\frac{s^2+t^2-d(a,c)^2}{2st}\right)=\theta(a,p,c).$$

Шаг 4: Сравнивая формулы, полученные в шаге 2 и шаге 3, получаем $\theta(a,p,b)+\theta(b,p,c)\geqslant\theta(a,p,c)$; неравенство для $\measuredangle_{\sup}$ следует немедленно. ■

5.3. Пространство направлений

Определение 5.6. Путь $\gamma: [0,a]\longrightarrow M$ **имеет направление**, если угол $\measuredangle(\gamma,\gamma(0),\gamma)$ существует. Пути $\alpha,\beta: [0,a]\longrightarrow M$, $\alpha(0)=\beta(0)=p$ **имеют одинаковое направление**, если $\measuredangle_{\sup}(\alpha,p,\beta)=0$.

Замечание 5.7. В силу неравенства треугольника для углов, отношение «$\alpha\sim\beta$, если $\measuredangle_{\sup}(\alpha,p,\beta)=0$» задает отношение эквивалентности $\sim$ на множестве всех путей $\gamma: [0,a]\longrightarrow M$, $\gamma(0)=p$, имеющих направление.

Определение 5.8. **Пространство направлений** в точке p есть множество классов эквивалентности путей $\gamma: [0,a]\longrightarrow M$, $\gamma(0)=p$, имеющих направление, по отношению $\sim$.

Утверждение 5.9: Функция $\measuredangle_{\sup}(\alpha, p, \beta)$ задает метрику на пространстве направлений. ■

Замечание 5.10. В силу Замечания 5.4, кратчайшая всегда имеет направление. Для многих практических целей, полезно определить пространство направлений не так, как определено выше, а как пространство направлений всех кратчайших. В разумной ситуации (скажем, для полиэдральных пространств) эти два определения эквивалентны.

Следующее упражнение довольно сложное.

Задача 5.11. Пусть M – полное, локально компактное пространство с внутренней метрикой. Докажите, что каждый путь, имеющий направление, экивалентен кратчайшей.

5.4. Конус пространства с $\mathsf{diam} \leqslant \pi$

Понятие "конуса" соответствует нашему интуитивному представлению о конусе, натянутом на метрическое пространство. Так, например, конус над сферой S^n это $\mathbb{R}^{n+1}$, а если $X \subset S^n$ – подмножество сферы, то его конус – объединение всех лучей в $\mathbb{R}^{n+1}$ с началом в 0, проходящих через X.

Докажите это утверждение после того, как вы прочтете раздел.

Определение 5.12. **Диаметр** метрического пространства M есть число $\mathsf{diam}(M) := \sup_{x,y\in M} d(x, y)$.

Определение 5.13. Пусть (X, d) – метрическое пространство, $\mathsf{diam}\, X \leqslant \pi$. Рассмотрим топологическое пространство $C(X)$ с топологией фактора, полученное из $X \times [0, \infty[$ склеиванием $X \times \{0\}$ в точку. Определим функцию $d_C : C(X) \times C(X) \longrightarrow \mathbb{R}^{>0}$ по формуле

$$d(p, q) = \sqrt{t^2 + s^2 - 2ts \cos(d(x, y))},$$

где $p = (x, t), q = (y, s)$. В скором времени будет доказано, что d_C есть метрика. Пространство $C(X)$ с вышеописанной метрикой называется **метрическим конусом**, или просто **конусом** над X.

Замечание 5.14. Это определение имеет следующий геометрический смысл. Если p, q соединены кратчайшей в X, мы рисуем кратчайшую A

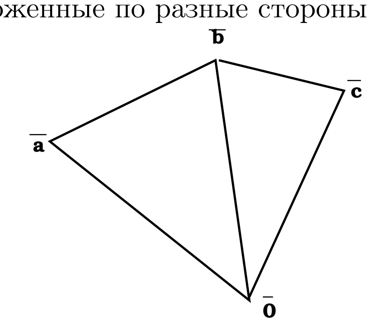
такой же длины на единичной окружности. Ее конус есть угловой сектор в $\mathbb{R}^2$, который высекает A. Расстояния в этом секторе определяются обычным образом как на подмножестве в $\mathbb{R}^2$. Если в X нет кратчайшей, соединяющей p и q, мы вкладываем лучи $\{p\} \times \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ и $\{q\} \times \mathbb{R}^{\geqslant 0}$, натянутые на p и q, в $\mathbb{R}^2$, таким же образом, и считаем расстояния между $\{p\} \times x$ и $\{q\} \times y$ по той же формуле, как если бы кратчайшая существовала.

Теорема 5.15: Функция d_C удовлетворяет неравенству треугольника.

Замечание 5.16. Проще всего это увидеть, если любые две точки X соединены кратчайшими. В этом случае любые две точки $C(X)$ лежат на конусе над отрезком, который изометричен области в $\mathbb{R}^2$, ограниченной двумя расходящимися лучами, любые три точки лежат на полиэдральном пространстве, полученном склеиванием таких углов по границам, и неравенство треугольника достаточно проверить на этом пространствем где оно очевидно.

Доказательство. Шаг 1: Пусть $(\alpha, t), (\beta, s)$ – точки в конусе $C(X)$, а $\triangle(\bar{0}, \bar{a}, \bar{b})$ – треугольник сравнения со сторонами t, s и углом $\measuredangle(\bar{a}, \bar{0}, \bar{b}) = d(\alpha, \beta)$. Тогда $d_C(a, b) = |\bar{a}, \bar{b}|$.

Шаг 2: Пусть $a = (\alpha, r), b = (\beta, s), c = (\gamma, t)$ – три точки на $C(X)$, а $\triangle(\bar{0}, \bar{a}, \bar{b})$, $\triangle(\bar{0}, \bar{b}, \bar{c})$ соответствующие треугольники сравнения, с общей стороной $[\bar{0}, \bar{b}]$, и отложенные по разные стороны от $(\bar{0}, \bar{b})$.



Тогда $d_C(a, c) \leqslant |\bar{a}, \bar{c}| \leqslant |\bar{a}, \bar{b}| + |\bar{b}, \bar{c}| = d_C(a, b) + d_C(b, c)$. ■

Следующие свойства конуса очевидны.

а. Для каждого $x \in X$, путь $\gamma : [0, a] \longrightarrow C(X)$, переводящий a в (x, a) – кратчайшая.

б. Пусть $x, y \in X$, а $\gamma_1 := (x, [0, a])$, $\gamma_2 := (y, [0, b]) \subset C(X)$ – соответствующие кратчайшие в конусе. Тогда $\measuredangle(\gamma_1, 0, \gamma_2) = d(x, y)$.

в. Конус над отрезком длины α изометричен плоскому углу в $\mathbb{R}^2$ величины α.

Утверждение 5.17: Предположим, что X – пространство с внутренней метрикой и кратчайшими.Тогда метрика на $C(X)$ – тоже внутренняя и с кратчайшими.

Доказательство. Шаг 1: Для каждой кратчайшей $\gamma \in X$, конус $C(\gamma)$ изометричен плоскому углу, значит, метрика на $C(\gamma)$ внутренняя и с кратчайшими.

Шаг 2: Любые две точки на конусе лежат на $C(\gamma)$ для подходящей кратчайшей γ. ■

5.5. Конус пространства с $\operatorname{\mathsf{diam}} \geqslant \pi$

Иногда бывает полезно определить конус и для пространства диаметра больше π. Такой простой геометрической интерпретации, как для $\operatorname{\mathsf{diam}} \leqslant \pi$, у него нет, но группа гомотетий у такого конуса тоже содержит $\mathbb{R}^{>0}$, и многие другие полезные свойства сохраняются.

Среди прочего, нетрудно доказать, что каждое полиэдральное метрическое пространство локально изометрично конусу.

Докажите это утверждение после того, как вы прочтете раздел, и придумайте пример полиэдрального пространства, для которого конус имеет $\operatorname{\mathsf{diam}} \geqslant \pi$.

Замечание 5.18. Пусть (X, d) – метрическое пространство, $a > 0$, а $d_a(x, y) = \min(d(x, y), a)$. Тогда d_a – тоже метрика. Доказательство см. в лекции 2.

Определение 5.19. Пусть (X, d) – метрическое пространство, d_π – метрика на X, определенная выше. Определим **конус** $(C(X), d_C)$ как конус над (X, d_π).

Утверждение 5.20: Пусть (X, d) – пространство с внутренней метрикой и кратчайшими. Тогда метрика d_C на $C(X)$ тоже внутренняя и с кратчайшими.

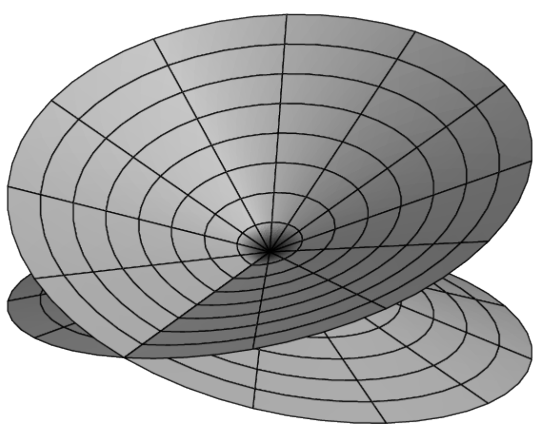
Доказательство. Шаг 1: Для каждой кратчайшей $\gamma \in X$ длины $\alpha \leqslant \pi$, конус $C(\gamma)$ изометричен плоскому углу величины α. Поэтому любые две точки (a, s) и (b, t) с $d(a, b) \leqslant \pi$ можно соединить кратчайшей.

Шаг 2: Если (a, s) и (b, t) точки, для которых $d_\pi(a, b) = \pi$, расстояние между ними есть $s + t$, а соответствующая кратчайшая – отображение $\gamma: [-s, t] \longrightarrow C(X)$, полученное объединением сегментов

$$\lambda \mapsto (a, \lambda), \lambda \in [-s, 0]$$
$$\lambda \mapsto (b, \lambda), \lambda \in [0, t]. \quad \blacksquare$$

Такие конусы часто возникают в полиэдральных пространствах. Вырезав из листа бумаги сектор с углом 2π, $0 < x < 2\pi$, и склеив лучи на границах друг с другом, можно получить полиэдральное пространство с конической особенностью. Легко видеть, что это будет конус над окружностью радиуса $1-$. Подобные полиэдральные пространства можно получить, склеив цепочку плоских секторов с углами $2x_1\pi, 2x_2\pi, ..., 2x_n\pi$. В результате такой склейки получится полиэдральное пространство, изометричное конусу над окружностью радиуса $\sum x_i$. Особенность такого пространства называется **конической особенностью с углом** $2\pi \sum x_i$. Для целого n, коническую особенность с углом $2\pi n$ можно реализовать как график функции $y = z^n$ в комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Метрика на таком графике индуцируется с проекции на y; поскольку эта проекция вне нуля – накрытие, метрика вне нуля плоская.

Конические особенности с углами, кратными 2π, играют важную роль в комплексном анализе, где их называют **римановыми поверхностями функций** $z \longrightarrow \sqrt[n]{z}$. Вот, например, график римановой поверхности функции $\sqrt{z}$, она же – коническая особенность с углом 4π.



Риманова поверхность функции $f(z) = \sqrt{z}$.