Метрическая геометрия: функционал длины

Миша Вербицкий

15 февраля, 2016

НМУ

Топологические пространства (предполагается известным).

Феликс Хаусдорф, "Grundzüge der Mengenlehre", 1914

Определение: Пусть M - множество, а $\mathcal{U} \subset 2^M$ набор подмножеств, называемых **открытыми**. Тогда $\mathcal{U}$ **задает топологию** на M, если

- **Любое объединение открытых подмножеств открыто**
- **Конечное пересечение открытых подмножеств открыто**
- M **и пустое множество** $\emptyset$ **открыты.**

Такое M называется **топологическим пространством**.

Определение: **Замкнутым множеством** называется множество, дополнение которого открыто.

Определение: **Базой топологии** на M называется набор $\mathcal{U} \subset 2^M$ подмножеств M, состоящий из открытых множеств, и такой, что любое открытое подмножество M получено из элементов $\mathcal{U}$ взятием объединений.

Простейшие понятия топологии (предполагается известным).

Определение: **Окрестностью** подмножества $Z \subset M$ называется любое открытое множество, содержащее Z. **Замыканием** подмножества $Z \subset M$ называется пересечение всех замкнутых подмножеств, содержащих Z.

Определение: Отображение $\varphi: M \to N$ называется **непрерывным**, если прообраз любого открытого множества открыт.

Определение: **Пределом** $\{x_i\}$ называется такая точка $x \in M$, что в любой окрестности x содержатся почти все элементы $\{x_i\}$.

Определение: Топологическое пространство M называется **отделимым**, или **хаусдорфовым**, если любые две точки $x \neq y \in M$ имеют непересекающиеся окрестности $U \ni x, V \ni y$.

ЗАМЕЧАНИЕ: В дальнейшем, все топологические пространства **по умолчанию предполагаются хаусдорфовыми**.

Связные топологические пространства.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M – топологическое пространство, а $A \subset M$ – его подмножество, которое открыто и замкнуто. Тогда A называется **открыто-замкнутым** (clopen).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Топологическое пространство M называется **связным** (connected), если верно одно из равносильных условий
1. M **не содержит открыто-замкнутых подмножеств, кроме** M **и** $\emptyset$**.**
2. M **не может быть разбит в объединение двух непересекающихся, непустых, открытых подмножеств.**

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что любое **связное подмножество отрезка** $[0,1]$ **– это отрезок, интервал или полуинтервал.**

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что **замыкание** $\bar{Z}$ **связного подмножества** $Z \subset M$ **всегда связно.**

УПРАЖНЕНИЕ: Пусть X связно, а $f: X \to Y$ – непрерывное отображение. **Докажите, что** $f(X)$ **тоже связно.**

СЛЕДСТВИЕ: Если $f: X \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция на связном множестве то, $f(X)$ **это отрезок, интервал или полуинтервал.**

Линейно связные топологические пространства.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Путем** в топологическом пространстве M называется непрерывное отображение $[a,b] \stackrel{\varphi}{\to} M$. В этом случае говорится, что путь φ **соединяет точки** $\varphi(a)$ **и** $\varphi(b)$. M называется **линейно связным**, если любые две точки M можно соединить путем $[a,b] \stackrel{\varphi}{\to} M$.

ЗАМЕЧАНИЕ: **Из линейной связности следует связность.** Действительно, отрезок $[0,1]$ связен, образ связного множества связен, объединение пересекающихся связных множеств связно.

УПРАЖНЕНИЕ: Постройте топологическое пространство, которое **связно, но не линейно связно.**

УПРАЖНЕНИЕ: (весьма трудное) **Постройте хаусдорфово топологическое пространство M, которое связно и счетно.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Такое пространство не линейно связно; более того, любое отображение из отрезка в M постоянно **(докажите это)**.

Локально линейно связные топологические пространства.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Топологическое пространство M называется **локально связным (локально линейно связным),** если каждая окрестность точки $x \in M$ содержит связную (линейно связную) окрестность x.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Компонента связности (линейной связности)** точки x в топологическом пространстве есть объединение всех связных (линейно связных) подмножеств, содержащих x.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть X, Y – топологические пространства. **Несвязное объединение** $X \coprod Y$ есть объединение непересекающихся множеств, отождествляемых с X и Y, с базой топологии, которая состоит из открытых множеств X и Y.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Каждое локально связное (локально линейно связное) пространство **является несвязным объединением своих компонент связности (линейной связности).**

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите это.

Метрические пространства.

Определение: Пусть M - множество. **Метрикой** на M называется функция $d: \ M\times M \to \mathbb{R}^{\geqslant 0}\cup\infty$, удовлетворяющая следующим условиям
* **[Невырожденность:]** $d(x,y)=0$ тогда и только тогда, когда $x=y$.
* **[Симметричность:]** $d(x,y)=d(y,x)$
* **[Неравенство треугольника:]** $d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$
для любых точек $x,y,z\in M$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Если $x\in X$ – точка, а ε – вещественное число, множество $B_\varepsilon(x)=\{y\in X \ \ | \ \ d(x,y)<\varepsilon$ называется **(открытый) шар радиуса ε с центром в x**, или **ε-шар**. **Замкнутый шар** это $\overline{B}_\varepsilon(x)=\{y\in X \ \ | \ \ d(x,y)\leqslant\varepsilon\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Открытое множество** в метрическом пространстве M есть объединение открытых шаров.

УПРАЖНЕНИЕ: **Докажите, что это задает топологию на M.**

Допустимые пути.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M – топологическое пространство. Говорится, что на M **задан класс допустимых путей**, если задано множество путей $[a,b] \to M$ такое, что

1. Для любых двух путей $[a,b] \stackrel{\gamma_1}{\to} M$ и $[b,c] \stackrel{\gamma_2}{\to} M$, удовлетворяющих $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$, путь $\gamma : [a,c] \to M$, равный γ_1 на $[a,b]$ и γ_2 на $[b,c]$, тоже допустим. Такая операция называется **"склейка путей".**

2. **(замена параметра)** Если $\varphi : [a,b] \to [c,d]$ – линейное отображение, а путь $\gamma : [c,d] \to M$ допустим, путь $\varphi \circ \gamma$ тоже допустим.

3. **Ограничение:** Для каждого пути $[a,b] \stackrel{\gamma}{\to} M$, и отрезка $[c,d] \subset [a,b]$, ограничение $\gamma|_{[c,d]}$ – тоже допустимый путь.

Допустимые пути (примеры).

ПРИМЕР: **Кусочно-линейные пути** (ломаные) в $\mathbb{R}^n$ образуют допустимый класс путей.

ПРИМЕР: **Кусочно-полиномиальный путь** получен склейкой конечного числа путей $\gamma_i : [x_i, x_{i+1}]$, заданных полиномиальными отображениями. **Кусочно-полиномиальные пути в $\mathbb{R}^n$ образуют допустимый класс путей.**

ПРИМЕР: **Кусочно-гладкий путь** получен склейкой конечного числа путей $\gamma_i : [x_i, x_{i+1}]$, заданных гладкими отображениями. **Кусочно-гладкие пути в $\mathbb{R}^n$ образуют допустимый класс путей.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **C-Липшицево отображение** есть отображение метрических пространств $\varphi : M \to M'$, удовлетворяющее $Cd(x,y) \geqslant d(\varphi(x), \varphi(y))$. **Липшицево отображение** есть C-липшицево с какой-то константой C.

ПРИМЕР: **Липшицевы пути** образуют допустимый класс.

Функционал длины.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M – топологическое пространство, снабженное допустимым классом путей. Функционал $L(\gamma)$, отображающий допустимые пути в числа, называется **функционалом длины**, если он удовлетворяет следующим условиям.

1. **(аддитивность длины)** Для любого пути $\gamma: [a,c] \to M$, и любого $b \in [a,c]$, $L(\gamma) = L(\gamma|_{[a,b]}) + L(\gamma|_{[b,c]})$, где $\gamma|_{[c,d]}$ обозначает **ограничение пути,** то есть функции $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}$ на отрезок $[c,d] \subset [a,b]$.

2. **(непрерывность длины пути как функции от координат концов)** Для любого пути $\gamma: [a,c] \to M$, **функция** $L(\gamma|_{[a,b]})$ **непрерывно зависит от** $b \in [a,c]$**.**

3. **Замена параметра:** Если $\varphi: [a,b] \to [c,d]$ – гомеоморфизм отрезков, а $\gamma: [c,d] \to M$ и $\varphi \circ \gamma: [a,b] \to M$ – допустимые пути, то $L(\gamma) = L(\varphi \circ \gamma)$.

4. **(длина пути согласована с топологией)** Пусть Z – замкнутое подмножество M, а $x \notin Z$ точка, не лежащая на Z. Тогда **существует число** $\varepsilon > 0$ **такое, что любой путь, соединяющий** x **с какой-то точкой** Z**, имеет длину** $\geqslant \varepsilon$**.**

Метрика, построенная по функционалу длины.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M – топологическое пространство, снабженное классом допустимых путей и функционалом длины. **Метрика путей**, или же **внутренняя метрика, $d_L: M\times M \to \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ построенная по функционалу L,** определяется как $d_L(x,y) := \inf_\gamma L(\gamma)$, где инфимум берется по всем путям, соединяющим x и y.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Это метрика.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Симметричность d_L следует из замены параметра $t \to (b-t)+a$ в пути $\gamma: [a,b] \to M$ (из пути, соединяющего a и b, получаем путь, соединяющий b и a, той же длины).

Положительность $d_L(x,y)$, $x \neq y$ следует из условия 4, примененного к $Z = y$. В самом деле, существует такое $\varepsilon > 0$, что любой путь, соединяющий x и Z, имеет длину $\geqslant \varepsilon$.

Неравенство треугольника доказывается через склейку путей. Пусть γ_1 – путь, соединяющий x и y, длины $d_L(x,y)+\varepsilon$, а γ_2 – путь, соединяющий y и z, длины $d_L(y,z)+\varepsilon$. Склеив γ_1 и γ_2, получим путь γ, соединяющий x и z, длины $d_L(x,y)+d_L(y,z)+2\varepsilon$, что дает $d_L(x,y)+d_L(y,z) \geqslant d_L(x,z)+2\varepsilon$.
■

Примеры функционала длины.

ПРИМЕР: $M = \mathbb{R}^n$ с обычной топологией, класс допустимых путей - кусочно-линейные пути (то есть ломаные), со звеньями $[x_i, x_{i+1}]$, а длина пути определяется формулой $L(\gamma) = \sum |d(x_i, x_{i+1})|$ **("длина ломаной").**

УТВЕРЖДЕНИЕ: Построенная по этому функционалу метрика d_L равна обычной метрике.

Действительно, **самая короткая ломаная, соединяющая две точки – это отрезок прямой.**

ПРИМЕР: "переход болота" (конформно плоская метрика): $M = \mathbb{R}^n$, класс допустимых путей - кусочно-линейные пути (то есть ломаные), со звеньями $[x_i, x_{i+1}]$, $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{>0}$ непрерывная, положительная функция, а длина пути определяется формулой

$$L(\gamma) = \sum \int_{[x_i, x_{i+1}]} f$$

(интеграл от f по отрезку $[x_i, x_{i+1}]$).

УПРАЖНЕНИЕ: Проверьте, что это функционал длины.

Финслерова метрика.

ПРИМЕР: Длина кусочно-гладкого пути $\gamma: [a,b]\to\mathbb{R}^n$ с евклидовой метрикой вычисляется по формуле $L(\gamma(t)) := \int_a^b |\gamma'(t)|dt$

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что это функционал длины, и **соответствующая метрика L_d – обычная, плоская.**

ПРИМЕР: "Финслерова метрика" Пусть $U\subset\mathbb{R}^n$ открытое подмножество, а $\nu_x: Tx\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ – норма на касательном пространстве, непрерывно зависящая от x. Для кусочно-гладкого пути $\gamma: [a,b]\to U$, определим

$$L_\nu(\gamma(t)) := \int_a^b \nu_{\gamma(t)}(\gamma'(t))dt$$

УТВЕРЖДЕНИЕ: Это функционал длины.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Аддитивность и **непрерывность** L очевидны.

Чтобы доказать согласованность с топологией, выберем такую константу δ, что $\nu_x(v)\geqslant\delta|v|$ в замкнутом $V\ni x$, не пересекающем Z. **Тогда каждый путь γ, соединяющий x и границу ∂V, удовлетворяет $L_\nu(\gamma)\geqslant\delta L(\gamma)$,** где L – длина γ в евклидовой метрике. Но $L(\gamma)\geqslant d(x,\partial V)$, а это число положительно, так как ∂V замкнуто.

Финслерова метрика и риманова метрика.

Инвариантность L_ν при репараметризации следует из формулы

$$L_\nu(\varphi\circ\gamma)=\int_a^b \nu_{\gamma(\varphi(t))}(\varphi\circ\gamma)'(t)dt=$$
$$=\int_a^b \nu_{\gamma(\varphi(t))}(\varphi'(t)\gamma'(\varphi(t))dt=\int_a^b \varphi'(t)\nu_{\gamma(\varphi(t))}(\gamma'(\varphi(t))dt=$$
$$=\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \nu_{\gamma(\varphi(t))}(\gamma'(\varphi(t))d\varphi(t)=L_\nu(\gamma)$$

■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Финслерова метрика на U определяется как внутренняя метрика, определенная функционалом длины L_ν.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $U\subset\mathbb{R}^n$ – открытое подмножество, а норма $\nu_x:\ T_x\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ задается формулой $\nu_x(v)=\sqrt{g_x(v,v)}$, где $g_x\in\operatorname{Sym}^2 T_x^*\mathbb{R}^n$ – положительно определенное скалярное произведение, заданное гладким отображением $U\to\operatorname{Sym}^2\mathbb{R}^n=\operatorname{Sym}^2 T_x^*\mathbb{R}^n$. В такой ситуации g_x называется **римановой формой** на U, а соответствующая метрика оутей **римановой метрикой** на U.

Спрямляемые пути.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (M,d) – метрическое пространство, а $\gamma: [a,b] \to M$ – путь. Рассмотрим разбиение отрезка $[a,b] = [a,{}_1] \cup [x_1,x_2] \cup ... \cup [x_{n-1},b]$. Обозначим $x_0 := a, x_n := b$. Положим $L_\gamma(x_1,...x_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} d(x_i,x_{i+1})$. Определим **длину пути** γ формулой

$$L_d(\gamma) := \sup_{a<x_1<...<x_{n-1}<b} L_\gamma(x_1,...x_{n-1}).$$

где супремум берется по всем разбиениям отрезка. Путь γ называется **спрямляемым**, если $L_d(\gamma) < \infty$.

ПРИМЕР: Любой липшицев путь – спрямляемый **(докажите это).**

ЗАМЕЧАНИЕ: Любой кусочно гладкий путь – липшицев **(докажите это).**

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть M – произвольное метрическое пространство. **Тогда спрямляемые пути образуют допустимый класс, а L_d является функционалом длины.**

УПРАЖНЕНИЕ: **Докажите это.**

Внутренняя метрика.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (M,d) – метрическое пространство, а L_d – функционал длины на спрямляемых путях. Обозначим соответствующую внутреннюю метрику d_{L_d} за $\hat{d}$. Она называется **внутренней метрикой, индуцированной d.**

ТЕОРЕМА: Для любого метрического пространства, $\hat{\hat{d}} = \hat{d}$.

Доказательство. Шаг 1: Длина пути, соединяющего x и y, не меньше, чем $d(x,y)$, в силу неравенства треугольника. Поэтому $\hat{d} \geqslant d$.

Шаг 2: Поскольку $\hat{d} \geqslant d$, имеем $L_d(\gamma) \leqslant L_{\hat{d}}(\gamma)$ **для любого пути.**

Шаг 3: Пусть $\gamma : [a,b] \to M$ – спрямляемый путь. Выберем такое разбиение отрезка $[a,b]$, что $L_{\hat{d}}(\gamma) - \sum \hat{d}(\gamma(x_i), \gamma(x_{i+1})) < \varepsilon$. Тогда

$$L_{\hat{d}}(\gamma) - \varepsilon \leqslant \sum_i \hat{d}\left(\gamma\big|_{[x_i,x_{i+1}]}\right) \leqslant \sum_i L_d\left(\gamma\big|_{[x_i,x_{i+1}]}\right) = L_d(\gamma).$$

Устремляя ε к нулю, получаем $L_{\hat{d}}(\gamma) \leqslant L_d(\gamma)$. ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Метрика d на M называется **внутренней**, если $\hat{d} = d$.

Внутренние метрики и функционалы длины

ТЕОРЕМА: Пусть (M, d) – пространство с метрикой путей, построенной по функционалу длины L. **Тогда d внутренняя.**

Доказательство. Шаг 1: Для каждого допустимого пути γ, соединяющего a и b в M, имеем $d(a,b) \leqslant L(\gamma)$. С другой стороны, $L_d(\gamma)$ есть супремум $\sum_i d(\gamma(x_i), \gamma(x_{i+1}))$ по всем разбиениям пути. Значит, для каждого $\varepsilon > 0$ найдется разбиение пути γ такое, что

$$L_d(\gamma) \leqslant \sum_i d(\gamma(x_i), \gamma(x_{i+1})) + \varepsilon \leqslant \sum_i L(\gamma_{[x_i, x_{i+1}]}) + \varepsilon = L(\gamma) + \varepsilon$$

Это дает $L_d(\gamma) \leqslant L(\gamma)$, то есть $\hat{d} \leqslant d$.

Шаг 2: По определению, $\hat{d}(x,y)$ есть инфимум L_d-длин всех спрямляемых путей, соединяющих x и y. Значит, для любого заданного $\varepsilon > 0$. найдется спрямляемый путь γ, соединяющий x и y, и его разбиение $\gamma = \bigcup \gamma_{[x_i, x_{i+1}]}$ такое, что

$$\hat{d}(x,y) \geqslant L_d(\gamma) - \varepsilon \geqslant \sum_i d(\gamma(x_i), \gamma(x_{i+1})) - 2\varepsilon \geqslant d(x,y) - 2\varepsilon.$$

Устремляя ε к нулю, получаем $\hat{d} \geqslant d$. ■

Условие Хопфа-Ринова

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Метрика d на M **удовлетворяет условию Хопфа-Ринова** если для любого $\delta > 0, N \in \mathbb{Z}^{>0}$ и любых точек $x_0, x_N \in M$, $d(x_0, x_N) = a$, найдутся точки $x_1, ..., x_{N-2} \in M$ такие, что $d(x_i, x_{i+1}) \leqslant \frac{A}{N} + \delta$.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что **внутренняя метрика удовлетворяет условию Хопфа-Ринова**.

На следующей лекции мы докажем такую теорему

ТЕОРЕМА: Пусть (M, d) – полное метрическое пространство, удовлетворяющее условию Хопфа-Ринова. **Тогда d – внутренняя метрика.**

Упражнения

УПРАЖНЕНИЕ: Пусть $S^2 \supset \mathbb{R}^3$ – подмножество $\mathbb{R}^3$ с плоской метрикой d. Ограничим d на S^2. **Докажите, что полученная метрика не внутренняя.**

УПРАЖНЕНИЕ: В этой же ситуации, рассмотрим соответствующую метрику $\hat{d}$. **Докажите, что $\hat{d}(x, y)$ равна углу дуги большого круга, проходящего через x, y.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Кратчайшей** называется путь γ, соединяющий x и y, такой, что $L(\gamma) = d(x, y)$.

ПРИМЕР: На сфере S^2 с внутренней метрикой, построенной выше, кратчайшие суть дуги большого круга длины $\leqslant \pi$ **(докажите это).**

УПРАЖНЕНИЕ: Пусть M – компактное метрическое пространство с внутренней метрикой. **Докажите, что любые две точки можно соединить кратчайшей.**

Локальные метрики

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть $\mathcal{S}$ – семейство метрик на множестве M, а $d_{\mathcal{S}}(x,y) := \sup d_\alpha \in \mathcal{S} d_\alpha(x,y)$ – супремум всех метрик в $\mathcal{S}$. **Тогда $d_{\mathcal{S}}$ – тоже метрика.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Две из трех аксиом (симметричность, рефлексивность) очевидны. Неравенство треугольника следует из того, что **супремум суммы не превосходит сумму супремумов.** ∎

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (M,d) – метрическое пространство, $\{U_i\}$ – открытое покрытие M, то есть набор открытых множеств $U_i \subset M$ такой, что $M = \bigcup U_i$, а $\mathcal{S}_{\{U_i\}}$ – множество всех метрик d' на M таких, что $d'\big|_{U_i} \leqslant d\big|_{U_i}$ для каждого элемента покрытия. Обозначим за $d(\{U_i\})$ супремум метрик в семействе $\mathcal{S}_{\{U_i\}}$. Метрика d называется **локальной**, если $d(\{U_i\}) = d$ для любого покрытия $\{U_i\}$.

Внутренние метрики локальны

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (M, d) – метрическое пространство, $\{U_i\}$ – открытое покрытие M, то есть набор открытых множеств $U_i \subset M$ такой, что $M = \bigcup U_i$, а $\mathcal{S}_{\{U_i\}}$ – множество всех метрик d' на M таких, что $d'\big|_{U_i} \leqslant d\big|_{U_i}$ для каждого элемента покрытия. Обозначим за $d(\{U_i\})$ супремум метрик в семействе $\mathcal{S}_{\{U_i\}}$. Метрика d называется **локальной**, если $d(\{U_i\}) = d$ для любого покрытия $\{U_i\}$.

ТЕОРЕМА: Внутренняя метрика всегда локальна.

Доказательство. Шаг 1: Зафиксируем покрытие $\{U_i\}$. Пусть γ – спрямляемый путь на M. Выберем разбиение γ в отрезки $\gamma([x_l, x_{l+1}])$ таким образом, что каждый из отрезков лежит в своем U_i. Тогда

$$L_{d(\{U_i\})}(\gamma([x_l, x_{l+1}])) \leqslant L_d(\gamma([x_l, x_{l+1}])).$$

Значит, функционал длины в метрике $d(\{U_i\})$ не больше, чем L_d.

Шаг 2: Возьмем путь γ, соединяющий x и y, и такой, что $L_d(\gamma) \leqslant d(x, y) - \varepsilon$. Такой путь существует, потому что d внутренняя. Тогда

$$d(\{U_i\})(x, y) \leqslant L_{d(\{U_i\})}(\gamma) \leqslant L_d(\gamma) \leqslant d(x, y) - \varepsilon.$$

Устремляя ε к 0, получаем $d(\{U_i\}) \leqslant d$. **Значит, метрика $d \in \mathcal{S}_{\{U_i\}}$ равна супремуму всех метрик в $\mathcal{S}_{\{U_i\}}$.** ■