# Метрическая Геометрия 4: кратчайшие

**Правила:** Зачеты по листкам бывают двух типов: когда сданы все (или или 2/3) задачи со звездочками, либо все (или 2/3) задачи без звездочек. Задачи с двумя звездочками можно не сдавать. Сдавшим $k$ задач с двумя звездочками разрешается не сдавать $2k$ задач со звездочками или факториалом из того же листочка. Задачи, обозначенные (!), следует сдавать и тем и другим. Если сданы 2/3 задач со звездочками и (!), студент получает $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) двух – $10t$ баллов. Если сданы 2/3 задач без звездочки и с (!), студент получает $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) трех – $10t$ баллов. Эти виды оценок не складываются, то есть больше $10t$ за листочек получить нельзя.

Коэффициент $t$ равен 1.5, если задачи сданы не позже, чем через 31 день после выдачи, 1, если между 31 и 50 днями, и 0.7, если позже.

Результаты сдачи записываются на листке ведомости, которая выдается студенту; просьба не терять ее, больше нигде результаты храниться не будут.

## 4.1. Локально компактные метрические пространства и теорема Хопфа-Ринова

**Определение 4.1.** Напомню, что $\varepsilon$**-сеть** в метрическом пространстве $M$ есть такое множество $N \subset M$, что объединение $\varepsilon$-шаров с центрами в $N$ равно $M$. Метрическое пространство называется **вполне ограниченным**, если для любого $\varepsilon > 0$ в $M$ найдется конечная $\varepsilon$-сеть.

**Задача 4.1.** Докажите, что полное метрическое пространство компактно тогда и только тогда, когда оно вполне ограниченно.

**Определение 4.2.** Пусть $M$ – метрическое пространство. Говорят, что $M$ **локально компактно**, если для любой точки $x \in M$ существует такое число $\varepsilon > 0$, что замкнутый шар $\overline{B}_\varepsilon(x)$ компактен.

**Задача 4.2.** Пусть $f: M \longrightarrow M'$ – гомеоморфизм метрических пространств. Предположим, что $M$ локально компактно. Докажите, что $M'$ тоже локально компактно.

**Задача 4.3.** Докажите, что метрическое пространство локально компактно тогда и только тогда, когда у каждой точки есть окрестность, замыкание которой компактно.

**Задача 4.4.** Приведите пример полного метрического пространства с внутренней метрикой, которое не локально компактно.

**Задача 4.5 (*).** Верно ли, что пополнение локально компактного метрического пространства всегда локально компактно?

**Задача 4.6 (!).** Пусть $M$ – метрическое пространство с внутренней метрикой, а $m \in M$ точка, такая, что шары $B_{r-\varepsilon}(m)$ вполне ограниченны для любого $\varepsilon > 0$. Докажите, что $B_r(m)$ тоже вполне ограниченно.

**Задача 4.7.** Пусть $\rho: M \longrightarrow \mathbb{R}$ функция на метрическом пространстве,

$$\rho(m) := \sup_r \{ r \in \mathbb{R} \ \ | \ \ \bar{B}_r(m) \text{ компактен } \}.$$

Докажите, что $\rho$ 1-липшицева.

**Задача 4.8.** Пусть $M$ – пространство с внутренней метрикой. Докажите, что в $\varepsilon$-окрестности шара $\bar{B}_r(m)$ содержится шар $B_{r+\varepsilon}(m)$.

**Задача 4.9.** Пусть $M$ – пространство с внутренней метрикой, а $N$ – $\frac{1}{2}\varepsilon$-сеть в $\bar{B}_r(m)$. Докажите, что $\varepsilon$-окрестность $N$ содержит $B_{r+1/2\varepsilon}(m)$.

**Задача 4.10 (!).** Пусть $M$ – пространство с внутренней метрикой, а каждый замкнутый шар радиуса $\varepsilon$ в $M$ компактен. Докажите, что из компактности $\bar{B}_r(m)$ следует компактность $\bar{B}_{r+1/2\varepsilon}(m)$

**Указание.** Докажите, что $M$ полно, и воспользуйтесь предыдущей задачей.

**Задача 4.11 (!).** (Теорема Хопфа-Ринова) Пусть $M$ – полное, локально компактное пространство с внутренней метрикой. Докажите, что каждый замкнутый шар в $M$ компактен.

**Указание.** Воспользуйтесь предыдущей задачей для того, чтобы доказать, что $\rho = \infty$ везде на $M$.

**Задача 4.12.** Постройте следующие контрпримеры к усиленным версиям утверждения теоремы Хопфа-Ринова.

а. (*) Локально компактное, полное метрическое пространство, где не всякий замкнутый шар компактен.

б. (*) Локально компактное, полное, локально линейно связное метрическое пространство, где не всякий замкнутый шар компактен.

в. Локально компактное, связное метрическое пространство с внутренней метрикой, где не всякий замкнутый шар компактен.

г. Полное метрическое пространство с внутренней метрикой, где не всякий замкнутый шар компактен.

### 4.2. $\varepsilon$-середины и расстояние между шарами

**Определение 4.3.** Пусть $x$ и $y$ – точки в метрическом пространстве $(M,d)$, а $\varepsilon > 0$. Точка $z$ называется **$\varepsilon$-серединой** пары $(x,y)$, если

$$|d(x,z) - 1/2d(x,y)| \leqslant \varepsilon \text{ и } |d(y,z) - 1/2d(x,y)| \leqslant \varepsilon.$$

Говорится, что в $(M,d)$ **существуют $\varepsilon$-середины**, если для любых $x,y$ и любого $\varepsilon > 0$ существует $\varepsilon$-середина.

**Задача 4.13.** Пусть $z$ – $\varepsilon$-середина пары $(x,y)$. Докажите, что $d(x,y) \geqslant d(x,z)+x(y,z)-\varepsilon$. Докажите, что расстояние между двумя $\varepsilon$-серединами не больше $d(x,y)+2\varepsilon$.

**Задача 4.14 (!).** Докажите, что в любом пространстве с внутренней метрикой существуют $\varepsilon$-середины.

**Задача 4.15.** Постройте метрическое пространство, в котором существуют $\varepsilon$-середины, но метрика не внутренняя.

**Задача 4.16.** Выразите максимально возможное расстояние между двумя $\varepsilon$-серединами пары $(x, y)$ в терминах $d(x, y)$. Приведите пример, когда оно достигается.

**Задача 4.17.** Пусть $M$ – пространство, где существуют $\varepsilon$-середины, а $x_0, x_1 \in M$ – две разные точки. Докажите, что для каждого двоично-рационального числа[1] $\lambda = \frac{2n-1}{2^m}$, $0 < \lambda < 1$, найдется точка $x_\lambda \in M$, которая является $\frac{\varepsilon}{2^{m+1}}$-серединой между $x_{\frac{n}{2^{m-1}}}$ и $x_{\frac{n+1}{2^{m-1}}}$.

**Задача 4.18 (!).** Пусть $M$ – метрическое пространство, в котором существуют $\varepsilon$-середины. Докажите, что для любых $x, y \in M$, $\varepsilon > 0$, и любого $\lambda \in [0, 1]$, найдется $z \in M$ такая, что

$$|d(x, z) - \lambda d(x, y)| \leqslant \varepsilon \quad \text{и} \quad |d(y, z) - (1 - \lambda)d(x, y)| \leqslant \varepsilon.$$

**Указание.** Воспользуйтесь предыдущей задачей.

**Задача 4.19 (!).** Пусть $M$ – метрическое пространство, в котором существуют $\varepsilon$-середины. Докажите, что для любых $x, y \in M$, и положительного $r \leqslant d(x, y)$, расстояние от шара $B_r(x)$ до $y$ равно $d(x, y) - r$:

$$d(y, B_r(x)) = d(x, y) - r.$$

**Определение 4.4.** Условие $d(y, B_r(x)) = d(x, y) - r$ называется **условием Хопфа-Ринова**.

**Задача 4.20.** Докажите, что условие Хопфа-Ринова равносильно такому: $d(B_{r'}(y), B_r(x)) = d(x, y) - r - r'$, где $x, y \in M$ произвольные точки, а $r, r'$ – положительные числа, которые удовлетворяют $d(x, y) \geqslant r + r'$.

**Задача 4.21 (!).** Пусть $M$ – метрическое пространство. Докажите, что следующие условия равносильны.

а. Существование $\varepsilon$-середин.

б. Условие Хопфа-Ринова.

в. Для каждых $x, y \in M$ и $\varepsilon, \delta > 0$, найдется последовательность точек $x_0 = x, x_1, ..., x_n = y$, такая, что $d(x_i, x_{i+1}) < \delta$, а $\sum_i d(x_i, x_{i+1}) \leqslant d(x, y) + \varepsilon$.

## 4.3. Существование кратчайших

**Задача 4.22.** Пусть $x_0, x_1 \in M$ – точки на полном, локально компактном пространстве с внутренней метрикой. Докажите, что существует $x_{1/2} \in M$ такая, что $d(x_0, x_{1/2}) = d(x_1, x_{1/2}) = \frac{1}{2} d(x_0, x_1)$.

**Задача 4.23.** $x_0, x_1 \in M$ – точки на полном, локально компактном пространстве с внутренней метрикой. Докажите, что существует набор точек $\{x_\lambda\}$, где $\lambda$ пробегает все двоично-рациональные числа между нулем и единицей, а $d(x_\lambda, x_\mu) = |\lambda - \mu| d(x_0, x_1)$.

[1] Двоично-рациональными называются числа вида $n/2^m$.

**Задача 4.24.** Пусть $M, N$ – метрические пространства, а $f: N \longrightarrow M$ – $C$-липшицево отображение. Докажите, что $f$ продолжается на пополнения: $\bar{f}: \bar{N} \longrightarrow \bar{M}$, причем $\bar{f}: \bar{N} \longrightarrow \bar{f}(\bar{N})$ тоже $C$-липшицево.

**Задача 4.25 (!).** Докажите, что любые две точки в полном локально компактном пространстве с внутренней метрикой могут быть соединены кратчайшей.

**Указание.** Примените результат предыдущей задачи к отображению, построенному в задаче 4.23.

**Задача 4.26 (*).** Пусть $(M, d)$ – полное метрическое пространство, где существуют $\varepsilon$-середины. Докажите, что метрика в $M$ внутренняя.

**Задача 4.27 (*).** Докажите, что пополнение пространства с внутренней метрикой – внутреннее.

**Указание.** Воспользуйтесь предыдущей задачей.

**Определение 4.5.** Путь $\gamma: [a, b] \longrightarrow M$ называется **кратчайшей**, если $d(a, b) = L_d(\gamma)$, и **кратчайшей с геодезической параметризацией**, если $\gamma$ задает изометрию.

**Задача 4.28 (*).** Пусть $\gamma$ – кратчайшая, соединяющая точки $x, y$ метрического пространства. Докажите, что существует кратчайшей с геодезической параметризацией, которая соединяет $x$ и $y$.

**Задача 4.29 (**).** Приведите пример полного пространства с внутренней метрикой, в котором некоторые точки нельзя соединить кратчайшими.

**Задача 4.30 (**).** Приведите пример полного пространства с внутренней метрикой, в котором не существует кратчайших, или докажите, что такого нет.

**Задача 4.31 (*).** Пусть $(M, d)$ – полное, локально компактное метрическое пространство (метрика не обязательно внутренняя), в котором любые две точки можно соединить липшицевым путем. Докажите, что любые две точки $x, y \in M$ в $M$ можно соединить путем длины $\hat{d}(x, y)$ (здесь $\hat{d}$ обозначает внутреннюю метрику, ассоциированную с $d$).

**Задача 4.32 (**).** Пусть $(M, d)$ – полное, локально компактное метрическое пространство (метрика не обязательно внутренняя), в котором любые две точки можно соединить спрямляемым путем. Докажите, что любые две точки $x, y \in M$ в $M$ можно соединить путем длины $\hat{d}(x, y)$.