Метрические пространства 6: пространства Александрова

Правила: Зачеты по листкам бывают двух типов: когда сданы все (или или 2/3) задачи со звездочками, либо все (или 2/3) задачи без звездочек. Задачи с двумя звездочками можно не сдавать. Сдавшим k задач с двумя звездочками разрешается не сдавать $2k$ задач со звездочками или факториалом из того же листочка. Задачи, обозначенные (!), следует сдавать и тем и другим. Если сданы 2/3 задач со звездочками и (!), студент получает $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) двух – $10t$ баллов. Если сданы 2/3 задач без звездочки и с (!), студент получает $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) трех – $10t$ баллов. Эти виды оценок не складываются, то есть больше $10t$ за листочек получить нельзя.

Коэффициент t равен 1.5, если задачи сданы не позже, чем через 31 день после выдачи, 1, если между 31 и 50 днями, и 0.7, если позже.

Результаты сдачи записываются на листке ведомости, которая выдается студенту; просьба не терять ее, больше нигде результаты храниться не будут.

6.1. Пространства Александрова

Определение 6.1. Пусть a, b, c – точки в метрическом пространстве (M, d). Здесь и в дальнейшем $\mathbb{R}^2$ предполагается метрическим пространством, с обычной (евклидовой) метрикой. **Треугольник сравнения** $\triangle(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ есть треугольник в $\mathbb{R}^2$, с вершинами $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, и сторонами $|\bar{a}, \bar{b}| = d(a, b)$, $|\bar{a}, \bar{c}| = d(a, c)$, и $|\bar{b}, \bar{c}| = d(b, c)$ (такой треугольник, очевидно, существует, и определен единственно с точностью до конгруэнтности). Угол $\measuredangle(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ в треугольнике $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ обозначается $\theta(a, b, c)$; он называется **углом сравнения**.

Определение 6.2. Пусть a, b, c – точки в пространстве (M, d) со строго внутренней метрикой, а $\gamma: [0, d(a, b)] \longrightarrow M$ – кратчайшая с геодезической параметризацией, соединяющая точки (a, b). Рассмотрим функцию

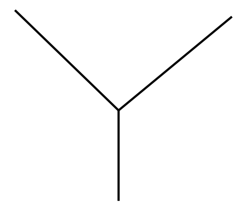
$$d_c: [0, d(a, b)] \longrightarrow \mathbb{R}^{\geqslant 0},$$

переводящую t в $d(c, \gamma(t))$. Пусть $\triangle(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) \subset \mathbb{R}^2$ – треугольник сравнения, а

$$d_{\bar{c}}: [0, d(a, b)] \longrightarrow \mathbb{R}^{\geqslant 0}$$

– функция, переводящая t в $d(\bar{c}, \bar{\gamma}(t))$, где $\bar{\gamma}: [0, d(a, b)] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ обозначает сторону треугольника сравнения с нормальной параметризацией. Функция $d_{\bar{c}}$ называется **функцией сравнения**. Пространство M называется **пространством неотрицательной/неположительной кривизны в целом**, если для любых a, b, c, функция сравнения удовлетворяет неравенству $d_c \geqslant d_{\bar{c}}$ (соответственно, $d_c \leqslant d_{\bar{c}}$). Пространство M называется **пространством Александрова неотрицательной/неположительной кривизны**, если у каждой точки есть окрестность неотрицательной/неположительной кривизны в целом. Пространства неположительной кривизны в целом также называются **CAT(0)-пространствами** (в честь Эли Картана, Д. А. Александрова и В. А. Топоногова; это название принадлежит М. Громову).

Задача 6.1. Пусть Z – метрический граф, полученный склеиванием трех ребер в точке.



а. Докажите, что Z – пространство неположительной кривизны.

б. Докажите, что Z – не пространство неотрицательной кривизны.

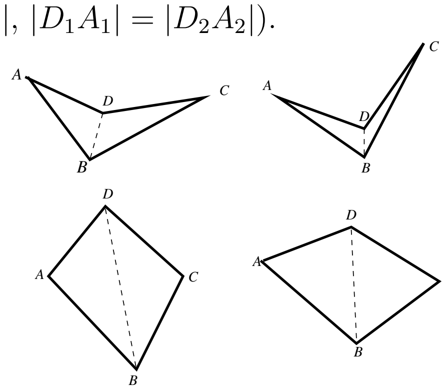
Задача 6.2 (!). Пусть L – окружность длины d с внутренней метрикой, а $C(L)$ – ее конус. Докажите, что $C(L)$ – пространство неположительной кривизны для $d \leqslant 2\pi$ и пространство неотрицательной кривизны для $d \geqslant 2\pi$.

Задача 6.3 (*). Пусть M – векторное пространство с нормой, которая не евклидова. Докажите, что M не является пространством неположительной кривизны и не является пространством неотрицательной кривизны.

Определение 6.3. Пусть p – внутренняя точка на кратчайшей γ, а μ – кратчайшая, начинающаяся от p. Обозначим два сегмента γ, начинающиеся от p, за γ_+ и γ_-. **Смежные углы** суть углы $\measuredangle_{\sup}(\gamma_+, p, \mu)$ и $\measuredangle_{\sup}(\gamma_-, p, \mu)$.

Задача 6.4. Докажите, что в любом метрическом пространстве со строго внутренней метрикой сумма смежных углов всегда $\geqslant \pi$.

Задача 6.5 (!). (Лемма Александрова) Рассмотрим шарнирный механизм из четырех стержней (обозначены жирным на рисунке). Пусть четырехугольники $A_1B_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$ на плоскости получены движением стержней этого механизма (математически, это означает, что $|A_1B_1| = |A_2B_2|$, $|B_1C_1| = |B_2C_2|$, $|C_1D_1| = |C_2D_2|$, $|D_1A_1| = |D_2A_2|$).



Докажите, что $\measuredangle(A_1B_1C_1) > \measuredangle(A_2B_2C_2) \Leftrightarrow |B_1D_1| > |B_2D_2|$, если треугольники $\triangle(A_iB_iC_i)$ и $\triangle(A_iD_iC_i)$ отложены по одну сторону от прямой (A_iC_i), и $\measuredangle(A_1B_1C_1) > \measuredangle(A_2B_2C_2) \Leftrightarrow |B_1D_1| < |B_2D_2|$ в противном случае.

Задача 6.6. Пусть a, b, c – точки в метрическом пространстве, $\triangle(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ – треугольник сравнения, $\gamma \cong [0, d(a,b)]$ – кратчайшая от a до b, а $d_c, d_{\bar{c}} : [0, d(a,b)] \longrightarrow \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ – соответствующие функции сравнения. Докажите, что если $d_c \geqslant d_{\bar{c}}$, то $\theta(apc) + \theta(bpc) \leqslant \pi$, для любой точки p на γ.

Указание. Воспользуйтесь леммой Александрова.

Задача 6.7 (!). Пусть M – пространство Александрова неотрицательной кривизны. Докажите, что сумма смежных углов в M равна π.

Указание. Постройте треугольник сравнения для $\triangle(\gamma_+(s), \mu(t), \gamma_-(u))$, рассмотрите его функцию сравнения, и воспользуйтесь предыдущей задачей.

Определение 6.4. **Граница** подмножества метрического пространства $U \subset M$ есть пересечение замыканий $\bar{U} \cap \overline{(M \backslash U)}$. Открытое подмножество U метрического пространства называется **строго выпуклым**, если для каждой пары точек x, y на границе U, и любой кратчайшей $\gamma : [a,b] \longrightarrow M$, соединяющей x и y, имеем $\gamma(]a,b[) \subset U$.

Задача 6.8. Предположим, что M – пространство с неположительной кривизной в целом. Докажите, что каждый открытый шар в M строго выпуклый.

Задача 6.9 (!). Предположим, что в M всякий открытый шар строго выпуклый. Докажите, что в M любые две точки соединяются не более чем одной кратчайшей.

Задача 6.10. **Блокнот** есть полиэдральное пространство размерности 2, с метрикой фактора, полученное из нескольких полуплоскостей склейкой по граничной прямой. Докажите, что метрика на блокноте внутренняя.

Задача 6.11 (!). Докажите, что блокнот – пространство неположительной кривизны в целом.

Задача 6.12 (!). **Метрический букет** пространств M_i с отмеченной точкой x_i получается из этих пространств склейкой точек x_i в одну (с метрикой фактора). Докажите, что метрический букет пространств со строго внутренней метрикой - пространство со строго внутренней метрикой.

Задача 6.13 (*). Докажите, что метрический букет пространств неположительной кривизны - пространство неположительной кривизны.

Задача 6.14 (*). Пусть C – конус в $\mathbb{R}^3$, заданный уравнением $x^2 + y^2 = z^2$. Будет ли C пространством Александрова для неположительной кривизны? А неотрицательной кривизны?

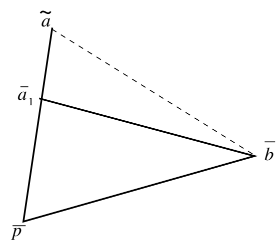
Задача 6.15 (**). Докажите, что конус над метрическим графом Γ имеет неположительную кривизну в целом тогда и только тогда, когда в Γ нет циклов длины $< 2\pi$.

Задача 6.16 (**). Докажите, что компактное двумерное полиэдральное пространство неотрицательной кривизны и без края[1] гомеоморфно двумерной сфере или $\mathbb{R}P^2$, либо изометрично тору $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ либо бутылке Клейна с плоской метрикой.

6.2. Условие монотонности углов

Определение 6.5. Пусть $\gamma_1, \gamma_2 : [0, a] \longrightarrow M$ – кратчайшие в M, $\gamma_i(0) = p$. Говорится, что **в M выполнено условие монотонности углов (для неположительной/неотрицательной кривизны)**, если угол $\theta(\gamma_1(s), p, \gamma_2(t))$ монотонно возрастает/убывает как функция от s, t, и любых кратчайших γ_i.

Задача 6.17. Пусть p, a, b – три точки на метрическом пространстве, а a_1 – точка на кратчайшей, соединяющей a и p. Рассмотрим треугольник сравнения $\triangle(\bar{a}_1, \bar{p}, \bar{b})$ для a_1, p, b, и обозначим на полупрямой $[\bar{p}, \bar{a}_1)$ точку $\tilde{a}$ таким образом, что $|\bar{p}\tilde{a}| = d(p, a)$.



а. Докажите, что для пространства неположительной кривизны в целом, $|\tilde{a}, \bar{b}| \leqslant d(a, b)$.

б. Докажите, что для пространства неотрицательной кривизны в целом, $|\tilde{a}, \bar{b}| \geqslant d(a, b)$.

в. Выведите ограничения на знак кривизны (неположительная, неотрицательная) из этих неравенств.

[1]**Край** двумерного полиэдрального пространства есть совокупность всех ребер, к которым клеится не больше одной двумерной клетки.

Задача 6.18 (!). Докажите, что условие монотонности углов для неположительной/неотрицательной кривизны равносильно неположительности/неотрицательности кривизны в целом.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 6.19. Пусть M – пространство Александрова. Докажите, что углы между геодезическими кратчайшими в M всегда определены.

Задача 6.20 (**). Пусть M – пространство с внутренней метрикой, такое, что в M сумма углов любого геодезического треугольника $\leqslant \pi$. Докажите, что это пространство неположительной кривизны, или найдите контрпример.

Задача 6.21 (*). Пусть M – двумерное полиэдральное пространство.

а. (*) Предположим, что сумма углов любого геодезического треугольника $\geqslant \pi$. Верно ли, что M – пространство Александрова неотрицательной кривизны?

б. (**) А неотрицательной кривизны в целом?

в. (*) Предположим, что сумма углов любого геодезического треугольника $\leqslant \pi$. Верно ли, что M – пространство Александрова неположительной кривизны?

г. (**) А неположительной кривизны в целом?

6.3. Условие сравнения углов

Определение 6.6. Пусть a, b, c – три точки в метрическом пространстве, а $\triangle(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ – треугольник сравнения. Рассмотрим кратчайшие γ_1, γ_2, соединяющие a с b и a с c. **Условие сравнения углов для неположительной кривизны** есть неравенство $\measuredangle(\gamma_1, a, \gamma_2) \leqslant \measuredangle(\bar{c}\bar{a}\bar{b})$ **Условие сравнения углов для неотрицательной кривизны** есть неравенство $\measuredangle(\gamma_1, a, \gamma_2) \geqslant \measuredangle(\bar{c}\bar{a}\bar{b})$ плюс равенство $\measuredangle(\gamma_+, p, \mu) + \measuredangle(\gamma_-, p, \mu) = \pi$ для любых смежных углов $\measuredangle(\gamma_+, p, \mu)$ и $\measuredangle(\gamma_-, p, \mu)$.

Задача 6.22. Пусть M – пространство неположительной кривизны в целом. Докажите, что в M выполнено условие сравнения углов (для неположительной кривизны).

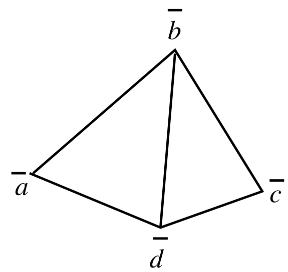
Указание. Воспользуйтесь монотонностью углов.

Задача 6.23 (!). Пусть M – пространство неотрицательной кривизны в целом. Докажите, что в M выполнено условие сравнения углов (для неотрицательной кривизны). Не забудьте проверить, что сумма смежных углов равна π.

Задача 6.24. Пусть a, b, c – три точки в метрическом пространстве, а d – точка на кратчайшей, соединяющей a и c. Рассмотрим треугольники сравнения $\triangle(\bar{a}, \bar{b}, \bar{d})$, $\triangle(\bar{c}, \bar{b}, \bar{d})$, и разместим их по разные стороны от отрезка $[\bar{b}, \bar{d}]$.

а. Предположим, что $\measuredangle(\bar{c}, \bar{b}, \bar{d}) + \measuredangle(\bar{a}, \bar{b}, \bar{d}) \leqslant \pi$. Докажите, что $|\bar{b}\bar{d}| \geqslant d(b, d)$.

б. Предположим, что $\measuredangle(\bar{c}, \bar{b}, \bar{d}) + \measuredangle(\bar{a}, \bar{b}, \bar{d}) \geqslant \pi$. Докажите, что $|\bar{b}\bar{d}| \leqslant d(b, d)$.



Указание. Воспользуйтесь леммой Александрова.

Задача 6.25 (!). Пусть в M выполнено условие сравнения углов (для неположительной кривизны). Докажите, что M есть пространство неположительной кривизны в целом.

Указание. Постройте, как в предыдущей задаче, четырехугольник $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$, и выведите из условия сравнения углов неравенство $\measuredangle(\bar{c}, \bar{b}, \bar{d}) + \measuredangle(\bar{a}, \bar{b}, \bar{d}) \geqslant \measuredangle(c, b, d) + \measuredangle(a, b, d)$. Примените теорему о сумме смежных углов.

Задача 6.26 (*). Пусть в M выполнено условие сравнения углов (для неотрицательной кривизны). Докажите, что M есть пространство неотрицательной кривизны в целом.

Задача 6.27 (**). Пусть сумма углов любого геодезического треугольника в M не превосходит π. Следует ли из этого, что M есть пространство неположительной кривизны?