

Метрическая Геометрия 3: Графы и факторпространства

Правила: Зачеты по листкам бывают двух типов: когда сданы все (или или 2/3) задачи со звездочками, либо все (или 2/3) задачи без звездочек. Задачи с двумя звездочками можно не сдавать. Сдавшим k задач с двумя звездочками разрешается не сдавать $2k$ задач со звездочками или факториалом из того же листочка. Задачи, обозначенные (!), следует сдавать и тем и другим. Если сданы 2/3 задач со звездочками и (!), студент получает $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) двух – $10t$ баллов. Если сданы 2/3 задач без звездочки и с (!), студент получает $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) трех – $10t$ баллов. Эти виды оценок не складываются, то есть больше $10t$ за листочек получить нельзя.

Коэффициент t равен 1.5, если задачи сданы не позже, чем через 31 день после выдачи, 1, если между 31 и 50 днями, и 0.7, если позже.

Результаты сдачи записываются на листке ведомости, которая выдается студенту; просьба не терять ее, больше нигде результаты храниться не будут.

3.1. Топология фактора

Замечание 3.1. Все топологические пространства в этом курсе предполагаются по умолчанию хаусдорфовыми. Фактор-пространства с топологией фактора представляют собой исключение: они, за редкими исключениями, нехаусдорфовы.

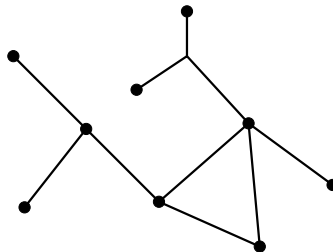
Определение 3.1. Пусть M – топологическое пространство, а \sim – отношение эквивалентности. Множество классов эквивалентности обозначается M/\sim . На M/\sim вводится **топология фактора**: открытые подмножества M/\sim – такие подмножества, прообраз которых в M открыт. Если на M действует группа G , возникает естественное отношение эквивалентности: $x \sim y$, если существует такое $g \in G$, что $g \cdot x = y$. Фактор M по этому отношению эквивалентности называется **факторпространством M по действию G** , и обозначается M/G . Классы эквивалентности называются **G -орбитами** в M .

Задача 3.1. Пусть M – хаусдорфово топологическое пространство, а G – конечная группа, которая действует на M гомеоморфизмами. Рассмотрим факторпространство M/G с топологией фактора. Докажите, что M/G хаусдорфово.

Указание. Пусть x, y – две точки, не принадлежащие одной и той же G -орбите. Найдите у x, y непересекающиеся G -инвариантные окрестности U, U' , и возьмите $\bigcap_{g \in G} gU, \bigcap_{g \in G} gU'$.

Задача 3.2. Приведите пример, когда M хаусдорфово, а M/G нехаусдорфово (и группа, соответственно, не конечна).

Определение 3.2. Пусть Γ – некоторый граф, то есть набор данных вида “множество вершин” $\{\mathcal{V}\}$, “множество ребер” $\{\mathcal{R}\}$, и сведений о том, какие вершины являются концами каких ребер.



Более строго, Γ можно определить как пару множеств \mathcal{V} , \mathcal{R} и сюръективное отображение $\{\mathcal{R}\} \times \{0, 1\} \xrightarrow{\Gamma} \{\mathcal{V}\}$. Введем на $\{\mathcal{R}\} \times [0, 1]$, отношение эквивалентности, порожденное следующим: концы двух ребер эквивалентны, если они примыкают к одной и той же вершине. Это отношение эквивалентности склеивает концы ребер, не затрагивая внутренности отрезков. Фактор $\{\mathcal{R}\} \times [0, 1]$ по этому отношению эквивалентности называется **топологическим пространством графа**.

Задача 3.3. Докажите, что топологическое пространство любого графа хаусдорфово.

Задача 3.4 (*). Пусть G – группа, действующая на $M = \mathbb{R}^n$ гомеоморфизмами, с двумя или больше орбитами. Может ли фактор M/G иметь кодискретную топологию (топологию, в которой открыто только само пространство и пустое множество)?

Задача 3.5 ().** Решите предыдущую задачу в предположении, что орбит ровно две.

Задача 3.6. Пусть $\{U_\alpha\}$ – открытое покрытие топологического пространства M . Рассмотрим несвязное объединение $M' := \coprod_\alpha U_\alpha$, и зададим на M' отношение эквивалентности таким образом: $x \sim y$, если их образы в M совпадают. Докажите, что M' / \sim гомеоморфно M .

3.2. Внутренняя метрика и локальность

Определение 3.3. Пусть (M, d) – метрическое пространство, а $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ – путь. Рассмотрим разбиение отрезка $[a, b] = [a, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \dots \cup [x_{n-1}, b]$. Обозначим $x_0 := a, x_n := b$. Положим

$$L_\gamma(x_1, \dots, x_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} d(x_i, x_{i+1}).$$

Определим **длину пути** γ формулой

$$L_d(\gamma) := \sup_{a < x_1 < \dots < x_{n-1} < b} L_\gamma(x_1, \dots, x_{n-1}).$$

где супремум берется по всем разбиениям отрезка. Путь γ называется **спрямляемым**, если $L_d(\gamma) < \infty$. Метрика d называется **внутренней**, если $d(x, y) = \inf_\gamma L_d(\gamma)$, где инфимум берется по всем путям, соединяющим x и y .

Задача 3.7. Пусть M, M' – метрические пространства, а $f : M \rightarrow M'$ – непрерывная биекция, такая, что у каждой точки $x \in M$ есть окрестность U_x , причем ограничение $f|_{U_x} : U_x \rightarrow f(U_x)$ – изометрия.

а. Докажите, что f – гомеоморфизм.

б. Найдите f , удовлетворяющее этим условиям, и такое, что M и M' связные, но f не изометрия.

в. Пусть метрика в M внутренняя. Докажите, что f 1-липшицева: $d(x, y) \geq d(f(x), f(y))$.

г. Пусть метрика в M' внутренняя. Докажите, что $d(x, y) \leq d(f(x), f(y))$.

Замечание 3.2. Когда говорится "метрика на топологическом пространстве", по умолчанию предполагается, что эта метрика согласована с топологией.

Определение 3.4. Метрика d на топологическом пространстве M называется **локальной**, если для каждого открытого покрытия $\{U_\alpha\}$, и для каждой метрики d' на M такой, что $d|_{U_\alpha} = d'|_{U_\alpha}$, имеем $d \geq d'$.

Задача 3.8. Пусть d – внутренняя метрика. Докажите, что d локальна.

Задача 3.9. Постройте метрику на \mathbb{R} , не внутреннюю, но удовлетворяющую $d(x, y) = |x - y|$ для любого $|x - y| \leq 1$.

Задача 3.10. Пусть d – метрика, а $d_\varepsilon(x, y) = \inf \sum_{i=0}^{n-1} d(p_i, p_{i+1})$, где $p_0 = x$, $p_n = y$, а инфимум берется по всем последовательностям p_i таким, что $d(p_i, p_{i+1}) < \varepsilon$. Докажите, что $d_\varepsilon = d$ на каждом шаре радиуса $\varepsilon/2$.

Задача 3.11 (*). Пусть d – полная метрика, такая, что $d = d_\varepsilon$, для любого $\varepsilon > 0$. Докажите, что d – внутренняя.

Задача 3.12 (*). Пусть d – полная локальная метрика. Докажите, что d – внутренняя.

3.3. Полуметрики на факторпространстве

Определение 3.5. Полуметрика на X есть функция $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0} \cup \infty$, удовлетворяющая неравенству треугольника, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, $d(x, x) = 0$ и $d(x, y) = d(y, x)$, но (в отличие от метрики) не обязательно строго положительная при $x \neq y$.

Задача 3.13. Пусть d – полуметрика на X .

а. Докажите, что соотношение " $x \sim y$, если $d(x, y) = 0$ " – отношение эквивалентности.

б. Докажите, что существует метрика d_0 на X/\sim такая, что $d(x, y) = d_0(x_0, y_0)$, где $x_0, y_0 \in X/\sim$ – точки фактора, соответствующие x, y .

Задача 3.14. Пусть d_α – набор полуметрик, а $d(x, y) := \sup_\alpha d_\alpha(x, y)$. Докажите, что $d(x, y)$ – полуметрика.

Задача 3.15 (!). Пусть \sim – отношение эквивалентности на метрическом пространстве (X, d) . Определим функцию $d_{\sim} : X/\sim \times X/\sim \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ на факторе X/\sim по формуле

$$d_{\sim}(x, y) = \inf \sum_{i=0}^{n-1} d(p_i, q_{i+1}),$$

где инфимум берется по всем наборам точек $p_i, q_i \in X$ таким, что $p_0 \sim x, q_n \sim y$, и $p_i \sim q_i$. Докажите, что d_{\sim} – полуметрика на X/\sim .

Определение 3.6. Пусть \sim – отношение эквивалентности на метрическом пространстве (X, d) . Определенная выше полуметрика d_{\sim} на X/\sim называется **полуметрикой факторпространства**. **Метрическое факторпространство** получается из X/\sim дополнительным отождествлением всех точек x, y таких, что $d_{\sim}(x, y) = 0$, с метрикой, которая индуцирована с d_{\sim} , как в задаче 3.13.

Задача 3.16 (!). Пусть \sim – отношение эквивалентности на метрическом пространстве (X, d) . Докажите, что $d_{\sim}(x, y) = \sup_{\alpha} d_{\alpha}(x, y)$, где $\{d_{\alpha}\}$ – множество всех полуметрик на X/\sim , удовлетворяющих $d_{\alpha}(p_0, q_0) \leq d(p, q)$ для любых $p_0, q_0 \in X/\sim$, и любых $p, q \in X$ в классах эквивалентности p_0, q_0 .

Задача 3.17. Пусть \sim – отношение эквивалентности на метрическом пространстве (X, d) . Рассмотрим X/\sim как топологическое пространство с топологией фактора, и пусть $(X/\sim, d_{\sim})$ – топологическое пространство, с топологией, базой которой являются открытые d_{\sim} -шары.

а. Докажите, что тождественное отображение $X/\sim \rightarrow (X/\sim, d_{\sim})$ непрерывно.

б. Приведите пример, когда это отображение – не гомеоморфизм.

Задача 3.18. Пусть M – пространство с внутренней метрикой, а $\{U_{\alpha}\}$ – открытое покрытие M . Рассмотрим пространство $\coprod_{\alpha} U_{\alpha}$, с метрикой на U_{α} , индуцированной с M , и пусть $x \sim y$, если x и y отвечают одной и той же точке на M . Докажите, что M есть метрический фактор $\coprod_{\alpha} U_{\alpha}$ по \sim .

Задача 3.19 (!). Пусть G – группа, действующая на метрическом пространстве (X, d) изометриями, а $x \sim y$, если x и y лежат в одной орбите G . Докажите, что $d_{\sim}(a, b)$ есть инфимум расстояний между представителями a, b в X .

Задача 3.20 (*). Пусть G – группа, действующая на метрическом пространстве (X, d) изометриями, а d внутренняя. Докажите, что метрика на метрическом факторе – тоже внутренняя.

Задача 3.21 (!). Пусть $\Gamma \cong \mathbb{Z}^2$ свободно действует на $M = \mathbb{R}^2$ параллельными переносами, а (Z, d_Z) – **метрический фактор M по действию Γ** (т.е. метрический фактор M по соотношению эквивалентности $x \sim y$, если x и y лежат в одной орбите Γ). Докажите, что Z гомеоморфно тору либо изометрично \mathbb{R} .

Задача 3.22 (*). Пусть $\Gamma = \mathbb{Z}$ действует на $M = \mathbb{R}^2$ нетривиальными поворотами бесконечного порядка. Докажите, что метрический фактор M/Γ изометричен $\mathbb{R}^{\geq 0}$ с обычной метрикой.

Задача 3.23 (!). Пусть $M = \mathbb{R}^2 \setminus 0$, с обычной метрикой. Рассмотрим отношение эквивалентности на M , полученное склейкой $(x, y) \sim (-y, 2x)$.

- Докажите, что $d_{\sim} = 0$.
- Докажите, что $\mathbb{R}^2 \setminus 0 / \sim$ с топологией фактора – это двумерный тор.

3.4. Метрические графы

Задача 3.24. Пусть $X = [0, 1]$ отрезок с обычной метрикой, а $x \sim y$, если это концы отрезка или $x = y$. Докажите, что d/\sim на X/\sim – метрика на окружности, где расстояние между точками равно углу между ними умножить на константу.

Определение 3.7. Несвязное объединение метрических пространств (X_α, d_α) есть $\coprod X_\alpha$ с метрикой $d(x, y)$ которая равна $d_\alpha(x, y)$, когда x и y лежат в X_α , и ∞ в противном случае.

Определение 3.8. Пусть I_α – набор отрезков, изометричных $[0, x_\alpha]$, а \sim – отношение эквивалентности, полученное склейкой некоторых вершин. Метрический фактор $\coprod_\alpha I_\alpha$ называется **метрическим графом**. Он называется **локально конечным**, если каждая точка отождествляется с конечным числом точек.

Задача 3.25. Пусть I_α – набор отрезков, изометричных $[0, x_\alpha]$, Γ – полученный из них метрический граф, а I_α^0 – их внутренности. Докажите, что естественное отображение $\coprod_\alpha I_\alpha^0 \rightarrow \Gamma$ – вложение.

Задача 3.26. Докажите, что метрика на метрическом графе всегда внутренняя.

Задача 3.27. Пусть M – метрический граф, а M_0 – топологический граф, полученный как топологический фактор $\coprod_\alpha I_\alpha$ по тому же соотношению эквивалентности.

- Докажите, что тавтологическое отображение $M_0 \xrightarrow{\tau} M$ непрерывно.
- (!) Докажите, что для любого локально конечного графа, τ – гомеоморфизм.
- (*) Постройте пример графа, для которого τ не биекция.
- (*) Постройте пример графа, для которого τ биекция, но не гомеоморфизм.

3.5. Графы Кэли и метрика слов на группе

Определение 3.9. Пусть G – группа. Множество $S \subset G$ называется **набором образующих**, если все элементы G выражаются через произведения элементов x_i, x_j^{-1} , для каких-то $x_i, x_j \in S$. Каждое такое произведение называется **словом** от x_i, x_j^{-1} . В дальнейшем, мы будем предполагать по умолчанию, что любой набор образующих S содержит x^{-1} вместе с каждым $x \in S$.

Определение 3.10. Пусть G – группа, а $S \subset G$ – набор образующих. **Граф Кэли** G есть метрический граф, полученный следующим образом. Вершины графа Кэли суть элементы G , а ребра соединяют две вершины g, g' , если $g' = gs$, где $s \in S$. Длины всех ребер графа Кэли равны 1.

Определение 3.11. Группа G называется **свободной**, если это фундаментальная группа букета окружностей.

Задача 3.28. Докажите, что граф Кэли группы односвязен тогда и только тогда, когда эта группа свободна.

Задача 3.29. Докажите, что любая подгруппа свободной группы свободна.

Определение 3.12. Пусть G – группа, а $S \subset G$ – набор образующих. **Метрика слов** d_S на группе есть метрика на G как на множестве вершин графа Кэли.

Задача 3.30. Пусть G – группа, $S \subset G$ – набор образующих, а d_S – метрика слов. Докажите, что $d_S(1, w)$ есть длина самого короткого слова $s_1 s_2 \dots s_N$, $s_i \in S$, представляющего w .

Задача 3.31 (!). Пусть G – группа, а $S_1, S_2 \subset G$ – два конечных набора образующих. Докажите, что тождественное отображение $(G, d_{S_1}) \rightarrow (G, d_{S_2})$ – липшицево.

Определение 3.13. Метрика d на группе G называется **левоинвариантной**, если $d(x, y) = d(gx, gy)$

Задача 3.32. Докажите, что метрика слов на группе левоинвариантна.

Определение 3.14. Две метрики d, d' на группе G называются **эквивалентными**, если тождественное отображение $(G, d) \rightarrow (G, d')$ липшицево, и обратное к нему тоже липшицево.

Задача 3.33 (*). Постройте левоинвариантную метрику на группе \mathbb{Z} , не эквивалентную метрике слов, все шары в которой имеют конечное число элементов.

Задача 3.34 ().** Пусть d – конечная левоинвариантная метрика на \mathbb{Z}^n , такая, что для каких-то констант $A, B > 0$ и любого r , $Ar^n \geq |B_r(0)| \geq Br^n$. Докажите, что d эквивалентна метрике слов.

Задача 3.35 ().** Пусть d – конечная левоинвариантная метрика на группе G , такая, что все шары имеют конечное число элементов, и задана константа $C > 0$, такая, что для любых $x, y \in G$ существует $z \in G$, удовлетворяющий $d(x, z) \leq \frac{d(x, y)}{2} + C$ и $d(y, z) \leq \frac{d(x, y)}{2} + C$. Докажите, что d эквивалентна метрике слов.