

Гиперболические группы 5: углы и конусы

Правила: Зачеты по листкам бывают двух типов: когда сданы все (или или 2/3) задачи со звездочками, либо все (или 2/3) задачи без звездочек. Задачи с двумя звездочками можно не сдавать. Сдавшем k задач с двумя звездочками разрешается не сдавать $2k$ задач со звездочками или факториалом из того же листочка. Задачи, обозначенные (!), следует сдавать и тем и другим. Если сданы 2/3 задач со звездочками и (!), студент получает $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) двух – $10t$ баллов. Если сданы 2/3 задач без звездочки и с (!), студент получает $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) трех – $10t$ баллов. Эти виды оценок не складываются, то есть больше $10t$ за листочек получить нельзя.

Коэффициент t равен 1.5, если задачи сданы не позже, чем через 31 день после выдачи, 1, если между 31 и 50 днями, и 0.7, если позже.

Результаты сдачи записываются на листке ведомости, которая выдается студенту; просьба не терять ее, больше нигде результаты храниться не будут.

5.1. Углы и пространства направлений

Определение 5.1. Внутренняя метрика в метрическом пространстве M называется **строго внутренней**, если любые две точки $x, y \in M$ можно соединить **кратчайшей**, то есть путем γ с $L_d(\gamma) = d(x, y)$. Кратчайшая $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ имеет **геодезическую параметризацию**, если это отображение – изометрия.

Замечание 5.1. В прошлом листочке было доказано, что внутренняя метрика в полном, локально компактном метрическом пространстве является строго внутренней. В этом листочке можно пользоваться этим фактом. Также, все метрические пространства, которые тут упоминаются, по умолчанию считаются наделенными строго внутренней метрикой, которая, ко всему прочему, **конечна**, то есть не принимает значения ∞ , а все кратчайшие – снабженными геодезической параметризацией.

Определение 5.2. Пусть a, b, c – точки в метрическом пространстве (M, d) . Здесь и в дальнейшем \mathbb{R}^2 предполагается метрическим пространством, с обычной (евклидовой) метрикой. **Треугольник сравнения** $\Delta(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ есть треугольник в \mathbb{R}^2 , с вершинами $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, и сторонами $|\bar{a}, \bar{b}| = d(a, b)$, $|\bar{a}, \bar{c}| = d(a, c)$, и $|\bar{b}, \bar{c}| = d(b, c)$ (такой треугольник, очевидно, существует, и определен единственно с точностью до конгруэнтности). Угол $\angle(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ в треугольнике $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ обозначается $\theta(a, b, c)$; он называется **углом сравнения**.

Определение 5.3. Пусть $\gamma_1 : [0, a] \rightarrow M$, $\gamma_2 : [0, b] \rightarrow M$ два пути в метрическом пространстве M , $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$. **Угол** между путями γ_1, γ_2 в p есть число

$$\angle(\gamma_1, p, \gamma_2) := \lim_{t, s \rightarrow 0} \theta(\gamma_1(t), p, \gamma_2(s)),$$

если такой предел существует (в противном случае, говорится, что **угол между γ_1 и γ_2 не существует**). **Верхний угол** есть

$$\angle_{\text{sup}}(\gamma_1, p, \gamma_2) := \limsup_{t,s \rightarrow 0} \theta(\gamma_1(t), p, \gamma_2(s)),$$

где \limsup обозначает супремум всех предельных точек последовательностей $\theta(\gamma_1(t_i), p, \gamma_2(s_j))$, для всех t_i, s_j сходящихся к 0.

Задача 5.1. Пусть γ_1, γ_2 – гладкие пути в \mathbb{R}^n . Докажите, что угол $\angle(\gamma_1, p, \gamma_2)$ существует и равен углу между соответствующими касательными.

Задача 5.2. Пусть $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ – кратчайшая (наделенная, как всегда, геодезической параметризацией), а $\gamma(0) = p$. Докажите, что угол $\angle_{\text{sup}}(\gamma, p, \gamma)$ существует и равен нулю.

Задача 5.3. Пусть $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ – кратчайшая, а $\gamma(b) = p$, для какого-то $0 < b < a$. Докажите, что угол $\angle_{\text{sup}}(\gamma, p, \gamma)$ существует и равен π .

Задача 5.4. Пусть $M = V$ – нормированное векторное пространство, с метрикой $\nu(x - y)$, которая индуцирована нормой ν . Докажите, что эта метрика внутренняя, причем отрезки прямых являются кратчайшими.

Задача 5.5 (*). Докажите, что кратчайшая, соединяющая две точки в нормированном векторном пространстве, единственна тогда и только тогда, когда сфера $\{x \in V \mid \nu(x) = 1\}$ не содержит нетривиальных отрезков.

Задача 5.6. Пусть $\alpha : [0, a] \rightarrow M$, $\beta : [0, b] \rightarrow M$ две геодезические в метрическом пространстве M , $\alpha(0) = \beta(0) = p$. Докажите, что

$$\angle(\alpha, p, \beta) := \lim_{t,s \rightarrow 0} \arccos \left(\frac{s^2 + t^2 - d(\alpha(t), \beta(s))^2}{2st} \right).$$

Задача 5.7. Пусть $\alpha = \mathbb{R}^{\geq 0}a$, $\beta = \mathbb{R}^{\geq 0}b$ – два луча в нормированном пространстве (V, ν) , причем угол $\angle(\alpha, 0, \beta)$ существует. Докажите, что

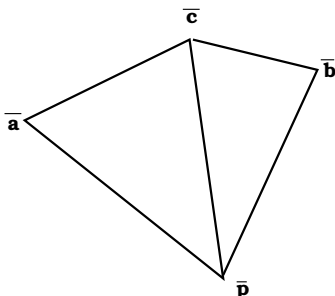
$$\frac{\mu^2 \nu(a)^2 + \lambda^2 \nu(b)^2 - \nu(\mu a - \lambda b)^2}{\mu \lambda} = \text{const}$$

постоянная, не зависящая от μ и $\lambda \in \mathbb{R}^{\geq 0}$.

Задача 5.8 (!). Пусть $\alpha = \mathbb{R}^{\geq 0}a$, $\beta = \mathbb{R}^{\geq 0}b$, $\gamma = \mathbb{R}^{\geq 0}c$ – три разных луча в нормированном пространстве (V, ν) , причем углы $\angle(\alpha, 0, \beta)$, $\angle(\alpha, 0, \gamma)$ и $\angle(\beta, 0, \gamma)$ существуют. Предположим, что они лежат в одной плоскости. Докажите, что ν – евклидова метрика на подпространстве, порожденном a и b .

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 5.9. Пусть $\gamma_i : [0, d_i] \rightarrow M$ – пути в M , причем $\gamma_i(0) = p$, $a = \gamma_1(s)$, $b = \gamma_3(t)$, $c = \gamma_2(u)$, и каждый γ_i нетривиален в любой окрестности 0. Рассмотрим треугольники сравнения $\Delta(\bar{p}, \bar{a}, \bar{c})$ и $\Delta(\bar{p}, \bar{c}, \bar{b})$, и нарисуем их на плоскости, с общей стороной $|\bar{p}, \bar{c}|$, чтобы они лежали по разные стороны от прямой (\bar{p}, \bar{c}) .



Докажите, что для любых достаточно малых s, t , можно подобрать u таким образом, что \bar{c} лежит на отрезке $[\bar{a}, \bar{b}]$.

Указание. Воспользуйтесь непрерывностью γ_i .

Задача 5.10 (!). В условиях предыдущей задачи, докажите, что

$$\angle(\gamma_1, p, \gamma_2) + \angle(\gamma_2, p, \gamma_3) \geq \angle(\gamma_1, p, \gamma_3)$$

если все эти углы существуют.

Указание. Убедитесь, что $\theta(arc) + \theta(bpc) \geq \theta(apb)$, для a, b, c, p , выбранных, как в предыдущей задаче.

Задача 5.11. В условиях задачи 5.9, верно ли, что $\theta(arc) + \theta(bpc) = \theta(apb)$? Мы считаем, что s, t, u выбраны таким образом, чтобы \bar{c} лежала на отрезке $[\bar{a}, \bar{b}]$.

Задача 5.12 (*). Докажите, что

$$\angle_{\text{sup}}(\gamma_1, p, \gamma_2) + \angle_{\text{sup}}(\gamma_2, p, \gamma_3) \geq \angle_{\text{sup}}(\gamma_1, p, \gamma_3)$$

(в этой задаче, углы не обязательно существуют).

Задача 5.13 (!). Докажите, что $\angle_{\text{sup}}(\gamma_1, p, \gamma_2) + \angle_{\text{sup}}(\gamma_2, p, \gamma_3) = 0$ влечет $\angle_{\text{sup}}(\gamma_1, p, \gamma_3) = 0$.

Определение 5.4. Путь $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ имеет направление, если угол $\angle(\gamma, \gamma(0), \gamma)$ существует. Пути $\alpha, \beta : [0, a] \rightarrow M$, $\alpha(0) = \beta(0) = p$ имеют одинаковое направление, если $\angle_{\text{sup}}(\alpha, p, \beta) = 0$.

Задача 5.14. Предположим, что $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ имеет направление. Докажите, что тогда $\angle(\gamma, \gamma(0), \gamma) = 0$.

Задача 5.15. Докажите, что соотношение « $\alpha \sim \beta$, если $\angle_{\text{sup}}(\alpha, p, \beta) = 0$ » задает отношение эквивалентности на множестве всех путей

$$\gamma : [0, a] \rightarrow M, \quad \gamma(0) = p,$$

имеющих направление.

Определение 5.5. Пространство направлений в точке p есть множество классов эквивалентности путей $\gamma : [0, a] \rightarrow M$, $\gamma(0) = p$, нетривиальных в любой окрестности 0 и имеющих направление, по отношению \sim , заданному выше.

Задача 5.16. Докажите, что $\angle_{\text{sup}}(\alpha, p, \beta)$ задает метрику на пространстве направлений.

5.2. Произведения и конусы

Задача 5.17. Пусть (X, d_X) и (Y, d_Y) – метрические пространства. Рассмотрим функцию $d : (X \times Y) \times (X \times Y) \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0} \cup \infty$:

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{d_X(x_1, x_2)^2 + d_Y(y_1, y_2)^2}.$$

- а. Докажите, что d это метрика.
- б. (!) Докажите, что d строго внутренняя, если d_X, d_Y – строго внутренне.
- в. (*) Докажите, что d внутренняя, если d_X, d_Y – внутренние

Указание. Докажите наличие середин в $X \times Y$, и примените их наличие, чтобы построить кратчайшие.

Определение 5.6. Эта метрика называется метрикой произведения, а $(X \times Y, d)$ – прямым произведением метрических пространств.

Задача 5.18. Пусть ν – норма на \mathbb{R}^2 , удовлетворяющая $\nu(x, y) \geq \nu(x', y') \forall x' \leq x, y' \leq y$ (то есть монотонная по каждой координате), а d_ν – функция на $(X \times Y) \times (X \times Y)$, заданная формулой $d_\nu((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \nu(d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2))$.

а. Докажите, что d_ν это метрика.

б. (*) Докажите, что d_ν – строго внутренняя метрика, если d_X, d_Y – строго внутренние.

Определение 5.7. Диаметр метрического пространства M есть число $\sup_{x, y \in M} d(x, y)$.

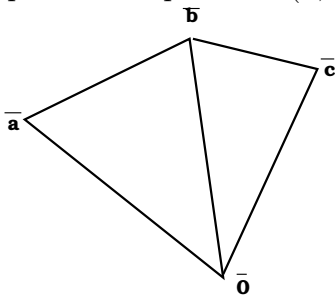
Определение 5.8. Пусть (X, d) – метрическое пространство, $\text{diam } X \leq \pi$. Рассмотрим топологическое пространство $C(X)$ с топологией фактора, полученное из $X \times [0, \infty[$ склеиванием $X \times \{0\}$ в точку. Определим функцию $d_C : C(X) \times C(X) \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ по формуле

$$d(p, q) = \sqrt{t^2 + s^2 - 2ts \cos(d(x, y))},$$

где $p = (x, t), q = (y, s)$. В скором времени будет доказано, что d_C есть метрика. Пространство $C(X)$ с вышеописанной метрикой называется **метрическим конусом**, или просто **конусом** над X .

Задача 5.19. Пусть $(\alpha, t), (\beta, s)$ – точки в конусе $C(X)$, а $\Delta(\bar{0}, \bar{a}, \bar{b})$ – треугольник сравнения со сторонами t, s и углом $\angle(\bar{a}, \bar{0}, \bar{b}) = d(\alpha, \beta)$. Докажите, что $d_C(a, b) = |\bar{a}, \bar{b}|$.

Задача 5.20. Пусть $a = (\alpha, r), b = (\beta, s), c = (\gamma, t)$ – три точки на $C(X)$, а $\Delta(\bar{0}, \bar{a}, \bar{b}), \Delta(\bar{0}, \bar{b}, \bar{c})$ соответствующие треугольники сравнения, с общей стороной $[\bar{0}, \bar{b}]$, и отложенные по разные стороны от $(\bar{0}, \bar{b})$.



Докажите, что $d(a, c) \leq |\bar{a}, \bar{c}|$, если $d(\alpha, \beta) + d(\beta, \gamma) \leq \pi$.

Задача 5.21 (!). Пусть $C(X)$ – метрический конус, d_C – функция, определенная выше. Докажите, что это метрика.

Указание. Воспользуйтесь задачей 5.19 и задачей 5.20. Отдельно разберите случа $d(\alpha, \beta) + d(\beta, \gamma) \geq \pi$.

Задача 5.22. Пусть $C(X)$ – метрический конус, а $x \in X$. Докажите, что путь $\gamma : [0, a] \rightarrow C(X)$, переводящий s в (x, s) – кратчайшая.

Задача 5.23. Пусть $x, y \in X$, а $\gamma_1 := (x, [0, a])$, $\gamma_2 := (y, [0, b]) \subset C(X)$ – соответствующие кратчайшие в конусе. Докажите, что $\angle(\gamma_1, 0, \gamma_2) = d(x, y)$.

5.3. Конус пространства с $\text{diam} > \pi$.

Задача 5.24. Пусть (X, d) – метрическое пространство, $a > 0$, а $d_a(x, y) = \min(d(x, y), a)$. Докажите, что $d_a(x, y)$ – метрика.

Задача 5.25. Пусть d – внутренняя метрика, и d_a тоже. Докажите, что $d = d_a$.

Определение 5.9. Сейчас мы определим метрический конус $C(X)$ для ситуации, когда $\text{diam}(X) > \pi$. Пусть (X, d) – метрическое пространство, d_π – метрика на X , определенная выше. Определим $(C(X), d_C)$ как конус над (X, d_π) .

Задача 5.26 (*). Пусть (X, d) – пространство с внутренней метрикой. Докажите, что метрика d_C на $C(X)$ тоже внутренняя.

Определение 5.10. Полиэдральное метрическое пространство размерности **2** – это фактор метрического графа и объединения выпуклых многоугольников с евклидовой метрикой, полученный склеиванием сторон многоугольников с ребрами графа по непрерывному отображению из границы многоугольника в граф, задающему изометрию между сторонами многоугольника и соответствующими ребрами графа. Оно **локально конечно**, если у каждой точки есть окрестность, изометричная конечному полиэдральному пространству (с конечным числом многоугольников).

Задача 5.27 (!). Пусть (Z, d) – двумерное полиэдральное локально конечное метрическое пространство. Докажите, что у каждой точки $z \in Z$ есть окрестность, изометричная окрестности нуля в конусе над метрическим графом.