Гиперболические группы 9: лемма Морса

Правила: Зачеты по листкам бывают двух типов: когда сданы все (или или 2/3) задачи со звездочками, либо все (или 2/3) задачи без звездочек. Задачи с двумя звездочками можно не сдавать. Сдавшим k задач с двумя звездочками разрешается не сдавать $2k$ задач со звездочками или факториалом из того же листочка. Задачи, обозначенные (!), следует сдавать и тем и другим. Если сданы 2/3 задач со звездочками и (!), студент получает $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) двух – $10t$ баллов. Если сданы 2/3 задач без звездочки и с (!), студент получает $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) трех – $10t$ баллов. Эти виды оценок не складываются, то есть больше $10t$ за листочек получить нельзя.

Коэффициент t равен 1.5, если задачи сданы не позже, чем через 31 день после выдачи, 1, если между 31 и 50 днями, и 0.7, если позже.

Результаты сдачи записываются на листке ведомости, которая выдается студенту; просьба не терять ее, больше нигде результаты храниться не будут.

9.1. Квазиизометрии

Определение 9.1. Отображение $f: X \longrightarrow Y$ называется **билипшицевым с константой** C, или просто **билипшицевым**, если это биекция, причем f и f^{-1} C-липшицевы (то есть удовлетворяют $d(f(x), f(y)) \leqslant Cd(x,y)$).

Определение 9.2. **ε-сеть** в метрическом пространстве M есть такое множество $N \subset M$, что объединение ε-шаров с центрами в N равно M. ε-сеть N называется **δ-разделенной**, если для любых $a \neq b \in N$, имеем $d(a,b) \geqslant \delta$.

Определение 9.3. Пространства X и Y **квазиизометричны**, если в X и в Y существуют ε-сети X_ε и Y_ε, между которыми есть билипшицево отображение.

Определение 9.4. Отображение $f: X \longrightarrow Y$ метрических пространств называется **квазиметрическим**, если для каких-то констант C, $\varepsilon > 0$, имеем $d(f(x), f(y)) \leqslant Cd(x,y) + \delta$.

Замечание 9.1. Квазиметрическое отображение не обязательно непрерывно.

Задача 9.1. Пусть $f: M \longrightarrow M'$ – квазиметрическое отображение с константами C, ε. Докажите, что существует $B > 0$ такое, что для любой B-разделенной $2B$-сети $N \subset M$, ограничение $f\big|_N$ $2C$-липшицево.

Задача 9.2. Пусть $f: M \longrightarrow M'$ – отображение метрических пространств, а $N \subset M$ – ε-сеть такая, что $f\big|_M$ липшицево. Докажите, что f – квазиметрическое отображение.

Задача 9.3. Пусть $f: X \longrightarrow Y$, $g: Y \longrightarrow X$ – квазиметрические отображения, причем $gf = \mathsf{Id}$ и $fg = \mathsf{Id}_Y$.

а. Докажите, что X и Y квазиизометричны.

б. Пусть заданы квазиизометричные пространства X, Y. Всегда ли найдутся квазиметрические f и g, удовлетворяющие $gf = \mathsf{Id}$ и $fg = \mathsf{Id}_Y$?

Задача 9.4. Пусть $N \subset M$ – ε-сеть. Докажите, что существует отображение $M \xrightarrow{\phi} N$, удовлетворяющее $d(x, \phi(x)) \leqslant \varepsilon$.

Задача 9.5 (!). Пусть X, Y – квазиизометрические пространства. Докажите, что найдутся квазиметрические отображения $f: X \longrightarrow Y$, $g: Y \longrightarrow X$, и константа $C > 0$ такая, что $d(fg(x), x) < C$ и $d(gf(y), y) < C$ для любых $x \in X, y \in Y$.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 9.6. Пусть $f: X \longrightarrow Y$, $g: Y \longrightarrow X$ – квазиметрические отображения, удовлетворяющие $d(gf(x), x) < C$ и $d(fg(y), y) < C$ для какого-то $C > 0$.

а. Докажите, что для любой B-сети N в X, $gf(N)$ – B'-сеть, для $B' > C + B$.

б. Докажите, что существуют такие константы $C_1, C_2 > 0$, что $d(g(a), g(b)) \geqslant C_1 d(a,b) - C_2$.

в. Докажите, что $f(N)$ – B''-сеть, для какого-то B''.

Задача 9.7 (!). Пусть X, Y – метрические пространства, а $f: X \longrightarrow Y$, $g: Y \longrightarrow X$ – квазиметрические отображения. Предположим, что существует константа $C > 0$ такая, что $d(gf(x), x) < C$ и $d(fg(y), y) < C$ для любых $x \in X, y \in Y$. Докажите, что X, Y квазиизометричны.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей и задачей 9.1.

Задача 9.8 (!). Докажите, что квазиизометрия – отношение эквивалентности.

Указание. Воспользуйтесь интерпретацией квазиизометричности в терминах пары квазиметрических отображений f, g с $d(fg(x), x) < C$ и $d(gf(y), y) < C$.

Задача 9.9 (!). Пусть Γ – группа, S_1, S_2 – наборы образующих, а d_1, d_2 – соответствующие метрики слов на Γ. Докажите, что (Γ, d_1) квазизометрично (Γ, d_1).

Задача 9.10. Пусть Γ, S – группа с конечным набором образующих, d_w метрика слов, а d_1 – метрика, которая удовлетворяет $d_w - d_1 < C$, для какой-то константы. Докажите, что d_w билипшицево с d_1.

Определение 9.5. Пусть (M, p) – метрическое пространство с отмеченной точкой, $(\tilde{M}, \tilde{p})$ – его универсальное накрытие, а $\Gamma = \pi_1(M)$ – группа монодромии накрытия. **Метрика орбит** на Γ есть метрика вида $d(\gamma_1, \gamma_2) = d(\gamma_1 \tilde{p}, \gamma_2 \tilde{p})$.

Задача 9.11. Докажите, что метрика орбит левоинвариантна.

Задача 9.12 (*). Реализуйте метрику слов на группе как метрику орбит для какого-то метрического пространства с геодезической метрикой.

Задача 9.13 (!). Пусть d_w – метрика слов на группе, а d_o – метрика орбит. Докажите, что найдется $C > 0$ такое, что $d_0 \leqslant C d_w$.

Указание. Оцените C через длину геодезических, представляющих s_i в $\pi_1(M, p)$.

Определение 9.6. Метрическое пространство называется **геодезическим**, если его метрика строго внутренняя, то есть любые две точки соединяются кратчайшими.

Определение 9.7. Метрическое пространство X называется **ограниченным**, если его диаметр $\mathsf{diam}(X)$ конечен.

Задача 9.14. Пусть M – универсальное накрытие ограниченного геодезического пространства M, $D = \mathsf{diam}(M)$, а $\Gamma = \pi_1(M)$ – его группа монодромии. Докажите, что $\Gamma z \subset \tilde{M}$ есть D-сеть.

Задача 9.15. Пусть $(\tilde{M}, \tilde{p})$ – универсальное накрытие ограниченного геодезического пространства (M, p) диаметра D, $\Gamma = \pi_1(M)$ – его группа монодромии, а $z = \gamma\tilde{p}$ – точка на орбите $\Gamma\tilde{p}$. Рассмотрим кратчайшую $[\tilde{p}, z]$, длины $n \leqslant |\tilde{p}, z| \leqslant n + 1$ и точки $\tilde{p} = z_1, z_2, ..., z_n = z \in [\tilde{p}, z]$ на ней, разбивающие $[\tilde{p}, z]$ на отрезки длины $\leqslant 1$.

а. Докажите, что существует последовательность $y_1, ..., y_n \in \Gamma\tilde{p}$, $y_i = \gamma_i\tilde{p}$, такие, что $|z_i, y_i| \leqslant D$.

б. Докажите, что $|y_i, y_{i+1}| \leqslant 2D + 1$.

в. Докажите, что множество всех $\gamma \in \Gamma$ таких, что $|\tilde{p}, \gamma(\tilde{p}) < 2D + 1$, порождает Γ.

г. Обозначим этот набор за S, и пусть d_w – соответствующая метрика слов. Докажите, что $d_w(1, \gamma) \leqslant n$.

Указание. Представьте γ в виде произведения $\gamma = g_0 g_1 ... g_n$, где $g_i = \gamma_{i+1}\gamma_i^{-1}$, и убедитесь, что $g_i \in S$.

Задача 9.16 (!). Пусть $(\tilde{M}, \tilde{p})$ – универсальное накрытие ограниченного геодезического пространства (M, p), d_o – соответствующая метрика орбит, а d_w – какая-то метрика слов. Докажите, что метрика d_o билипшицева d_w.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 9.17 (!). Пусть M – ограниченное геодезическое пространство. Докажите, что $\tilde{M}$ квазиизометрично $\pi_1(M)$ с какой-то метрикой слов на нем.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

9.2. Теорема Арцела-Асколи

Определение 9.8. Пусть X, Y – метрические пространства, а $\operatorname{Map}(X, Y)$ – множество всех отображений. Для точки $x \in X$ и открытого подмножества $W \subset Y$, рассмотрим подмножество $U_{x,W} \subset \operatorname{Map}(X, Y)$, состоящее из всех отображений, переводящих x в W. **Топология поточечной сходимости**, или же **слабая топология** на $\operatorname{Map}(X, Y)$ задается предбазой вида $U_{x,W}$, $x \in X, W \subset Y$ для всех точек $x \in X$ и всех открытых подмножеств $W \subset Y$. **Топология равномерной сходимости**, обозначенная C^0, задается базой вида $U_{f,\delta}$, где $f \in \operatorname{Map}(X, Y)$, $\delta > 0$, а $U_{f,\delta}$ – множество всех отображений $g \in \operatorname{Map}(X, Y)$, таких, что $d(f(x), g(x)) < \delta$ для всех $x \in X$.

Задача 9.18. Пусть $\{f_i\}$ – последовательность точек в $\operatorname{Map}(X, Y)$.

а. Докажите, что f_i сходится к f в C_0 титтк[1] $\lim_i \sup_{x \in X} d(f_i(x), f(x)) = 0$

б. Докажите, что f_i сходится к f поточечно титтк для каждого $x \in X$, имеем $\lim_i f_i(x) = f(x)$.

Задача 9.19. Докажите, что в C^0 предел последовательности непрерывных отображений непрерывен, а предел C-липшицевых C-липшицев.

Задача 9.20. Докажите, что в слабой топологии, предел последовательности непрерывных отображений не всегда непрерывен, а предел C-липшицевых все же C-липшицев.

[1] Тогда и только тогда, когда

Задача 9.21 (!). Пусть X счетно, а Y компактно. Докажите, что $\operatorname{Map}(X,Y)$ компактно в топологии поточечной сходимости.

Замечание 9.2. Это утверждение - весьма слабая форма **теоремы Тихонова,** которая говорит, что $\operatorname{Map}(X,Y)$ компактно в топологии поточечной сходимости для любого X и любого компактного Y.

Задача 9.22. Пусть $X_0 \subset X$ – счетное, полное подмножество, Y компактен, а $\{f_i \in \operatorname{Map}(X,Y)\}$ – последовательность C-липшицевых отображений, где Y компактен. Предположим, что $f_i\big|_{X\,0}$ поточечно сходится. Докажите, что f_i сходится в C^0-топологии, и предел $\{f_i\}$ тоже C-липшицев.

Определение 9.9. Метрическое пространство **сепарабельно**, если оно содержит всюду плотное, счетное множество.

Задача 9.23 (!). (теорема Арцела-Асколи для липшицевых отображений) Пусть X сепарабельное, а Y компактное метрическое пространство, а $L_C(X,Y) \subset \operatorname{Map}(X,Y)$ – пространство C-липшицевых отображений.

а. Докажите, что $L_C(X,Y)$ компактно в топологии поточечной сходимости.

б. Докажите, что $L_C(X,Y)$ компактно в топологии равномерной сходимости.

Определение 9.10. **C-квазигеодезическая метрика** на отрезке [0,1] есть метрика d, которая удовлетворяет $|x-y| \leqslant d(x,y) \leqslant C|x-y|$.

Задача 9.24. Рассмотрим C-квазигеодезическую метрику на [0,1] как отображение $[0,1]\times[0,1] \xrightarrow{d} \mathbb{R}$. Докажите, что $d(x,y)$ C-липшицева.

Определение 9.11. Рассмотрим пространство метрик на Z как метрическое пространство с метрикой
$$d(d_1,d_2) := \sup_{(x,y)\in Z^2} |d_1(x,y) - d_2(x,y)|.$$

Задача 9.25. Докажите, что предел C-квазигеодических метрик – C-квазигеодическая метрика.

Задача 9.26 (!). Докажите, что пространство C-квазигеодических метрик компактно.

Указание. Воспользуйтесь теоремой Арцела-Асколи.

9.3. Квазигеодезические и лемма Морса

Определение 9.12. **C-квазигеодезическая** в метрическом пространстве M есть отображение $\gamma:\ [0,a] \longrightarrow M$, которое удовлетворяет $d(x,y) \leqslant C|x-y|$

Замечание 9.3. "Лемма Морса"[2] (в классической формулировке) есть утверждение о геометрии плоскости (или пространства) Лобачевского H. Для каждого $C>1$ найдется R такое, что любая C-квазигеодезическая, соединяющая a и b, лежит в R-окрестности отрезка $[a,b]$.

[2]В топологии есть и другая лемма Морса. Эти две “леммы Морса” не имеют отношения друг к другу.

Задача 9.27. Пусть $\gamma: [0,a] \longrightarrow M$ – квазигеодезическая, соединяющая a и b.

а. Докажите, что метрика на отрезке $[0,1]$ $d(x,y) := \frac{|\gamma(ax),\gamma(ay)|}{a}$ является C-квазигеодезической.

б. Предположим, что к тому же δ-гиперболично. Докажите, что $([0,1],d)$ δ/a-гиперболично.

Определение 9.13. Пусть $\gamma_i: [0,a_i] \longrightarrow M$ – последовательность C-квазигеодезических. **Предельная метрика** есть (любой из) пределов последовательности $d(x,y) := \frac{|\gamma_i(a_i x),\gamma_i(a_i y)|}{a_i}$ в смысле Определения 9.11.

Задача 9.28 (!). Пусть $\gamma_i: [0,a_i] \longrightarrow M$ – последовательность C-квазигеодезических, причем $\lim_i a_i = \infty$, а $([0,1],d)$ – соответствующая предельная метрика. Докажите, что пространство $([0,1],d)$ 0-гиперболично.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 9.29. Пусть X – 0-гиперболическое пространство, которое геодезично а $[0,1]: \xrightarrow{\gamma} X$ – C-квазигеодезическая. Докажите, что γ инъективно и осуществляет гомеоморфизм отрезка $[0,1]$ на его образ.

Указание. Убедитесь, что X – дерево, и воспользуйтесь этим.

Задача 9.30 (!). Пусть X – 0-гиперболическое пространство, не обязательно геодезическое, а $[0,1]: \xrightarrow{\gamma} X$ – C-квазигеодезическая. Докажите, что γ инъективно и осуществляет гомеоморфизм отрезка $[0,1]$ на его образ.

Указание. Вложите X в его аппроксимационное дерево X_{tr}, и примените предыдущую задачу.

Определение 9.14. Пусть γ – C-квазигеодезическая в геодезическом пространстве, а $R(\gamma)$ есть максимум расстояния от точек γ до любой из кратчайших, соединяющих концы γ. Лемма Морсе утверждает, что $R(\gamma)$ ограничено константой, которая зависит только от M и C, для любой C-квазигеодезической в гиперболическом пространстве.

Задача 9.31 (!). Пусть $\gamma_i: [0,a_i] \longrightarrow M$ – последовательность C-квазигеодезических в гиперболическом пространстве, причем $\lim_i a_i = \infty$, Обозначим за X_i объединение образа γ_i и отрезка, соединяющего концы γ_i. Рассмотрим метрику d_i на графе-«двуугольнике» $\triangle$ из двух вершин и двух ребер, полученную из $d\Big|_{X_i}$ делением на a_i.

а. Докажите, что у d_i есть подпоследовательность, равномерно сходящаяся к какой-то полуметрике $\tilde{d}$ в смысле Определения 9.11.

б. Докажите, что в полуметрическом пространстве $(\triangle,\tilde{d})$ выполнено 0-неравенство Громова.

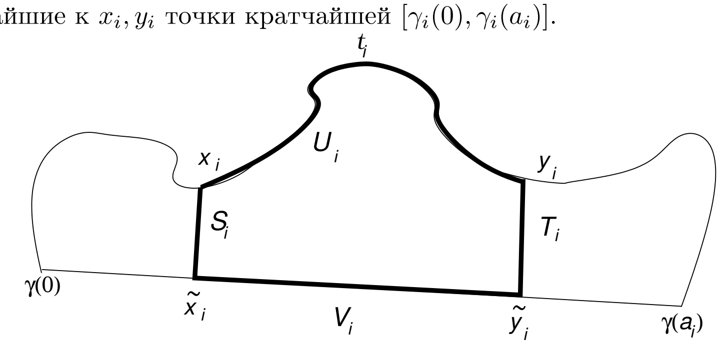
в. Докажите, что $\lim_i \frac{R(\gamma_i)}{a_i} = 0$.

Указание. Сходимость d_i доказывается так же, как аналогичное условие для геодезических, а $\lim_i \frac{R(\gamma_i)}{a_i} = 0$ следует из того, что $\triangle$ – дерево (докажите это).

Задача 9.32. Пусть $\gamma: [0,a] \longrightarrow M$ – квазигеодезическая. Докажите, что существует точка $t \in [0,a]$, где реализуется максимум расстояния между $\gamma(t)$ и отрезком кратчайшей, соединяющим концы γ.

Замечание 9.4. Предыдущая задача нетривиальна, ибо отрезков кратчайшей может быть бесконечно много.

Задача 9.33 (!). Пусть $\gamma_i : [0, a_i] \longrightarrow M$ – последовательность C-квазигеодезических в гиперболическом пространстве, причем $\lim_i a_i = \infty$ и $\lim_i R(\gamma_i) = \infty$, но $R(\gamma_i) < \frac{a_i}{2C}$. Обозначим за $t_i \in [0, a_i]$ точку, где реализуется максимум расстояния между $\gamma(t_i)$ и отрезком кратчайшей, соединяющим концы γ_i. Возьмем точки x_i, y_i на $\gamma_i([0, a_i])$, такие что $d(x_i, y_i) = R(\gamma_i)$, а t лежит в отрезке γ_i, соединяющим x_i, y_i. Рассмотрим четырехугольник Π_i, с одной криволинейной стороной, представляющей из себя отрезок γ_i от x_i до y_i, три другие стороны которого – отрезки геодезических $[x_i, \tilde{x}_i]$, $[\tilde{x}_i, \tilde{y}_i]$, $[\tilde{y}_i, y_i]$, где $\tilde{x}_i, \tilde{y}_i$ – ближайшие к x_i, y_i точки кратчайшей $[\gamma_i(0), \gamma_i(a_i)]$.



Как и двуугольник $\triangle \cong X_i$ двумя задачами выше, четырехугольник Π_i естественно отождествляется с графом $\square$, у которого 4 стороны и 4 вершины, соединенные последовательно. Обозначим за d_i метрику на $\square$, индуцированную из $(\Pi_i, \frac{d}{R(\gamma_i)})$.

а. Докажите, что точки x_i, y_i можно выбрать вышеописанным образом.

б. Докажите, что одна из сторон $(\square, d_i)$ есть C-квазигеодезическая, расстояние между концов которой равно 1, две прилежащие к ней стороны имеют длину $\leqslant 1$, а противолежащая сторона – геодезическая, которая не длиннее $C + 2$.

в. Докажите, что у $\{d_i\}$ есть подпоследовательность, которая равномерно сходится к полуметрике $\tilde{d}$ на $\square$, в смысле Определения 9.11.

г. Докажите, что $\tilde{d}$ гиперболична.

д. Обозначим за $U \subset (\square, \tilde{d})$ предел криволинейной стороны $U_i \in \Pi_i$, V – предел противолежащей ей стороны V_i, а S, T – оставшиеся две стороны. Докажите, что $|U| = 1$, $|V| \leqslant 3$, $|S|, |T| \leqslant 1$, а $\square, \tilde{d}$ – дерево.

е. Выведите из этого, что $U \subset V$.

ж. Придите к противоречию с тем, что $\sup_{x \in V_i} d_i(x, U_i) = 1$.

Задача 9.34 (!). (Лемма Морса) Пусть M – гиперболическое геодезическое пространство, а $C > 0$. Докажите, что существует $R > 0$ такое, что каждая C-квазигеодезическая лежит в R-окрестности любой кратчайшей, соединяющей ее концы.

Указание. Если такого R не существует, можно найти последовательность C-квазигеодезических $\gamma_i : [0, a_i] \longrightarrow M$ такую, что $R(\gamma_i) \longrightarrow \infty$. Если при этом $\lim \frac{R(\gamma_i)}{t_i} = 0$, воспользуйтесь предыдущей задачей, в противном случае воспользуйтесь задачей 9.31.

Замечание 9.5. Существует доказательство леммы Морса для δ-геодезических пространств, где оценка ма R получается как функция от C и δ (в доказательстве из этого листочка, R зависит от C и от пространства M).