Метрические пространства 7: теорема Картана-Адамара

Правила: Зачеты по листкам бывают двух типов: когда сданы все (или или 2/3) задачи со звездочками, либо все (или 2/3) задачи без звездочек. Задачи с двумя звездочками можно не сдавать. Сдавшим k задач с двумя звездочками разрешается не сдавать $2k$ задач со звездочками или факториалом из того же листочка. Задачи, обозначенные (!), следует сдавать и тем и другим. Если сданы 2/3 задач со звездочками и (!), студент получает $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) двух – $10t$ баллов. Если сданы 2/3 задач без звездочки и с (!), студент получает $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) трех – $10t$ баллов. Эти виды оценок не складываются, то есть больше $10t$ за листочек получить нельзя.

Коэффициент t равен 1.5, если задачи сданы не позже, чем через 31 день после выдачи, 1, если между 31 и 50 днями, и 0.7, если позже.

Результаты сдачи записываются на листке ведомости, которая выдается студенту; просьба не терять ее, больше нигде результаты храниться не будут.

7.1. Выпуклые функции и CAT(0)-пространства.

Замечание 7.1. Все метрические пространства предполагаются по умолчанию наделенными строго внутренней метрикой (внутренней с кратчайшими). Кратчайшие же предполагаются наделенными геодезической параметризацией.

Определение 7.1. Пусть a, b, c – точки в метрическом пространстве (M, d). Здесь и в дальнейшем $\mathbb{R}^2$ предполагается метрическим пространством, с обычной (евклидовой) метрикой. **Треугольник сравнения** $\triangle(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ есть треугольник в $\mathbb{R}^2$, с вершинами $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, и сторонами $|\bar{a}, \bar{b}| = d(a, b)$, $|\bar{a}, \bar{c}| = d(a, c)$, и $|\bar{b}, \bar{c}| = d(b, c)$ (такой треугольник, очевидно, существует, и определен единственно с точностью до конгруэнтности).

Определение 7.2. Пусть a, b, c – точки в пространстве (M, d) со строго внутренней метрикой, а $\gamma : \ [0, d(a, b)] \longrightarrow M$ – кратчайшая с геодезической параметризацией, соединяющая точки (a, b). Рассмотрим функцию $d_c : \ [0, d(a, b)] \longrightarrow \mathbb{R}^{\geqslant 0}$, переводящую t в $d(c, \gamma(t))$. Пусть $\triangle(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) \subset \mathbb{R}^2$ – треугольник сравнения, а $d_{\bar{c}} : \ [0, d(a, b)] \longrightarrow \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ – функция, переводящая t в $d(\bar{c}, \bar{\gamma}(t))$, где $\bar{\gamma} : \ [0, d(a, b)] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ обозначает сторону треугольника сравнения с нормальной параметризацией. Функция $d_{\bar{c}}$ называется **функцией сравнения**. Пространство M называется **пространством неположительной кривизны в целом**, если для любых a, b, c, функция сравнения удовлетворяет неравенству $d_c \geqslant d_{\bar{c}}$ (соответственно, $d_c \leqslant d_{\bar{c}}$). Пространство M называется **пространством Александрова неположительной кривизны**, если у каждой точки есть окрестность неположительной кривизны в целом. Пространства неположительной кривизны в целом также называются **CAT(0)-пространствами**.

Определение 7.3. Подмножество $U \subset M$ метрического пространства называется **выпуклым**, если для любых точек $x, y \in U$, <u>любая</u> кратчайшая, соединяющая x и y, содержится в U. **Граница** U есть множество $\bar{U} \cap \overline{(M \backslash U)}$, полученное как пересечение замыкания U и его дополнения. Выпуклое подмножество **строго выпукло**, если его граница не содержит нетривиальных кратчайших.

Задача 7.1 (*). Докажите, что функция $\phi : \ [0, a] \longrightarrow \mathbb{R}$ выпукла тогда и только тогда, когда $\{(x, y) \ \mid \ y \geqslant \phi(x)\}$ – выпуклое подмножество в $\mathbb{R}^2$, или найдите контрпример.

Задача 7.2. Пусть $f : \ [0, a] \longrightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная функция, которая удовлетворяет $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}$. Докажите, что f выпукла.

Определение 7.4. Функция на метрическом пространстве называется **выпуклой**, если ее ограничение на любой отрезок кратчайшей выпукло, и **строго выпуклой**, если ее ограничение на любой отрезок кратчайшей $I = [0, a]$ не линейно ни на каком открытом подмножестве $I_1 \subset T$.

Задача 7.3. Пусть функция $\phi : \ M \longrightarrow \mathbb{R}$ выпукла (строго выпукла). Докажите, что $\pi^{-1}(] - \infty, c])$ – выпуклое (строго выпуклое) множество.

Задача 7.4. Пусть $\phi^{-1}(]-\infty, c])$ – выпуклое (строго выпуклое) множество для любого $c \in \mathbb{R}$. Докажите, что функция $\phi: M \longrightarrow \mathbb{R}$ выпукла (строго выпукла).

Задача 7.5 (!). Определим функцию $d_z: M \longrightarrow \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ на метрическом пространстве формулой $d_z(x) := d(z, x)$.

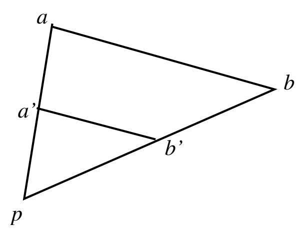
а. Пусть d_x строго выпукла для любого $x \in M$. Докажите, что z соединяется с любой точкой M не более чем одной кратчайшей.

б. Найдите метрическое пространство M, в котором есть точка z такая, что d_z не строго выпукла ни в какой окрестности z. Опровергните или докажите единственность кратчайших в M.

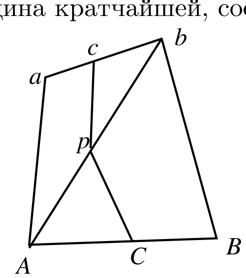
Задача 7.6. Пусть M – CAT(0)-пространство. Докажите, что функция d_z строго выпукла, для любой $z \in M$.

Задача 7.7 (!). Докажите, что в каждом CAT(0)-пространстве любые две точки соединяются единственной геодезической кратчайшей.

Задача 7.8. Пусть $\gamma_i: [0, t_i] \longrightarrow M$ – кратчайшие геодезические в CAT(0)-пространстве, $\gamma_i(0) = p$, $\gamma_1(t_1) = a, \gamma_2(t_2) = b$. Выберем $0 < \lambda < 1$, и пусть $a' = \gamma_1(\lambda t_1), b' = \gamma_2(\lambda t_2)$. Докажите, что $d(a', b') \leqslant \lambda d(a, b)$.



Задача 7.9. Пусть a, b, A, B – точки в CAT(0)-пространстве, c, C – середины кратчайших, соединяющих a, b и A, B, а p – середина кратчайшей, соединяющей A и b.



Докажите, что $d(c, C) \leqslant \frac{1}{2}(d(a, A) + d(b, B))$

Указание. Убедитесь, что $d(c, C) \leqslant d(c, p) + d(p, C)$, и примените предыдущую задачу для случая $\lambda = \frac{1}{2}$.

Определение 7.5. Пусть в метрическом пространстве заданы два отображения $\gamma_1: [0, t_1] \longrightarrow M$, $\gamma_2: [0, t_2] \longrightarrow M$ с геодезической параметризацией. Рассмотрим отображения $\tilde{\gamma}_i: [0, 1] \longrightarrow M$, полученные из γ_i линейной заменой параметра: $\tilde{\gamma}_i(u) = \gamma_i(t_i u)$. **Расстояние** $d_\gamma(\gamma_1, \gamma_2)$ определяется по формуле

$$d_\gamma(\gamma_1, \gamma_2) := \sup_u d(\tilde{\gamma}_1(u), \tilde{\gamma}_2(u)).$$

Задача 7.10. Докажите, что d_γ – это метрика.

Указание. Это sup-метрика на отображениях из отрезка.

Замечание 7.2. В следующей задаче изучается функция $u \mapsto d(\tilde{\gamma}_1(u), \tilde{\gamma}_2(u))$, которая участвует в определении d_γ.

Задача 7.11 (!). Пусть $\gamma_i : [0, t_i] \longrightarrow M$ – кратчайшие геодезические в CAT(0)-пространстве, а $\kappa : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ переводит $u \in [0,1]$ в $d(\gamma_1(t_1 u), \gamma_2(t_2 u))$. Докажите, что κ выпукло.

Указание. Воспользуйтесь задачей 7.9.

Задача 7.12. Пусть $\Gamma_p(M)$ – пространство кратчайших, начинающихся в p, снабженное метрикой d_Γ, а $\pi : \Gamma_p(M) \longrightarrow M$ отображение, переводящее кратчайшую в ее второй конец. Предположим, что M – CAT(0)-пространство. Докажите, что это изометрия.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 7.13. Зафиксируем точку p в CAT(0)-пространстве. Для какой-то точки $x \in M$, рассмотрим кратчайшую $\gamma_x : [0, d(p,x)] \longrightarrow M$, соединяющую p с x. Пусть $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, и пусть $P_\lambda : M \longrightarrow M$ отображает x в $\gamma_x(\lambda d(p,x))$. Докажите, что P_λ задает непрерывное отображение из $M \times [0,1]$ в M.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 7.14 (!). Постройте гомотопию между тождественным отображением из M в себя и отображением, переводящим M в $\{p\}$.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Замечание 7.3. Мы доказали, что все CAT(0)-пространства стягиваемы.

7.2. Радиус выпуклости

Определение 7.6. Пусть M – пространство Александрова неположительной кривизны. **Нормальный шар** в M есть шар $B_\varepsilon(x)$, который является CAT(0)-пространством.

Задача 7.15. Докажите, что нормальный шар – строго выпуклый.

Задача 7.16. Докажите, что для каждой точки $x \in M$ в пространстве Александрова неположительной кривизны есть $\varepsilon > 0$ такой, что $B_\varepsilon(x)$ – нормальный шар.

Определение 7.7. Пусть M – пространство Александрова неположительной кривизны. **Радиус выпуклости** в точке $x \in M$ есть супремум всех ε таких, что $B_\varepsilon(x)$ нормален. Обозначим радиус выпуклости за $\rho(x)$.

Задача 7.17. Пусть в какой-то точке M радиус выпуклости равен ∞. Докажите, что этот радиус равен ∞ везде в M.

Задача 7.18. Докажите, что функция $x \longrightarrow \rho(x)$ 1-липшицева.

Задача 7.19. Пусть $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ – функция на отрезке, причем у каждой точки $x \in [0,1]$ есть связная окрестность U_x такая, что $f\Big|_{U_x}$ выпукла. Докажите, что f выпукла.

Задача 7.20. Пусть $\gamma : [0,t] \longrightarrow M$ – кратчайшая в пространстве Александрова неположительной кривизны, а $\rho\Big|_\gamma \geqslant \varepsilon$. Рассмотрим кратчайшую $\gamma' : [0,t'] \longrightarrow M$, которая лежит в ε-окрестности γ. Пусть $\kappa : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ переводит $u \in [0,1]$ в $d(\gamma(ut), \gamma'(ut'))$. Докажите, что κ выпукла.

Указание. Покройте $\gamma(\varepsilon)$ нормальными шарами, примените задачу 7.11, и воспользуйтесь предыдущей задачей.

7.3. Кратчайшие и геодезические

Определение 7.8. Геодезическая есть путь $\gamma: [a,b] \longrightarrow M$ такой, что у каждой точки $x \in [0,t]$ есть связная окрестность U_x такая, что $\gamma\Big|_{U_x}$ – кратчайшая геодезическая. Обозначим за $\Gamma(M)$ пространство всех геодезических, с метрикой d_Γ (Определение 7.5), и за $\Gamma_p(M)$ пространством геодезических с началом в p.

Задача 7.21. Приведите пример пространства Александрова неположительной кривизны и отображения $\gamma: [a,b] \longrightarrow M$, которое является геодезической, но не кратчайшей.

Задача 7.22. Рассмотрим отображение $\Gamma_p(M) \xrightarrow{\pi} M$, переводящее геодезическую в ее второй конец. Докажите, что оно непрерывно.

Задача 7.23. (!) Предположим, что M – полное пространство Александрова неположительной кривизны.

а. Докажите, что пространство геодезических кратчайших полное.

б. Пусть γ_i – последовательность Коши в $\Gamma(M)$. Докажите, что γ_i сходится в метрике d_G к какому-то пути.

в. Докажите, что пространство геодезических $\Gamma(M)$ полно.

Указание. Докажите, что предел отображений, растягивающих метрику в C_i раз, растягивает метрику в $\lim_i C_i$ раз. Выведите из этого, что пространство кратчайших полно, а предел геодезических определен. Чтоб убедиться в том, что это геодезическая, покройте M нормальными шарами; в каждом из них любая геодезическая является кратчайшей.

Задача 7.24 (**). Решите предыдущую задачу без предположения о кривизне M, или найдите контрпример.

Определение 7.9. Радиус выпуклости для множества $Z \subset M$ есть $\inf_{z \in Z} \rho(z)$, где ρ есть радиус выпуклости в точке z.

Задача 7.25 (!). Пусть $\gamma: [0,t] \longrightarrow M$, $\gamma': [0,t'] \longrightarrow M$ – геодезические в пространстве Александрова неположительной кривизны, радиус выпуклости γ равен ε, а $d_\Gamma(\gamma,\gamma') < \varepsilon$. Оределим $\kappa: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ по формуле $\kappa(u) := d(\gamma(ut), \gamma'(ut'))$. Докажите, что κ – выпуклая функция.

Указание. Задача 7.20 решается тем же самым рассуждением.

Задача 7.26. Пусть $\gamma: [0,t] \longrightarrow M$, $\gamma': [0,t'] \longrightarrow M$ – геодезические в пространстве Александрова неположительной кривизны, радиус выпуклости γ равен ε, а $d_\Gamma(\gamma,\gamma') < \varepsilon$. Докажите, что расстояние между геодезическими есть максимум расстояния между концами.

$$d_\Gamma(\gamma,\gamma') = \max(d(\gamma(0),\gamma'(0)), d(\gamma(t),\gamma'(t'))).$$

Задача 7.27. Рассмотрим отображение $\Gamma_p(M) \xrightarrow{\pi} M$, переводящее геодезическую в ее второй конец. Пусть ε – радиус выпуклости для γ. Докажите, что для ε-шара $B_\varepsilon(\gamma) \subset \Gamma_p(M)$, ограничение $\pi\Big|_{B_\varepsilon(\gamma)}$ задает изометрия $B_\varepsilon(\gamma)$ и шара $B_\varepsilon(\pi(\gamma))$

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 7.28 (!). Пусть M_1, M – полные метрические пространства, $\rho: M \longrightarrow \mathbb{R}^{>0}$ – непрерывная функция, а а $\pi: M_1 \longrightarrow M$ – отображение, которое задает изометрию

$$\pi: B_{\rho(\pi(x))}(x) \longrightarrow B_{\rho(\pi(x))}(\pi(x))$$

для любой точки $x \in M_1$. Докажите, что π – накрытие.

Задача 7.29. Пусть M полное пространство Александрова неположительной кривизны. Рассмотрим отображение $\Gamma_p(M) \xrightarrow{\pi} M$, переводящее геодезическую в ее второй конец. Докажите, что это накрытие.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 7.30. Пусть M – полное пространство Александрова неположительной кривизны (как обычно, мы предполагаем, что метрика в M – строго внутренняя).

а. Докажите, что любая геодезическая в M – кратчайшая.

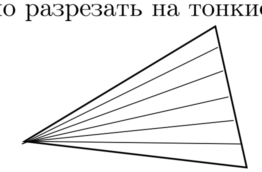
б. Докажите, что любые две точки M соединяются единственной геодезической.

7.4. Тонкие треугольники и пространства Адамара

Определение 7.10. Полное, односвязное пространство Александрова неположительной кривизны называется **пространством Адамара**.

Определение 7.11. Пусть M – пространство Александрова неположительной кривизны, а $\triangle(a,p,b)$ – треугольник, составленный из кратчайших $[a,b]$, $[a,p]$ и $[b,p]$. Назовем $\triangle(a,p,b)$ **тонким**, если $d([a,p],[b,p]) < \varepsilon$, где ε есть радиус выпуклости множества $[a,p]\cap[b,p]$. Угол, образованный средней вершиной p и кратчайшими $[a,p]$ и $[b,p]$ называется **тонким**.

Задача 7.31 (!). Пусть M – пространство Адамара. Докажите, что любой треугольник, составленный из геодезических, можно разрезать на тонкие треугольники, как на картинке.



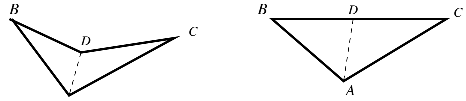
Указание. Воспользуйтесь гомотопией, построенной в задаче 7.13, проспособив ее конструкцию для пространств Адамара.

Задача 7.32 (!). Пусть для каждого тонкого треугольника в M выполнено неравенство сравнения. Докажите, что M есть CAT(0)-пространство.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Определение 7.12. Пусть a,b,c – три точки в метрическом пространстве, а $\triangle(\bar a,\bar b,\bar c)$ – треугольник сравнения. Рассмотрим кратчайшие γ_1,γ_2, соединяющие a с b и a с c. **Условие сравнения углов для неположительной кривизны** есть неравенство $\measuredangle(\gamma_1,a,\gamma_2)\leqslant\measuredangle(\bar c\bar a\bar b)$ (для каждого из трех углов).

Задача 7.33. Рассмотрим шарнирный механизм из четырех стержней на плоскости. Пусть четырехугольники $A_1B_1D_1C_1$ и $A_2B_2D_2C_2$ на плоскости получены движением стержней этого механизма (математически, это означает, что $|A_1B_1|=|A_2B_2|$, $|B_1C_1|=|B_2C_2|$, $|C_1D_1|=|C_2D_2|$, $|D_1A_1|=|D_2A_2|$).



Предположим, что $\measuredangle(B_2D_2C_2)=\pi$, а $\measuredangle(B_1D_1C_1)\geqslant\pi$. Докажите, что $\measuredangle(B_2A_2C_2)\geqslant\measuredangle(B_1A_1C_1)$, $\measuredangle(A_2C_2D_2)\geqslant\measuredangle(A_1C_1D_2)$ и $\measuredangle(A_2B_2D_2)\geqslant\measuredangle(A_1B_1D_2)$.

Указание. Примените лемму Александрова.

Задача 7.34. Пусть $\triangle(a,b,c)$ – треугольник в пространстве Адамара, а d – точка на кратчайшей $[b,c]$. Предположим, что для $\triangle(a,b,d)$ и $\triangle(a,c,d)$ выполнено условие сравнения углов. Нарисуем на плоскости треугольники сравнения $\triangle(\bar a,\bar d,\bar c)$ и $\triangle(\bar a,\bar d,\bar c)$, отложив их по разные стороны от $(\bar a,\bar d)$.

а. Докажите, что $\measuredangle(\bar a,\bar d,\bar c)+\measuredangle(\bar a,\bar d,\bar b)>\pi$.

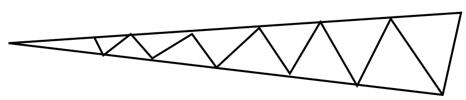
б. Пусть $\triangle(\tilde a,\tilde b,\tilde c)$ – треугольник сравнения для $\triangle(a,b,c)$. Докажите, что углы $\triangle(\tilde a,\tilde b,\tilde c)$ меньше, чем соответствующие углы в четырехугольнике $\bar a,\bar b,\bar d,\bar c$.

в. (!) Докажите, что для $\triangle(a,b,c)$ выполнено условие сравнения углов.

Указание. Во втором пункте, воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 7.35 (!). Докажите неравенство сравнения углов в тонком треугольнике.

Указание. Разрежьте плоский треугольник на треугольники, лежащие в нормальных шарах, как на картинке,



и примените предыдущую задачу.

Задача 7.36 (!). (теорема Картана-Адамара) Пусть M – пространство Адамара. Докажите, что M – CAT(0)-пространство. Докажите, что оно стягиваемо.

Задача 7.37 (*). Приведите пример неполного пространства Александрова неположительной кривизны, где не выполнено CAT(0)-условие, либо докажите, что такого не бывает.

Определение 7.13. Функция $f: M\longrightarrow\mathbb{R}$ на метрическом пространстве называется **λ-выпуклая**, если для любой геодезической $\gamma: [0,t]\longrightarrow M$, фукция $u\longrightarrow f(\gamma(u))-\lambda^2u^2$ выпукла.

Задача 7.38 (*). Пусть M – пространство Адамара, $z\in M$, а $d_z(x)=d(x,z)$. Докажите, что функция d_z^2 1-выпуклая.

Задача 7.39 (*). Пусть $\lambda>0$. Докажите, что любая λ-выпуклая функция на полном пространстве имеет минимум.

Задача 7.40 (*). Пусть $Z\subset M$ – замкнутое, ограниченное подмножество пространства Адамара. **Описанный шар** для Z есть шар $B_r(x)$ минимального радиуса, содержащий Z. Докажите, что для любого конечного подмножества $Z\subset M$, описанный шар существует и единственен.

Задача 7.41 (**). Пусть $Z\subset M$ – замкнутое, ограниченное подмножество локально компактного пространства Адамара. Докажите, что описанный шар для Z существует и единственен.

Определение 7.14. **Луч** в метрическом пространстве есть изометрическое вложение $[0,\infty[\longrightarrow M$. **Параллельные лучи** суть лучи $\gamma,\gamma': [0,\infty[\longrightarrow M$ такие, что $d(\gamma(t),\gamma'(t))$ ограниченно.

Задача 7.42 (**). Пусть $\gamma: [0,\infty[\longrightarrow M$ – луч в локально компактном пространстве Адамара. Докажите, что для любой точки $z\in M$, существует и единственный луч, параллельный γ, и выходящий из z.

Задача 7.43 (**). Пусть G – конечная подгруппа в группе изометрий пространства Адамара. Докажите, что G оставляет неподвижной точку.