Метрическая Геометрия 2: Внутренние метрики.

Правила: Зачеты по листкам бывают двух типов: когда сданы все (или или 2/3) задачи со звездочками, либо все (или 2/3) задачи без звездочек. Задачи с двумя звездочками можно не сдавать. Сдавшим k задач с двумя звездочками разрешается не сдавать $2k$ задач со звездочками или факториалом из того же листочка. Задачи, обозначенные (!), следует сдавать и тем и другим. Если сданы 2/3 задач со звездочками и (!), студент получает $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) двух – $10t$ баллов. Если сданы 2/3 задач без звездочки и с (!), студент получает $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) трех – $10t$ баллов. Эти виды оценок не складываются, то есть больше $10t$ за листочек получить нельзя.

Коэффициент t равен 1.5, если задачи сданы не позже, чем через 31 день после выдачи, 1, если между 31 и 50 днями, и 0.7, если позже.

Результаты сдачи записываются на листке ведомости, которая выдается студенту; просьба не терять ее, больше нигде результаты храниться не будут.

2.1. Линейная связность.

Определение 2.1. Пусть дано топологическое пространство M. Подмножество $W \subset M$ называется **открытозамкнутым**, если оно открыто и замкнуто. M называется **связным**, если любое открытозамкнутое подмножество M это либо $\emptyset$, либо само M. Подмножество $Z \subset M$ называется **связным**, если оно связно в индуцированной топологии.

Определение 2.2. Пусть M – топологическое пространство. **Путем** в M называется непрерывное отображение $[a, b] \xrightarrow{\phi} M$. В этом случае говорится, что путь ϕ **соединяет точки** $\phi(a)$ **и** $\phi(b)$. M называется **линейно связным**, если любые две точки M можно соединить путем $[a, b] \xrightarrow{\phi} M$.

Задача 2.1 (!). Докажите, что линейно связное пространство связно.

Задача 2.2. Докажите, что объединение линейно связных подмножеств M, содержащих выбранную точку $x \in M$, линейно связно.

Определение 2.3. Объединение всех линейно связных подмножеств, содержащих какую-то фиксированную точку x, называется **компонентой линейной связности** M.

Задача 2.3. Рассмотрим следующее подмножество $X \subset \mathbb{R}^2$: график функции $\sin(1/t)$, объединенный с отрезком $[(0, 1), (0, -1)]$. Докажите, что X локально компактно, связно, и не линейно связно. Найдите компоненты линейной связности.

Определение 2.4. Топологическое пространство M называется локально связным (локально линейно связным), если каждая окрестность точки $x \in M$ содержит связную (линейно связную) окрестность x

Задача 2.4. Постройте связное, линейно связное, но не локально линейно связное пространство.

Задача 2.5. Пусть M – локально линейно связное, связное пространство. Докажите, что оно линейно связно.

Задача 2.6. Пусть M – локально линейно связное пространство. Докажите, что M является несвязным объединением своих компонент линейной связности.

Задача 2.7 (**). Пусть H – вещественное гильбертово пространство, то есть пространство последовательностей $\{a_i \in \mathbb{R}\}$, удовлетворяющих $\sum a_i^2 \leqslant \infty$, с метрикой вида $d(\{x_i\}, \{y_i\}) = \sum |x_i - y_i|^2$. Обозначим за $H_0 \subset H$ множество всех последовательностей $\{a_i\}$, у которых все a_i кроме конечного числа, рациональны. Верно ли, что H связно? Линейно связно?

2.2. Функционал длины

Определение 2.5. Пусть M – топологическое пространство. Говорится, что на M **задан класс допустимых путей**, если задано множество путей $[a,b] \longrightarrow M$ такое, что

а. Для любых двух путей $[a,b] \xrightarrow{\gamma_1} M$ и $[b,c] \xrightarrow{\gamma_2} M$, удовлетворяющих $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$, путь $\gamma: [a,c] \longrightarrow M$, равный γ_1 на $[a,b]$ и γ_2 на $[b,c]$, тоже допустим. Такая операция называется "склейка путей".

б. Если $\phi: [a,b] \longrightarrow [c,d]$ линейное отображение, а путь $\gamma: [c,d] \longrightarrow M$ допустим, путь $\phi \circ \gamma$ тоже допустим.

в. Для каждого пути $[a,b] \xrightarrow{\gamma} M$, и отрезка $[c,d] \subset [a,b]$, ограничение $\gamma\Big|_{[c,d]}$ – тоже допустимый путь.

Задача 2.8. Докажите, что кусочно-линейные пути в $\mathbb{R}^n$, кусочно-полиномиальные, кусочно-дифференцируемые образуют допустимый класс путей.

Определение 2.6. Пусть M – топологическое пространство, снабженное допустимым классом путей. Функционал $L(\gamma)$, отображающий допустимые пути в числа, называется **функционалом длины**, если он удовлетворяет следующим условиям.

а. (аддитивность длины) Для любого пути $\gamma: [a,c] \longrightarrow M$, и любого $b \in [a,c]$, $L(\gamma) = L(\gamma\Big|_{[a,b]}) + L(\gamma\Big|_{[b,c]})$, где $\gamma\Big|_{[c,d]}$ обозначает ограничение пути, то есть функции $\gamma: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ на отрезок $[c,d] \subset [a,b]$.

б. (непрерывность длины пути как функции от координат концов) Для любого пути $\gamma: [a,c] \longrightarrow M$, функция $L(\gamma\Big|_{[a,b]})$ непрерывно зависит от $b \in [a,c]$.

в. Длина не меняется при замене параметра: если $\phi: [a,b] \longrightarrow [c,d]$ – гомеоморфизм отрезков, а $\gamma: [c,d] \longrightarrow M$ и $\phi \circ \gamma: [a,b] \longrightarrow M$ – допустимые пути, то $L(\gamma) = L(\phi \circ \gamma)$.

г. (длина пути согласована с топологией) Пусть Z – замкнутое подмножество M, а $x \notin Z$ точка, не лежащая на Z. Тогда существует число $\varepsilon > 0$ такое, что любой путь, соединяющий x с какой-то точкой Z, имеет длину $\geqslant \varepsilon$.

Задача 2.9. Пусть M – топологическое пространство, снабженное классом допустимых путей и функционалом длины. Определим функцию $d: M \times M \longrightarrow \mathbb{R}^{\geqslant 0}$, положив $d(x,y) := \inf_\gamma L(\gamma)$, где инфимум берется по всем путям, соединяющим x и y. Докажите, что это метрика.

Определение 2.7. Такая функция называется **внутренняя метрика, определенная по функционалу длины**

Задача 2.10. Пусть M – топологическое пространство, снабженное классом допустимых путей и функционалом длины, а d – соответствующая внутренняя метрика. Докажите, что (M,d) локально линейно связно.

Задача 2.11 (!). Пусть M – топологическое пространство с классом допустимых путей и функционалом длины, d – внутренняя метрика, а $(M,d) \longrightarrow M$ тождественное отображение из M с топологией, которая индуцирована внутренней метрикой, в M с топологией, которая задана на нем изначально. Докажите, что это отображение непрерывно.

Задача 2.12. Пусть $M = \mathbb{R}^n$, класс допустимых путей - кусочно-линейные пути (то есть ломаные), со звеньями $[x_i, x_{i+1}]$, а длина пути определяется формулой $L(\gamma) = \sum |d(x_i, x_{i+1})|$. Докажите, что внутренняя метрика равна обычной.

Задача 2.13. "поход по болоту" Пусть $M = \mathbb{R}^n$, класс допустимых путей - кусочно-линейные пути (то есть ломаные), со звеньями $[x_i, x_{i+1}]$, $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{>0}$ непрерывная, положительная функция, а длина пути определяется формулой

$$L(\gamma) = \sum \int_{[x_i, x_{i+1}]} f$$

(интеграл от f по отрезку $[x_i, x_{i+1}]$). Докажите, что это функционал длины, а внутренняя метрика индуцирует обычную топологию.

Определение 2.8. Такая метрика называется **конформно плоской**.

Определение 2.9. Пусть $M = \mathbb{R}^n$ или его открытое подмножество, а класс допустимых путей – кусочно-гладкие пути. Предположим, что для каждой точке $x \in M$ задано скалярное произведение $g_x \in \mathsf{Sym}^2 T_x^* M$ на $T_x M$ (здесь $T_x^* M$ – кокасательное пространство, а $\mathsf{Sym}^2 T_x^* M$ – линейное пространство билинейных, симметричных форм на $T_x M$. Предположим, что g_x гладко зависит от x.[1] Определим функционал длины пути $\gamma: [a, b] \longrightarrow M$ формулой

$$L(\gamma) := \int_a^b \sqrt{g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))} dt$$

Соответствующая внутренняя метрика на M называется **римановой метрикой**, а форма g_x – **римановой формой** этой метрики.

Задача 2.14 (!). Докажите, что топология, индуцированная римановой метрикой, эквивалентна обычной.

Определение 2.10. Гладкое подмногообразие $\mathbb{R}^n$ есть замнутое подмножество $M \subset \mathbb{R}^n$, такое, что для каждой точки $x \in M$ найдется окрестность $U \ni x$ и диффеоморфизм U на открытый шар B, ограничение которого на $M \cap U$ определяет гомеоморфизм $M \cap U$ и гиперплоскости $B \cap \mathbb{R}^k$.

Задача 2.15. Докажите, что $(n-1)$-сфера $\{z \in \mathbb{R}^n, |z| = 1\}$ есть гладкое подмногообразие в $\mathbb{R}^n$.

Задача 2.16 (*). Постройте гладкое подмногообразие в $\mathbb{R}^6$, гомеоморфное $\mathbb{R}P^2 = S^2/\{\pm 1\}$.

Задача 2.17 (!). Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ гладкое подмногообразие, а на $\mathbb{R}^n$ задана риманова форма. Определим класс допустимых путей в M как множество всех кусочно гладких путей в $\mathbb{R}^n$, которые лежат в M, и риманов функционал пути обычной формулой

$$L(\gamma) := \int_a^b \sqrt{g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))} dt.$$

Докажите, что полученная из этого функционала внутренняя метрика задает стандартную топологию на M.

[1] Более точно, следовало бы сначала сказать, что все пространства $T_x M$ отождествлены, поскольку M – открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$, а значит, g есть отображение из M в $\mathsf{Sym}^2 \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$; и потребовать гладкости этого отображения.

Определение 2.11. Такая метрика называется **римановой**, а M – **римановым многообразием**.

Задача 2.18. Рассмотрим риманову форму на

$$S^n = \left\{(x_1, ..., x_{n+1}) \;\middle|\; \sum x_i^2 = 1\right\},$$

полученную из обычной римановой формы на $\mathbb{R}^{n+1}$. Обозначим за d соответствующую риманову метрику. Пусть $x, y \in S^n$ – две точки, O – центр сферы, то есть точка $(0, 0, ..., 0)$. Докажите, что $d(x, y)$ есть угол треугольника xOy, измеренный в радианах.

Задача 2.19 (*). Определите абстрактное риманово многообразие (не обязательно вложенное в $\mathbb{R}^n$). Докажите, что любое компактное многообразие M допускает гладкое вложение в $\mathbb{R}^n$, для достаточно большого n. Докажите, что любая риманова форма на M может быть получена ограничением из какой-то римановой формы на $\mathbb{R}^n$.

2.3. Длина пути в метрическом пространстве

Определение 2.12. Пусть (M, d) – метрическое пространство, а $\gamma : [a, b] \to M$ – путь. Рассмотрим разбиение отрезка $[a, b] = [a, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup ... \cup [x_{n-1}, b]$. Обозначим $x_0 := a, x_n := b$. Положим

$$L_\gamma(x_1, ... x_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} d(x_i, x_{i+1}).$$

Определим **длину пути** γ формулой

$$L_d(\gamma) := \sup_{a < x_1 < ... < x_{n-1} < b} L_\gamma(x_1, ... x_{n-1}).$$

где супремум берется по всем разбиениям отрезка. Путь γ называется **спрямляемым**, если $L_d(\gamma) < \infty$.

Задача 2.20 (!). Пусть $\gamma : [a, b] \to M$ – спрямляемый путь в метрическом пространстве M, а $x_0(N) = a < x_1(N) < ... < x_{n_N}(N) = b$ — последовательность разбиений отрезка, такая, что $\lim\limits_{N\to\infty} \max_i |x_i(N) - x_{i-1}(N)| = 0$. Докажите, что $\lim\limits_{N\to\infty} L_\gamma(x_1(N), ..., x_{n_N}(N)) = L_d(\gamma)$.

Определение 2.13. Путь $\gamma : [a, b] \to M$ называется **кратчайшая**, если $L_d(\gamma) = d(a, b)$.

Задача 2.21. Пусть $\gamma : [a, b] \to M$ – кратчайшая. Докажите, что ее образ изометричен отрезку в $\mathbb{R}$.

Задача 2.22 (!). Пусть $\phi : [a, b] \to [a, b]$ – гомеоморфизм, а $\gamma : [a, b] \to M$ – какой-то путь. Докажите, что $L_d(\gamma) = L_d(\phi \circ \gamma)$.

Задача 2.23. Найдите все кратчайшие в $\mathbb{R}^n$ с обычной метрикой.

Задача 2.24 (*). Найдите все кратчайшие на сфере S^n, с римановой метрикой, полученной ограничением римановой формы с $\mathbb{R}^{n+1}$.

Задача 2.25. Пусть γ – спрямляемый путь в метрическом пространстве M, а $\phi : M \to M'$ – C-липшицево отображение. Докажите, что $\gamma \circ \phi$ – спрямляемый путь в M'.

Задача 2.26. Пусть $[a,b] = [a,x_1] \cup [x_1,x_2] \cup ... \cup [x_{n-1},b]$, а $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ – путь в $\mathbb{R}^n$ с обычной метрикой, причем $L_\gamma(x_1,...x_{n-1}) \geqslant L_d(\gamma) - \varepsilon$, а $d(\gamma(x_i),\gamma(x_{i+1})) < \varepsilon$. Докажите, что γ находится в 3ε-окрестности объединения кратчайших, соединяющих $\gamma(a), \gamma(x_1), ..., \gamma(x_{n-1}), \gamma(b)$.

Задача 2.27 (!). Пусть γ – спрямляемый путь в $\mathbb{R}^n$, $n > 1$, с обычной метрикой. Докажите, что для каждого $\varepsilon > 0$ образ γ содержится в объединении параллелепипедов суммарного объема $\leqslant \varepsilon$.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 2.28 (*). Постройте неспрямляемый путь в $\mathbb{R}^2$

Указание. Постройте кривую Пеано, сюрьективно отображающую $[0,1]$ на квадрат, и примените предыдущую задачу.

Задача 2.29 (*). Пусть M – метрическое пространство, содержащее непостоянный путь. Докажите, что в M существует неспрямляемый путь.

Задача 2.30 (**). Постройте линейно связное компактное метрическое пространство, в котором нет непостоянных спрямляемых путей, либо докажите, что такого не существует.

Задача 2.31. Пусть M – метрическое пространство, а $\gamma : [a,b] \to M$ – спрямляемый путь. Докажите, что $L_d(\gamma\big|_{[a,c]})$ есть непрерывная функция точки $c \in [a,b]$.

2.4. Внутренние метрики

Задача 2.32. Пусть M – топологическое пространство, снабженное классом допустимых путей и функционалом длины. Определим функцию $d : M \times M \to \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ положив $d(x,y) := \inf_\gamma L(\gamma)$, где инфимум берется по всем путям, соединяющим x и y. Докажите, что это метрика.

Задача 2.33 (!). Пусть M – метрическое пространство, $\mathcal{S}$ – класс спрямляемых путей на M, а $L_d(\gamma)$ – длина пути. Докажите, что $\mathcal{S}$, L_d удовлетворяет условиям функционала длины.

Определение 2.14. Пусть (M,d) – метрическое пространство, $\mathcal{S}$ – класс спрямляемых путей на M, а $L_d(\gamma)$ – функционал длины. **Внутренняя метрика, связанная с** d есть внутренняя метрика, определенная по формуле $d(x,y) := \inf_\gamma L_d(\gamma)$, где инфимум берется по всем путям, соединяющим x и y; мы обозначаем ее $\hat{d}$.

Задача 2.34. Докажите, что $\hat{d} \geqslant d$, для любого метрического пространства (M,d).

Задача 2.35 (!). Пусть $\gamma_i : [a,b] \to M$ – последовательность спрямляемых путей в метрическом пространстве, $L_d(\gamma_i) < C$, равномерно сходящаяся к $\gamma : [a,b] \to M$. Докажите, что путь γ спрямляемый, и любая предельная точка C последовательности $L_d(\gamma_i)$ удовлетворяет $L_d(\gamma) \leqslant C$. Приведите пример, когда $L_d(\gamma) \neq \lim L_d(\gamma_i)$.

Задача 2.36. Зададим функцию $d:\ \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^{\geqslant 0}$ формулой

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = |x_1-x_2| + \sqrt{|y_1-y_2|}.$$

а. Докажите, что это метрика

б. Докажите, что $(\mathbb{R}^2,\hat d)$ несвязно.

Задача 2.37 (!). Пусть (M,d) – метрическое пространство, $(M,\hat d)$ – оно же с внутренней метрикой. Докажите, что для каждого спрямляемого пути γ в (M,d),

а. (!) $L_d(\gamma)\leqslant L_{\hat d}(\gamma)$.

б. (!) $L_d(\gamma)\geqslant L_{\hat d}(\gamma)$.

в. (!) Выведите из этого, что $\hat d = \hat{\hat d}$.

Указание. Первое следует из $d\leqslant \hat d$ (докажите). Чтобы доказать второе, распишите

$$L_{\hat d}(\gamma)-\varepsilon_1 \leqslant \sum_{i=1}^n \hat d(\gamma(x_i),\gamma(x_{i+1}))\leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^n\left[\sum_{j=0}^{n_i-1} d(\gamma(x_{i,j}),\gamma(x_{i,j+1}))+\varepsilon_2\right]\leqslant L_d(\gamma)+n\varepsilon_2,$$

где сумма в квадратных скобках берется по подходящим подразбиением отрезка $[x_i = x_{i,0}, x_{i+1}=x_{i,n_i}]$, а ε_i можно выбрать произвольно малым.

Определение 2.15. Метрика d называется **внутренней** (по-английски говорят "intrinsic metric" или "path metric") если $d=\hat d$.

Задача 2.38. Пусть V – векторное пространство с нормой $|\cdot|$, а метрика d на V определена по формуле $d(v,v')=|v-v'|$. Является ли эта метрика внутренней?

Задача 2.39 (*). Пусть V – векторное пространство с нормой $|\cdot|$, а метрика d на V определена по формуле $d(v,v')=|v-v'|$. Рассмотрим множество всех кратчайших, соединяющих x и y. Докажите, что кратчайшая всегда есть. Докажите, что она единственна, либо множество кратчайших континуально.