Метрическая геометрия 3: теорема Хопфа-Ринова и кратчайшие

Миша Вербицкий

23 февраля, 2016

НМУ

Внутренняя метрика (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (M,d) – метрическое пространство, а $\gamma: [a,b] \to M$ – путь. Рассмотрим разбиение отрезка $[a,b] = [a,{}_1] \cup [x_1,x_2] \cup ... \cup [x_{n-1},b]$. Обозначим $x_0 := a, x_n := b$. Положим $L_\gamma(x_1,...x_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} d(x_i,x_{i+1})$. Определим **длину пути** γ формулой

$$L_d(\gamma) := \sup_{a<x_1<...<x_{n-1}<b} L_\gamma(x_1,...x_{n-1}).$$

где супремум берется по всем разбиениям отрезка. Путь γ называется **спрямляемым**, если $L_d(\gamma) < \infty$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (M,d) – метрическое пространство, а $\hat{d}(x,y)$ равно инфимуму длин путей, соединяющих x и y. Она называется **внутренней метрикой, индуцированной d.**

ТЕОРЕМА: Для любого метрического пространства, $\hat{\hat{d}} = \hat{d}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Метрика d на M называется **внутренней**, если $\hat{d} = d$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Финслеровы и римановы метрики, построенные раньше, **являются внутренними**.

ε-середины

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Точка z называется **ε-серединой** пары (x,y), если $|d(x,z)-\frac{1}{2}d(x,y)|\leqslant\varepsilon$ и $|d(y,z)-\frac{1}{2}d(x,y)|\leqslant\varepsilon$. Говорится, что в (M,d) **существуют ε-середины**, если для любых x,y и любого $\varepsilon>0$, существует ε-середина.

УТВЕРЖДЕНИЕ: В любом пространстве с внутренней метрикой существуют ε-середины.

Доказательство. Шаг 1: Пусть γ – путь длины $d(x,y)+\varepsilon$, соединяющий x и y. В силу непрерывности функции $d(x,\gamma(t))$, принимающей значения от 0 до $d(x,y)$, **существует точка $z=\gamma(t_0)$ такая, что $d(x,z)=\frac{d(x,y)}{2}$.**

Шаг 2: $d(y,z)+d(z,y)\leqslant L_d(\gamma)=d(x,y)+\varepsilon$. **Значит, $d(y,z)\leqslant\frac{d(x,y)}{2}+\varepsilon$.** ■

ε-середины и двоично-рациональные дроби

Теорема 1: Пусть M – пространство, где существуют ε-середины, а $x_0, x_1 \in M$. **Тогда для любого $\lambda \in [0,1]$, найдется $x_\lambda \in M$ такая, что $|d(x_0, x_\lambda) - \lambda d(x_0, x_1)| \leqslant \varepsilon$ и $|d(x_1, x_\lambda) - (1-\lambda) d(x_0, x_1)| \leqslant \varepsilon$.**

Доказательство. Шаг 1: Пусть $\lambda = \frac{2n-1}{2^m}$, $0 < \lambda < 1$. Возьмем за $x_\lambda \in M$ $\frac{\varepsilon}{2^{m+1}}$-середину между $x_{\frac{n}{2^{m-1}}}$ и $x_{\frac{n-1}{2^{m-1}}}$. **Воспользовавшись индукцией по m, построим x_λ для каждого двоично-рационального числа $\lambda = \frac{2n-1}{2^m}$.**

Шаг 2: Пусть $P(\lambda)$ переводит $\lambda = \frac{2n-1}{2^m}$ в $\frac{n-1}{2^{m-1}}$. По построению,

$$|d(x_\lambda, x_{P(\lambda)}) - \frac{1}{2^m} d(x_0, x_1)| < \frac{\varepsilon}{2^{m+1}} d(x_0, x_1).$$

Суммируя ряд

$$d(x_\lambda, x_{P(\lambda)}) + d(x_{P(\lambda)}, x_{P(P(\lambda))}) + ...$$

получим число, которое отличается от $\lambda d(x_0, x_1)$ на $\sum_{i=0}^m \frac{\varepsilon}{2^{m+1}} \leqslant \varepsilon$. **Значит,**

$$d(x_0, x_\lambda) \leqslant d(x_\lambda, x_{P(\lambda)}) + d(x_{P(\lambda)}, x_{P(P(\lambda))}) + ... \leqslant \lambda d(x_0, x_1) + \varepsilon.$$

Аналогично, $d(x_1, x_\lambda) \leqslant (1-\lambda) d(x_0, x_1) + \varepsilon$.

ε-середины и двоично-рациональные дроби (продолжение)

Шаг 3: Уже доказано:

$$d(x_1, x_\lambda) \leqslant (1-\lambda)d(x_0, x_1) + \varepsilon \quad \text{и} \quad d(x_0, x_\lambda) \leqslant \lambda d(x_0, x_1) + \varepsilon.$$

Осталось доказать, что $d(x_1, x_\lambda) \geqslant \lambda d(x_0, x_1) - \varepsilon$ и $d(x_1, x_\lambda) \geqslant (1-\lambda)d(x_0, x_1) - \varepsilon$. Но если это неверно, имеем (например) $d(x_1, x_\lambda) \leqslant \lambda d(x_0, x_1) - \varepsilon$, что дает

$$d(x_1, x_\lambda) + d(x_1, x_\lambda) < \lambda d(x_0, x_1) - \varepsilon + (1-\lambda)d(x_0, x_1) + \varepsilon = d(x_0, x_1)$$

Противоречие с неравенством треугольника! ∎

СЛЕДСТВИЕ: ("Условие Хопфа-Ринова") Пусть M – метрическое пространство, в котором существуют ε-середины. **Тогда для любых $x, y \in M$, и $r \leqslant d(x,y)$, расстояние от шара $B_r(x)$ до y равно $d(x,y) - r$.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Выберем точку $z = z_\lambda$ такую, что $|d(x,z) - (r - \varepsilon)| < \varepsilon$ и $|d(y,z) - d(x,y) - r| < \varepsilon$. Тогда $z \in B_r(x)$ и $d(B_r(x), y) \leqslant d(y,z) \leqslant d(x,y) - r + \varepsilon$. ∎

ε-середины и внутренние метрики

ЗАМЕЧАНИЕ: Из шага 2 предыдущей теоремы следует, что отображение $\lambda \to x_\lambda$ **является $(1+\delta)$-липшицевым,** где $\delta = \varepsilon d(x,y)^{-1}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть X, Y – метрические пространства, а $\varphi: X \to Y$ – C-липшицево отображение. **Тогда φ продолжается до C-липшицева отображения пополнений $\bar{\varphi}: \bar{X} \to \bar{Y}$.**

ТЕОРЕМА: Пусть M – полное метрическое пространство, в котором существуют ε-середины. **Тогда метрика в M внутренняя**.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: В силу предыдущего утверждения, отображение $\lambda \to x_\lambda$, построенное в Теореме 1, продолжается до $d(x_0,x_1)(1+\varepsilon)$-липшицева отображения $[0,1] \xrightarrow{\gamma} M$, то есть пути, соединяющего x_0 и x_1. **Длина сего пути ограничена $d(x_0,x_1)(1+\varepsilon)$ в силу липшицевости.** ■

СЛЕДСТВИЕ: **Существование ε-середин в M равносильно тому, что метрика в его пополнении M_1 внутренняя.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Если в M есть ε-середины, то и в M_1 есть ε-середины **(докажите это)**. Поэтому для любого ε существуют $(1+\varepsilon)$-липшицевы пути $\gamma: [0, d(x,y)] \to M_1$, соединяющие x и y. Значит, $\hat{d}(x,y) < d(x,y)(1+\varepsilon)$. ■

Локальные метрики

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть $\mathcal{S}$ – семейство метрик на множестве M, а $d_{\mathcal{S}}(x,y) := \sup\limits_{d_\alpha \in \mathcal{S}} d_\alpha(x,y)$ – супремум всех метрик в $\mathcal{S}$. **Тогда $d_{\mathcal{S}}$ – тоже метрика.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Две из трех аксиом (симметричность, рефлексивность) очевидны. Неравенство треугольника следует из того, что **супремум суммы не превосходит сумму супремумов.** ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (M,d) – метрическое пространство, $\{U_i\}$ – открытое покрытие M, то есть набор открытых множеств $U_i \subset M$ такой, что $M = \bigcup U_i$, а $\mathcal{S}_{\{U_i\}}$ – множество всех метрик d' на M таких, что $d'\big|_{U_i} \leqslant d\big|_{U_i}$ для каждого элемента покрытия. Обозначим за $d(\{U_i\})$ супремум метрик в семействе $\mathcal{S}_{\{U_i\}}$. Метрика d называется **локальной**, если $d(\{U_i\}) = d$ для любого покрытия $\{U_i\}$.

Внутренние метрики локальны

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (M,d) – метрическое пространство, $\{U_i\}$ – открытое покрытие M, то есть набор открытых множеств $U_i \subset M$ такой, что $M = \bigcup U_i$, а $\mathcal{S}_{\{U_i\}}$ – множество всех метрик d' на M таких, что $d'\big|_{U_i} \leqslant d\big|_{U_i}$ для каждого элемента покрытия. Обозначим за $d(\{U_i\})$ супремум метрик в семействе $\mathcal{S}_{\{U_i\}}$. Метрика d называется **локальной**, если $d(\{U_i\}) = d$ для любого покрытия $\{U_i\}$.

ТЕОРЕМА: Внутренняя метрика всегда локальна.

Доказательство. Шаг 1: Зафиксируем покрытие $\{U_i\}$. Пусть γ – спрямляемый путь на M. Выберем разбиение γ в отрезки $\gamma([x_l, x_{l+1}])$ таким образом, что каждый из отрезков лежит в своем U_i. Тогда

$$L_{d(\{U_i\})}(\gamma([x_l, x_{l+1}])) \leqslant L_d(\gamma([x_l, x_{l+1}])).$$

Значит, функционал длины в метрике $d(\{U_i\})$ не больше, чем L_d.

Шаг 2: Возьмем путь γ, соединяющий x и y, и такой, что $L_d(\gamma) \leqslant d(x,y) - \varepsilon$. Такой путь существует, потому что d внутренняя. Тогда

$$d(\{U_i\})(x,y) \leqslant L_{d(\{U_i\})}(\gamma) \leqslant L_d(\gamma) \leqslant d(x,y) - \varepsilon.$$

Устремляя ε к 0, получаем $d(\{U_i\}) \leqslant d$. **Значит, метрика $d \in \mathcal{S}_{\{U_i\}}$ равна супремуму всех метрик в $\mathcal{S}_{\{U_i\}}$.** ■

Локальные метрики допускают ε-середины

Пусть (M,d) – метрическое пространство. Определим $d_\varepsilon(x,y)$ как инфимум $\sum d(x_i,x_{i+1})$ взятый по всем последовательностям точек $x_0 = x, x_1, ..., x_n = y$ таким, что $d(x_i,x_{i+1}) < \varepsilon$.

УПРАЖНЕНИЕ: Проверьте, что d_ε – **тоже метрика,** $d_\varepsilon \geqslant d$**, и она равна** d **на любом** $\varepsilon/2$**-шаре.**

СЛЕДСТВИЕ: Если d **локальна, то** $d_\varepsilon = d$ **для любого** $\varepsilon > 0$**.**

ЛЕММА: Для любых $x,y\in M$, **существует** $z \in M$ **такое, что** $d_\varepsilon(x,z) - 2\varepsilon < \frac{1}{2}d_\varepsilon(x,y)$ **и** $d_\varepsilon(y,z) - 2\varepsilon < \frac{1}{2}d_\varepsilon(x,y)$**.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Возьмем последовательность $x_0 = x, x_1, ..., x_n = y$ такую, что $d_\varepsilon(x,y) \geqslant \sum d(x_i,x_{i+1}) - \varepsilon$, и пусть z – такая точка из x_i, что $d_\varepsilon(x,x_i) \leqslant \frac{1}{2}\sum d(x_i,x_{i+1}) + \varepsilon$ и $d_\varepsilon(y,x_i) \leqslant \frac{1}{2}\sum d(x_i,x_{i+1}) + \varepsilon$. Такая точка всегда существует, потому что $d(x_i,x_{i+1}) < \varepsilon$. ■

СЛЕДСТВИЕ: Локальные метрики допускают ε**-середины.**

СЛЕДСТВИЕ: Полные локальные метрики – внутренние.

Локальная компактность

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **ε-сеть** в метрическом пространстве M есть такое множество $N \subset M$, что объединение ε-шаров с центрами в N равно M. Метрическое пространство называется **вполне ограниченным**, если для любого $\varepsilon > 0$ в M найдется конечная ε-сеть.

ТЕОРЕМА: Полное метрическое пространство компактно тогда и только тогда, когда оно вполне ограниченно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: См. в листочках. ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M – метрическое пространство. Говорят, что M **локально компактно**, если для любой точки $x \in M$ существует такое число $\varepsilon > 0$, что замкнутый шар $\overline{B}_\varepsilon(x)$ компактен.

Теорема Хопфа-Ринова

ТЕОРЕМА: Пусть M – полное, локально компактное пространство с внутренней метрикой. **Тогда каждый замкнутый шар в M компактен.**

Доказательство. Шаг 1: В ε-окрестности шара $\bar{B}_r(m)$ содержится шар $\bar{B}_{r+\varepsilon}(m)$ (следует из условия Хопфа-Ринова).

Шаг 2: Пусть $m \in M$ точка, такая, что шары $B_{r-\varepsilon}(m)$ вполне ограничены для любого $\varepsilon > 0$. **Тогда $B_r(m)$ тоже вполне ограниченно.** Действительно, $\frac{1}{2}\varepsilon$-сеть в $B_{r-\frac{1}{2}\varepsilon}(m)$ будет ε-сетью в $B_r(m)$, в силу предыдущего шага.

Шаг 3: Определим функцию на метрическом пространстве $\rho(m) := \sup_r\{r \in \mathbb{R} \mid \bar{B}_r(m)$ компактен $\}$. **Тогда ρ 1-липшицева**, в частности, непрерывна.

Шаг 4: Пусть $\bar{B}_r(m)$ – компактный шар в локально компактном пространстве. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что **каждый замкнутый шар радиуса ε в с центром в $\bar{B}_r(m)$ компактен.** Действительно, ρ достигает минимума где-то на $B_r(m)$.

Теорема Хопфа-Ринова (продолжение)

Шаг 3: Определим функцию на метрическом пространстве $\rho(m) := \sup_r\{r \in \mathbb{R} \ \mid \ \bar{B}_r(m)$ компактен $\}$. **Тогда ρ 1-липшицева**, в частности, непрерывна.

Шаг 4: Пусть $\bar{B}_r(m)$ – компактный шар в локально компактном пространстве. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что **каждый замкнутый шар радиуса ε в с центром в $\bar{B}_r(m)$ компактен.** Действительно, ρ достигает минимума где-то на $B_r(m)$.

Шаг 5: Для такого шара, **$\bar{B}_{r+\frac{1}{2}\varepsilon}(m)$ тоже компактен.** Для доказательства, рассмотрим конечную $\frac{1}{4}\varepsilon$-сеть в $\bar{B}_r(m)$. Объединение V замкнутых ε-шаров с центрами в этой сети компактно (конечное объединение компактов компактно) и содержит $\bar{B}_{r+\frac{1}{2}\varepsilon}(m)$ в силу шага 1. Действительно, любая точка $B_{r+\frac{1}{2}\varepsilon}(m)$ отстоит не больше, чем на $\frac{1}{2}\varepsilon$ от $\bar{B}_r(m)$, значит, отстоит не больше чем на $\frac{3}{4}\varepsilon$ от какого-то узла $\frac{1}{4}\varepsilon$-сети. Это дает $B_{r+\frac{1}{2}\varepsilon}(m) \subset V$.

Шаг 6: Из сравнение шага 5 и шага 2 заключаем, что $\rho = \infty$. ■

Stefan Cohn-Vossen,

28 May 1902 - 25 June 1936

Кратчайшие в метрическом пространстве

Определение: Непрерывное отображение $\gamma : [0,\alpha] \to M$ называется **кратчайшей**, если его длина равна $d(\gamma(0),\gamma(\alpha))$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Любой отрезок кратчайшей - снова кратчайшая.

Определение: Если $\varphi : [0,\alpha] \to [0,\alpha]$ – гомеоморфизм, а γ - путь из x в y, композиция $\varphi \circ \gamma$ - тоже путь из x в y. Такой путь называется **репараметризацией** γ.

Параметризация γ – выбор пути в классе путей, эквивалентных с точностью до репараметризации.

Определение: Пусть $\gamma : [0,\alpha] \to M$ - кратчайшая, соединяющая x и y, причем

$$d(\gamma(x),\gamma(y)) = |x-y|.$$

Такая кратчайшая называется **кратчайшей геодезической**, а соответствующая параметризация - **геодезической параметризацией**.

ЗАМЕЧАНИЕ: Геодезическая кратчайшая задается изометрическим вложением из отрезка в M.

Существование кратчайших

ТЕОРЕМА: Пусть M - локально компактное, полное пространство с внутренней метрикой а $x_0, x_1 \in M$. **Тогда существует кратчайшая геодезическая, соединяющая x_0 и x_1.**

Доказательство. Шаг 1: Пусть $d(x_0, x_1) = \alpha$. В силу компактности, **в шаре $\bar{B}_{\alpha/2}(x_1)$ есть точка $x_{1/2}$ такая, что $d(x_0, x_{1/2}) = d(x_{1/2}, x_1) = \alpha/2$.** В самом деле, функция $d(\cdot, x_0): \bar{B}_{\alpha/2}(x_1) \to \mathbb{R}$ непрерывная на компакте, значит, достигает минимума, который равен $d(x_0, \bar{B}_{\alpha/2}(x_1)) = \alpha/2$ потому, что метрика внутренняя.

Шаг 2: Воспользовавшись индукцией, для каждого двоично-рационального числа $\lambda = \frac{n}{2^k}$ в $[0,1]$ **найдем точку x_λ, такую, что $d(x_\lambda, x_\mu) = \alpha|\lambda - \mu|$.**

Шаг 3: Мы получили **изометрическое вложение множества двоично-рациональных чисел в M. Продолжим на пополнение, получим геодезическую.** ■