

Метрические пространства 8: Пространства, гиперболические по Громову

Правила: Зачеты по листкам бывают двух типов: когда сданы все (или или 2/3) задачи со звездочками, либо все (или 2/3) задачи без звездочек. Задачи с двумя звездочками можно не сдавать. Сдавшем k задач с двумя звездочками разрешается не сдавать $2k$ задач со звездочками или факториалом из того же листочка. Задачи, обозначенные (!), следует сдавать и тем и другим. Если сданы 2/3 задач со звездочками и (!), студент получает $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) двух – $10t$ баллов. Если сданы 2/3 задач без звездочки и с (!), студент получает $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) трех – $10t$ баллов. Эти виды оценок не складываются, то есть больше $10t$ за листочек получить нельзя.

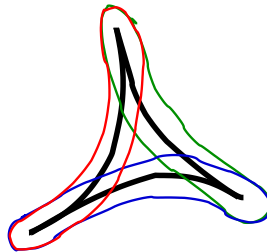
Коэффициент t равен 1.5, если задачи сданы не позже, чем через 31 день после выдачи, 1, если между 31 и 50 днями, и 0.7, если позже.

Результаты сдачи записываются на листке ведомости, которая выдается студенту; просьба не терять ее, больше нигде результаты храниться не будут.

8.1. δ -тонкие треугольники

Замечание 8.1. В этом разделе, все метрические пространства предполагаются по умолчанию наделенными строго внутренней метрикой (внутренней с кратчайшими). Кратчайшие же предполагаются наделенными геодезической параметризацией.

Определение 8.1. Геодезический треугольник $\Delta(abc)$ в метрическом пространстве есть треугольник, составленный из трех вершин a, b, c , соединенных кратчайшими, которые я буду обозначать за $[a, b]$, $[b, c]$ и $[c, a]$. **Талия** треугольника есть супремум расстояния от точки z , лежащей на одной из сторон, до объединения двух других. Треугольник называется δ -тонким (по Рипсу), если его талия не больше δ . Иначе говоря, каждая сторона такого треугольника лежит в δ -окрестности двух других.



Определение 8.2. Метрическое пространство X со строго внутренней метрикой называется δ -гиперболическим, если все геодезические треугольники δ -тонкие. Будем говорить, что X гиперболично, если оно δ -гиперболично для какой-то константы δ .

Замечание 8.2. Есть много разных определений гиперболичности. При этом, величина константы δ не имеет значения; когда говорят «определение А гиперболичности эквивалентно определению Б» это значит, что для какого-то числа $C > 0$ из δ -гиперболичности в смысле А следует $C\delta$ -гиперболичность в смысле Б, а из δ -гиперболичности в смысле Б следует $C\delta$ -гиперболичность в смысле А.

Замечание 8.3. Немного погодя, я определю δ -гиперболичность для произвольных метрических пространств (не обязательно с внутренней метрикой). Определение с тонкими треугольниками по Рипсу станет частным случаем более общего, эквивалентным ему (в смысле замечания 8.2).

Определение 8.3. **Дерево** есть связный метрический граф с тривиальной фундаментальной группой.

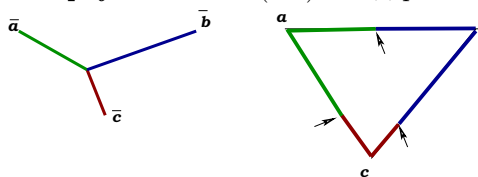
Задача 8.1. Докажите, что дерево 0-гиперболично.

Определение 8.4. Пусть $\phi : X \rightarrow Y$ – отображение метрических пространств. **Кодиаметр** $\text{codiam } \phi$ определяется формулой

$$\text{codiam}(\phi) := \sup_{x,y \in X} |d(x,y) - d(\phi(x), \phi(y))|.$$

Он измеряет то, насколько ϕ отличается от изометрии.

Определение 8.5. Пусть $\Delta(abc)$ – геодезический треугольник. Определим **модельный 0-гиперболический треугольник** $\Delta(\bar{a}\bar{b}\bar{c})$ как дерево с тремя вершинами



и тремя ребрами, соединенными в четвертой вершине, таким образом, что соответствующие расстояния равны: $|ab| = |\bar{a}\bar{b}|$, $|ac| = |\bar{a}\bar{c}|$, $|bc| = |\bar{b}\bar{c}|$.

Задача 8.2. а. Постройте отображение Ψ из точек (вершин и сторон) треугольника $\Delta(abc)$ в $\Delta(\bar{a}\bar{b}\bar{c})$, задающее изометрию на каждой стороне и переводящее вершины в соответствующие им вершины.

б. Докажите, что такое Ψ единственно.

Задача 8.3. Пусть $\Delta(abc)$ – треугольник, а $b' \in [ab]$, $c' \in [ac]$ – точки на его сторонах.

а. Пусть $|b'c'| < \delta$. Докажите, что $||ab'| - |ac'|| < \delta$.

б. Пусть $d(b', [ac]) < \delta$, а $|ac'| = |ab'|$. Докажите, что $|b'c'| < 2\delta$.

Указание. Выведите б из а.

Задача 8.4. Пусть треугольник $\Delta(abc)$ δ -тонкий, а $\Psi : \Delta(abc) \rightarrow \Delta(\bar{a}\bar{b}\bar{c})$ – отображение в модельный треугольник, построенное выше. Докажите, что $\text{codiam } \Psi \leq 2\delta$.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей

Определение 8.6. Треугольник $\Delta(abc)$ называется δ -тонким по Громову, если отображение Ψ в модельный треугольник имеет кодиаметр $\leq \delta$.

Задача 8.5 (!). Докажите, что из δ -тонкости по Громову следует δ -тонкость по Рипсу, а из δ -тонкости по Рипсу следует 2δ -тонкость по Громову.

Определение 8.7. Треугольник называется δ -вырожденным, если две его стороны находятся в δ -окрестности третьей.

Задача 8.6 (*). Пусть X – δ -гиперболическое пространство а a' – точка на стороне $[bc]$ треугольника $\Delta(abc)$. Докажите, что треугольник $\Delta(aba')$ либо треугольник $\Delta(aca')$ – 2δ -вырожденный.

Задача 8.7 (*). Пусть X – δ -гиперболическое пространство, а одна из сторон треугольника $\Delta(abc)$ не больше δ . Докажите, что $\Delta(abc)$ – 2δ -вырожденный.

Задача 8.8 (!). Докажите, что пространство Лобачевского δ -гиперболично, для какого-то $\delta > 0$.

8.2. Гиперболические группы

Определение 8.8. Пусть G – группа. Множество $S \subset G$ называется **набором образующих**, если все элементы G выражаются через произведения элементов x_i, x_j^{-1} , для каких-то $x_i, x_j \in S$. Каждое такое произведение называется **словом** от x_i, x_j^{-1} . В дальнейшем, мы будем предполагать по умолчанию, что любой набор образующих S содержит x^{-1} вместе с каждым $x \in S$.

Определение 8.9. Пусть G – группа, а $S \subset G$ – набор образующих. **Граф Кэли** G есть метрический граф, полученный следующим образом. Вершины графа Кэли суть элементы G , а ребра соединяют две вершины g, g' , если $g' = gs$, где $s \in S$. Длины всех ребер графа Кэли равны 1.

Определение 8.10. Группа G называется **свободной**, если это фундаментальная группа букета окружностей. **Образующие** свободной группы заданы путями обхода вокруг этих окружностей.

Определение 8.11. Группа с заданной системой образующих называется **гиперболической по Громову**, если ее граф Кэли δ -гиперболический, для какого-то δ .

Задача 8.9. Докажите, что свободная группа гиперболическая.

Определение 8.12. **Свободное произведение** $(\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/n_2\mathbb{Z}) * \dots * (\mathbb{Z}/n_k\mathbb{Z})$ есть фактор свободной группы от k образующих x_1, \dots, x_k по минимальной нормальной подгруппе, содержащей $x_1^{n_1}, x_2^{n_2}, \dots, x_k^{n_k}$.

Задача 8.10. Докажите, что $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ гиперболическая.

Задача 8.11 (*). Докажите, что $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) * \dots * (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ гиперболическая.

Задача 8.12. Докажите, что \mathbb{Z}^n с обычным набором образующих негиперболическая.

Задача 8.13 (*). Пусть M – компактное метрическое пространство, а $\pi_1(M)$ свободна. Докажите, что универсальное накрытие M гиперболическое.

Задача 8.14 (*). Пусть X – компактное метрическое пространство, универсальное накрытие которого есть пространство Лобачевского. Докажите, что группа $\pi_1(X)$ гиперболическая по Громову.

8.3. Громовское произведение

Определение 8.13. Пусть X – метрическое пространство с отмеченной точкой p . Для обозначения расстояния $d(a, b)$ будет в дальнейшем использоваться $|ab|$. **Громовское произведение** $(a, b)_p$ есть $1/2(|ap| + |bp| - |ab|)$. Это число, которое измеряет отклонение неравенства треугольника от равенства.

Задача 8.15. Пусть $[a, b]$ – кратчайшая. Докажите, что $(a, b)_p \leq d(p, [ab])$.

Задача 8.16. Пусть $(a, b)_p = 0$. Следует ли из этого $p \in [ab]$?

Задача 8.17. Пусть треугольник $\Delta(abp)$ δ -тонкий, а c – точка на стороне $[ab]$. В силу тонкости, существует точка c' на другой стороне $\Delta(abp)$, которая отстоит от c не больше чем на δ . Для определенности, предположим, что c' лежит на $[pa]$. Докажите, что $(c, a)_p < 2\delta + |pc|$.

Указание. Убедитесь, что $(c, a)_p - (c', a)_p < 2\delta$.

Задача 8.18 (!). Пусть треугольник $\Delta(abp)$ δ -тонкий. Докажите, что

$$d(p, [ab]) \leq (a, b)_p \leq d(p, [ab]) + 2\delta.$$

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей, применив ее к c , которая является ближайшей точкой к p на кратчайшей $[ab]$.

Задача 8.19. Пусть X 0-гиперболично. Докажите, что $(a, b)_p = d(p, [ab])$.

Указание. Воспользуйтесь задачей 8.4.

Определение 8.14. Пусть (X, p) – множество с отмеченной точкой. Легко видеть, что расстояние на X можно определить в терминах громовского произведения $(a, b)_p$, потребовав выполнение недлинного списка аксиом. Говорится, что функция $(\cdot, \cdot)_p : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ удовлетворяет аксиомам громовского произведения, если выполнены следующие условия.

симметричность: $(a, b)_p = (b, a)_p$.

невырожденность: $(a, a)_p = (a, b)_p = (b, b)_p \Leftrightarrow a = b$.

неравенство треугольника $(a, b)_p + (b, c)_p \leq (a, c)_p + (b, b)_p$.

Задача 8.20. а. Пусть дана функция, удовлетворяющая аксиомам громовского произведения. Докажите, что $d(a, b) := (a, a)_p + (b, b)_p - 2(a, b)_p$ – метрика на X .

б. Докажите, что в отсутствии второго условия ("невырожденности"), эта формула задает полуметрику.

Задача 8.21 (!). Пусть X – 0-гиперболическое пространство с отмеченной точкой p . Рассмотрим объединение отрезков $[\bar{p}, \bar{x}]$ длины $|px|$, где $x \in X$ пробегает все точки X , и склеим $[\bar{p}, \bar{x}]$ с $[\bar{p}, \bar{y}]$ по отрезку, начинающемуся с \bar{p} , длины $d(p, [xy])$.

а. Докажите, что полученный граф является деревом.

б. Докажите, что это дерево изометрично X .

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Замечание 8.4. Из этой задачи следует, что каждое 0-гиперболическое пространство со строго внутренней метрикой изометрично дереву.

8.4. Неравенство Громова

Следующее неравенство, как будет доказано в скором времени, равносильно δ -гиперболичности.

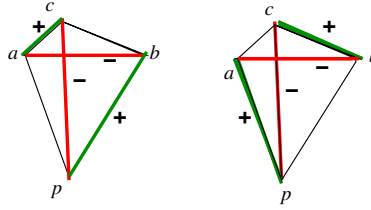
Определение 8.15. Пусть (X, p) – метрическое пространство с отмеченной точкой, а $a, b, c \in X$. **Неравенство Громова** есть неравенство на попарные громовские произведения:

$$(a, b)_p \geq \min[(a, c)_p, (b, c)_p] - \delta.$$

Когда нужно обозначить, о каком конкретно δ идет речь, я буду говорить **δ -неравенство Громова**.

Задача 8.22. Докажите, что неравенство Громова равносильно следующему условию:

$$\max(|bp| + |ac| - |cp| - |ab|, |ap| + |bc| - |cp| - |ab|) > -\delta.$$



Задача 8.23. Пусть в метрическом пространстве X выполнено неравенство Громова для $\delta = 0$. Докажите, что для любых $a, b, c \in X$, в тройке $(a, b)_p, (a, c)_p, (b, c)_p$ какие-то два числа равны, а третье \leq первым двух.

Задача 8.24. Пусть в (X, p) выполнено δ -неравенство Громова.

а. Докажите, что для любых $t, x, y, z \in X$ выполнено

$$(t, y)_p + (z, x)_p - \min[(t, z)_p + (x, y)_p, 2(y, z)_p] \geq -2\delta$$

и

$$(t, y)_p + (z, x)_p - \min[(t, z)_p + (x, y)_p, 2(x, t)_p] \geq -2\delta.$$

б. Докажите, что

$$(t, y)_p + (z, x)_p - \min[(t, z)_p + (x, y)_p, (y, z)_p + (x, t)_p] \geq -2\delta.$$

Указание. Попробуйте вывести (б) из (а).

Задача 8.25. Докажите, что

$$(t, y)_p + (z, x)_p - \min[(t, z)_p + (x, y)_p, (y, z)_p + (x, t)_p] = (t, y)_x - \min[(t, z)_x, (y, z)_x].$$

Указание. Воспользуйтесь задачей 8.22.

Задача 8.26 (!). Предположим, что в (X, p) выполнено δ -неравенство Громова. Докажите, что для любого выбора отмеченной точки p' , в (X, p') выполнено 2δ -неравенство Громова.

Указание. Воспользуйтесь предыдущими двумя задачами.

Задача 8.27. Выведите из неравенства Громова для $\delta = 0$ единственность кратчайших.

Указание. Возьмите две кратчайшие, соединяющие a и p , пусть b, c – их середины; примените неравенство Громова для a, b, c, p и воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 8.28. Пусть в метрическом пространстве X со строго внутренней метрикой выполнено неравенство Громова для $\delta = 0$, $a, b \in X$, а c – точка на кратчайшей $[a, b]$.

- Докажите, что $(a, c)_p = 0$ либо $(b, c)_p = 0$.
- Докажите, что c лежит на $[ab]$ либо на $[ac]$.

Указание. Воспользуйтесь задачей 8.23.

Задача 8.29. Пусть в метрическом пространстве X со строго внутренней метрикой выполнено неравенство Громова для $\delta = 0$. Докажите, что $d(p, [a, b]) = (a, b)_p$.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 8.30 (!). Пусть (X, p) – пространство со строго внутренней метрикой, в котором выполнено неравенство Громова для $\delta = 0$. Докажите, что это дерево.

Указание. Постройте отображение в дерево, как в задаче 8.21, и примените предыдущую задачу и задачу 8.20, чтобы убедиться, что это изометрия.

8.5. Аппроксимационное дерево

Замечание 8.5. В этом разделе не все метрические пространства предполагаются наделенными внутренней метрикой.

Задача 8.31 (!). Пусть (X, p) – метрическое пространство с отмеченной точкой. Для набора точек

$$S = \{x = x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1} = y\} \subset X,$$

обозначим за $L_S(x, y) := \min_i (x_i, x_{i+1})_p$. Определим функцию $(x, y)'_p := \sup_S L_S(x, y)$, где супремум берется по всем множествам $x_1, \dots, x_n \in X$. Пусть $d'(x, y) = d(x, p) + d(y, p) - 2(x, y)'_p$.

- Докажите, что $d(x, y) \geq d'(x, y) \geq 0$.
- Докажите, что $(x, y)'_p$ удовлетворяет 0-неравенству Громова:

$$(a, b)'_p \geq \min [(a, c)'_p, (b, c)'_p].$$

- Докажите, что для любых a, b, c выполнено

$$(a, b)'_p + (b, c)'_p \leq (a, c)'_p + (b, b)'_p \quad (8.1)$$

- Докажите, что d' – полуметрика.

Указание. Для доказательства (8.1), выведите из 0-неравенства Громова неравенства $(a, b)'_p \leq (b, b)'_p$, $(c, b)'_p \leq (b, b)'_p$, и убедитесь, что либо $(a, b)'_p + (b, c)'_p \leq (a, c)'_p + (b, c)'_p$, либо $(a, b)'_p + (b, c)'_p \leq (a, c)'_p + (a, b)'_p$. Для доказательства того, что d' полуметрика, воспользуйтесь (8.1) и задачей 8.22.

Задача 8.32. Обозначим за X_{tr} метрическое пространство, полученное из построенной выше полуметрики (X, d') склеиванием точек $d'(x, y) = 0$. Докажите, что X_{tr} это дерево, а тавтологическое отображение $(X, d) \xrightarrow{\nu} X_{tr}$ 1-липшицево и удовлетворяет $|px| = d'(\nu(p), \nu(x))$.

Определение 8.16. Пространство (X_{tr}, d') называется **аппроксимационным деревом** для X .

Задача 8.33. Предположим, что в метрическом пространстве X выполнено следующее "неравенство мультигромова":

$$(x, y)_p \geq \min_i ((x_i, x_{i+1})_p) - \delta' \quad (8.2)$$

Докажите, что тавтологическое отображение $(X, d) \xrightarrow{\nu} X_{tr}$ имеет кодiameter $\leq \frac{1}{2}\delta$.

Задача 8.34 (!). Пусть (X, p) – конечное метрическое пространство, в котором $2^k + 2$ точки, и выполнено δ -неравенство Громова. Докажите, что в X выполнено неравенство (8.2) для $\delta' = k\delta$.

8.6. Неравенство Громова и тонкие треугольники

Задача 8.35. Пусть (X, p) – метрическое пространство со строго внутренней метрикой, в котором выполнено δ -неравенство Громова, а a', b' – точки на сторонах $[ca]$, $[cb]$ треугольника $\Delta(cab)$. Рассмотрим пространство Y из 5 точек (c, a, b, a', b') , и пусть $\nu : Y \rightarrow Y_{tr}$ – отображение на аппроксимационное дерево.

- Докажите, что $\text{codiam } \nu \leq 2\delta$.
- Пусть Y_{tr}^0 – минимальное связное под-дерево Y , содержащее $\nu(a), \nu(b), \nu(c)$. Докажите, что Y_{tr}^0 изометрично дереву с четырьмя вершинами (одной центральной и три по бокам), длины сторон которого отличаются от длин сторон модельного дерева $\Delta(\bar{a}\bar{b}\bar{c})$ (Определение 8.5) не больше чем на 2δ .
- Пусть $\mu : \Delta(abc) \rightarrow \Delta(\bar{a}\bar{b}\bar{c})$ – отображение в модельный треугольник. (Определение 8.5). Докажите, что

$$|d(\mu(a'), \mu(b')) - d(\nu(a'), \nu(a'))| < 2\delta,$$

и

$$|d(a', b') - d(\nu(a'), \nu(a'))| < 2\delta.$$

- Выведите из этого, что $\text{codiam } \mu \leq 4\delta$

Задача 8.36 (!). Пусть X – метрическое пространство со строго внутренней метрикой, в котором выполнено δ -неравенство Громова. Докажите, что X 4δ -гиперболично.

Задача 8.37. Пусть $\Delta(abc)$ – δ -тонкий треугольник. Докажите, что $(a, b)_p - (a, c)_p \geq d(p, [a, b]) - d(p, [a, c]) - 2\delta$.

Указание. Воспользуйтесь задачей 8.18.

Задача 8.38. Пусть $\Delta(abc)$ – δ -тонкий треугольник, а p' – точка на стороне $[a, b]$, ближайшая к p . Предположим для определенности, что она лежит в δ -окрестности $[ac]$.

а. Докажите, что $d(p, [a, b]) - d(p, [a, c]) \geq -\delta$.

б. Докажите, что $(a, b)_p - (b, c)_p \leq -3\delta$.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 8.39 (!). Пусть $\triangle(abc)$ – δ -тонкий треугольник. Докажите, что

$$(a, b)_p \geq \min((a, c)_p, (b, c)_p) - 3\delta.$$

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Замечание 8.6. Определим **пространство, гиперболическое по Громову** как метрическое пространство (X, p) с отмеченной точкой, в котором выполнено δ -неравенство Громова для какого-то δ . В силу доказанного выше, это определение равносильно определению через тонкие треугольники ("эквивалентность" следует понимать в смысле Замечания 8.2).

8.7. Гиперболическая граница

Определение 8.17. Пусть X – гиперболическое пространство. Скажем, что **последовательность $\{x_i\}$ сходится на бесконечности**, если

$$\lim_{i, j \rightarrow \infty} (x_i, x_j)_p = \infty.$$

Задача 8.40 (*). Пусть $\{x_i\}, \{y_i\}$ – последовательности в гиперболическом пространстве. Напишем $\{x_i\} \sim \{y_i\}$, если последовательность $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, \dots$ сходится. Докажите, что это отношение эквивалентности.

Определение 8.18. Множество ∂X классов эквивалентности последовательностей, сходящихся на бесконечности, называется **гиперболической границей**.

Задача 8.41 (*). Рассмотрим слабейшую топологию в $X \cup \partial X$, индуцирующую топологию на X , в которой сходящиеся на бесконечности последовательности сходятся к соответствующей точке ∂X . Докажите, что эта топология хаусдорфова, а X плотно в ∂X .

Задача 8.42 (*). Пусть d – максимальная метрика на ∂X , удовлетворяющая условию $d(\{x_i\}, \{y_i\}) \leq k^{-1}$ для $\lim_i (x_i, y_i)_p \geq 2^k$. Докажите, что d задает метрику на ∂X , согласованную с топологией, заданной выше.

Задача 8.43 ().** Докажите, что пространство $(\partial X, d)$ полно.

Задача 8.44 ().** Пусть X – полное риманово многообразие, которое гиперболично по Громову. Докажите, что ∂X компактно. Докажите, что ∂X непусто, если X некомпактно.