Метрическая геометрия 4: полиэдральные пространства и графы

Миша Вербицкий

29 февраля, 2016

НМУ

Внутренняя метрика (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (M, d) – метрическое пространство, а $\gamma : [a, b] \to M$ – путь. Рассмотрим разбиение отрезка $[a, b] = [a,_1] \cup [x_1, x_2] \cup ... \cup [x_{n-1}, b]$. Обозначим $x_0 := a, x_n := b$. Положим $L_\gamma(x_1, ... x_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} d(x_i, x_{i+1})$. Определим **длину пути** γ формулой

$$L_d(\gamma) := \sup_{a<x_1<...<x_{n-1}<b} L_\gamma(x_1, ... x_{n-1}).$$

где супремум берется по всем разбиениям отрезка. Путь γ называется **спрямляемым**, если $L_d(\gamma) < \infty$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (M, d) – метрическое пространство, а $\hat{d}(x, y)$ равно инфимуму длин путей, соединяющих x и y. Она называется **внутренней метрикой, индуцированной d.**

ТЕОРЕМА: Для любого метрического пространства, $\hat{\hat{d}} = \hat{d}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Метрика d на M называется **внутренней**, если $\hat{d} = d$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Финслеровы и римановы метрики, построенные раньше, **являются внутренними**.

Кратчайшие в метрическом пространстве

Определение: Непрерывное отображение $\gamma: [0,\alpha] \to M$ называется **кратчайшей**, если его длина равна $d(\gamma(0),\gamma(\alpha))$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Любой отрезок кратчайшей - снова кратчайшая.

Определение: Пусть $\varphi: [a,b] \to [c,d]$ – монотонное отображение, переводящее концы отрезка в концы. Предположим, что $\varphi\circ\gamma$ непрерывно. Тогда $\varphi\circ\gamma$ называется **репараметризацией** пути γ. **Параметризация** γ – выбор пути в классе путей, эквивалентных с точностью до репараметризации.

Определение: Пусть $\gamma: [0,\alpha] \to M$ - кратчайшая, соединяющая x и y, причем

$$d(\gamma(x),\gamma(y)) = |x-y|.$$

Такая кратчайшая называется **кратчайшей геодезической**, а соответствующая параметризация - **геодезической параметризацией**.

ЗАМЕЧАНИЕ: Геодезическая кратчайшая задается изометрическим вложением из отрезка в M.

Непрерывность длины как функции параметра

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть (M, d) – метрическое пространство, $\gamma: [a,b] \to M$ спрямляемый путь, а L_d функционал длины. **Тогда $L_d(\gamma|_{[a,b_1]})$ непрерывно зависит от $b_1 \in [a,b]$.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Достаточно доказать, что

$$\lim_{b_1 \to b} L\left(\gamma|_{[b_1,b]}\right) = 0.$$

Пусть $a = x_1, ..., x_n = b$ – такое разбиение отрезка $[a,b]$, что

$$\sum d(\gamma(x_i), \gamma(x_{i+1})) \geqslant L(\gamma) - \varepsilon,$$

причем последний отрезок имеет длину не больше ε:

$$d(\gamma(x_{n-1}), \gamma(x_n)) \leqslant \varepsilon.$$

Тогда для каждого $b_1 \in [x_{n-1}, x_n]$, длина $L\left(\gamma|_{[b_1,b]}\right)$ не больше, чем ε плюс длина отрезка $\gamma(x_{n-1}), \gamma(x_n))$, то есть не больше, чем 2ε. Это значит, что для каждого $\varepsilon > 0$, имеем $L\left(\gamma|_{[b_1,b]}\right) \leqslant 2\varepsilon$ для b_1, достаточно близких к b.

■

Существование геодезической параметризации

Определение: Пусть $\gamma: [0, \alpha] \to M$ - кратчайшая, соединяющая x и y, причем

$$d(\gamma(x), \gamma(y)) = |x - y|.$$

Такая кратчайшая называется **кратчайшей геодезической**, а соответствующая параметризация - **геодезической параметризацией**.

СЛЕДСТВИЕ: **Любая кратчайшая допускает геодезическую параметризацию.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Пусть γ – кратчайшая длины d, соединяющая x и y, а $\gamma_1: [0, d] \to M$ переводит t в точку $\gamma_1(t)$ такую, что $d(x, \gamma_1(t)) = t$. Такая точка существует, потому что длина отрезка пути является непрерывной функцией параметра. Отображение $t \to \gamma_1(t)$ непрерывно, ибо расстояние между $\gamma_1(t)$ и $\gamma_1(t')$ равно $|t - t'|$, так как это отрезки кратчайшей. Наконец, γ_1 получена из γ репараметризацией, ибо отображение $t \to d(x, \gamma(t))$ непрерывно и монотонно. ■

Теорема Хопфа-Ринова-Кон-Фоссена

УТВЕРЖДЕНИЕ: В пространстве с внутренней метрикой выполнено условие Кон-Фоссена: $d(x, B_r(y)) = d(x, y) - r$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Рассмотрим путь γ, соединяющий x и y, длины $L(\gamma) < d(x, y) + \varepsilon$. Пусть $r' = d(x, y) - r$. Если шары $B_r(y)$ и $B_{r'+\varepsilon}(x)$ пересекаются в точке z, мы получаем, что $d(x, B_r(y)) \leqslant d(x, z) \leqslant d(x, y) - r + \varepsilon$. Если же они не пересекаются, получаем точку $z \in \gamma$, которая не принадлежит ни одному из шаров, и она удовлетворяет

$$d(x, z) + d(y, z) > r + r' + \varepsilon = d(x, y) + \varepsilon$$

что невозможно, потому что длина пути γ меньше, чем $d(x, y) + \varepsilon$. ■

ТЕОРЕМА: (Хопфа-Ринова-Кон-Фоссена)
Пусть M – полное, локально компактное пространство, в котором выполнено условие Кон-Фоссена. **Тогда каждый замкнутый шар в M компактен.**

Существование кратчайших

ТЕОРЕМА: Пусть M - локально компактное, полное пространство с внутренней метрикой а $x_0, x_1 \in M$. **Тогда существует кратчайшая геодезическая, соединяющая x_0 и x_1.**

Доказательство. Шаг 1: Пусть $d(x_0, x_1) = \alpha$. Из теоремы Хопфа-Ринова следует, что шары $\bar{B}_r(x)$ компактны. **в шаре $\bar{B}_{\alpha/2}(x_1)$ есть точка $x_{1/2}$ такая, что $d(x_0, x_{1/2}) = d(x_{1/2}, x_1) = \alpha/2$.** В самом деле, функция $d(\cdot, x_0) : \bar{B}_{\alpha/2}(x_1) \to \mathbb{R}$ непрерывная на компакте, значит, достигает минимума, который равен $d(x_0, \bar{B}_{\alpha/2}(x_1)) = \alpha/2$ потому, что метрика внутренняя.

Шаг 2: Воспользовавшись индукцией, для каждого двоично-рационального числа $\lambda = \frac{n}{2^k}$ в $[0, 1]$ **найдем точку x_λ, такую, что $d(x_\lambda, x_\mu) = \alpha|\lambda - \mu|$.**

Шаг 3: Мы получили **изометрическое вложение множества двоично-рациональных чисел в M. Продолжим на пополнение, получим геодезическую.** ■

Топология фактора

Определение: Пусть M – топологическое пространство, а $\sim$ – отношение эквивалентности. Подмножество $U \subset M/{\sim}$ множества классов $M/{\sim}$ называется **открытым**, если его прообраз в M открыт. Это определяет **топологию фактора** на $M/\sim$, которое называется **факторпространством** по соотношению эквивалентности $\sim$.

Предостережение: Факторпространство может быть нехаусдорфово, даже если M хаусдорфово.

Определение: Пусть G – группа, действующая на топологическом пространстве M. **Факторпространством** по действию группы называется пространство классов эквивалентности $M/\sim$, где $x \sim y$, если x и y лежат в одной орбите G. Также факторпространство называют **пространство орбит действия G**.

Замечание: Пусть G - группа, действующая на топологическом пространстве M гомеоморфизмами. Тогда **естественная проекция $M \xrightarrow{\pi} M/G$ является открытым отображением.**

Топологическое пространство графа

Определение: **Графом** называется набор вершин и набор ребер, причем каждому ребру соответствует две вершины (возможно, одинаковые), которые называются его **концами**, или **концом и началом**, причем каждая вершина является концом хотя бы одного из ребер. Если двум ребрам соответствует одна и та же вершина, эти ребра называются **смежными**, а вершина – **общей вершиной** ребер. Граф называется **конечным**, если число его ребер и вершин конечно.

Замечание: С каждым графом ассоциировано топологическое пространство: набор отрезков, соединяющих набор отмеченных точек – вершин.

Определение: Пусть Г – граф, а S – множество его ребер. Рассмотрим S как пространство с дискретной топологией, и пусть $X := S \times [0,1]$ – несвязное объединение S копий отрезка. В этом случае $x = s \times \{1\}$ или $x = s \times \{0\}$ – точки X, соответствующая началу или концу отрезка. Если у ребра s_1 и у ребра s_2 имеется общий конец, напишем $x_1 \sim x_2$, где $x_i = s_i \times \{1\}$ или $x_i = s_i \times \{1\}$ соответствующие точки X. **Топологическим пространством графа** называется факторпространство $X/\sim$ по такому отношению эквивалентности.

УПРАЖНЕНИЕ: **Топологическое пространство любого графа хаусдорфово** (докажите это).

Полуметрики

Определение:
Пусть $d: M \times M \to \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ функция, такая, что выполнены:
Рефлексивность: $d(x,x) = 0$
Симметричность: $d(x,y) = d(y,x)$
Неравенство треугольника: $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$

Тогда d называется **полуметрикой**

От определения метрики это отличается только отсутствием условия невырожденности: $d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$.

Определение:
Открытым шаром в полуметрике d называется множество

$$B_{r,d}(x) = \{y \in M \quad | \quad d(x,y) < r\}.$$

Открытые шары задают на M топологию, **нехаусдорфову если M не метрика.**

Замечание:
Условие $d(x,y) = 0$ задает на M отношение эквивалентности.

Полуметрики и метрики

Если $d(x,y)=0$, то

$$d(z,x)+d(x,y)\geqslant d(y,z),\quad d(z,y)+d(y,x)\geqslant d(z,x),$$

поэтому $d(z,x)=d(y,z)$. **Следовательно, функция d корректно определена на множестве $\underline{M}$ классов эквивалентности по отношению $d(x,y)=0$. Она задает метрику на $\underline{M}$.**

Утверждение: Каждое пространство (M,d) с полуметрикой **наделено сюрьективным отображением** $\pi: M\to\underline{M}$ в метрическое пространство $(\underline{M},\underline{d})$, при этом

$$d(x,y)=\underline{d}(\pi(x),\pi(y)).\qquad (*)$$

Замечание: Если задано отображение $\pi: M\to\underline{M}$ в метрическое пространство, то формула (*) определяет на M полуметрику.

Полуметрика на факторпространстве

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\sim$ – отношение эквивалентности на метрическом пространстве (X,d). **Определим функцию $d_\sim : X/\!\sim \times X/\!\sim \to \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ на факторе $X/\!\sim$** по формуле

$$d_\sim(x,y) = \inf \sum_{i=0}^{n-1} d(p_i, q_{i+1}),$$

где инфимум берется по всем наборам точек $p_i, q_i \in X$ таким, что $p_0 \sim x, q_n \sim y$, и $p_i \sim q_i$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: **Эта функция – полуметрика.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Нетривиально только неравенство треугольника. Но $d(x,y)$ есть инфимум длины "ломаных" $p_0, p_1, q_1, p_2, q_2, ...$ соединяющих x с y, где расстояние между $p_i \sim q_i$ положено равным 0. **Но если x соединен с y, y с z подобными ломаными, то x соединен с z объединением этих ломаных,** что дает $d_\sim(x,z) \leqslant d_\sim(x,y) + d_\sim(y,z)$. ■

Метрический фактор

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\sim$ – отношение эквивалентности на метрическом пространстве (X,d). Определенная выше полуметрика $d_\sim$ на $X/\sim$ называется **полуметрикой факторпространства**. **Метрическое факторпространство** получается из $X/\sim$ дополнительным отождествлением всех точек x,y таких, что $d_\sim(x,y)=0$, с метрикой, которая индуцирована с $d_\sim$.

ПРИМЕР: Пусть G – группа, действующая на метрическом пространстве (X,d) изометриями, а $x\sim y$, если x и y лежат в одной орбите G. **Тогда $d_\sim(a,b)$ есть инфимум расстояний между представителями a,b в X** (докажите это).

Метрические графы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Несвязное объединение** метрических пространств (X_α, d_α) есть $\coprod X_\alpha$ с метрикой $d(x,y)$ которая равна $d_\alpha(x,y)$, когда x и y лежат в X_α, и ∞ в противном случае.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть I_α – набор отрезков, изометричных $[0, x_\alpha]$, а $\sim$ – отношение эквивалентности, полученное склейкой некоторых вершин. Метрический фактор $\coprod_\alpha I_\alpha$ называется **метрическим графом**. Он называется **локально конечным**, если каждая точка отождествляется с конечным числом точек.

УТВЕРЖДЕНИЕ: **Метрика на метрическом графе - всегда внутренняя.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Каждую "ломаную" $p_0, p_1, q_1, p_2, q_2, ...$, соединяющую x и y, можно реализовать объединением отрезков в графе, такой же длины. ■

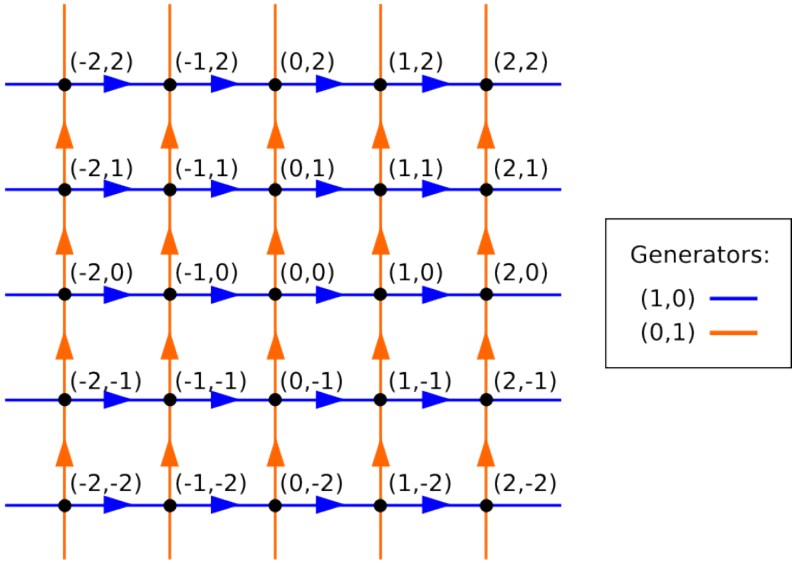
ЗАМЕЧАНИЕ: Естественое отображение из топологического пространства графа в метрический граф – **гомеоморфизм для локально конечного графа**. Для не локально конечных графов **это может быть не биекция,** или **биекция, но не гомеоморфизм.**

Граф Кэли

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Набор образующих** группы G есть множество элементов S, мультипликативно порождающих G. **В дальнейшем, мы будем всегда предполагать, что $s \in S \Leftrightarrow s^{-1} \in S$.**

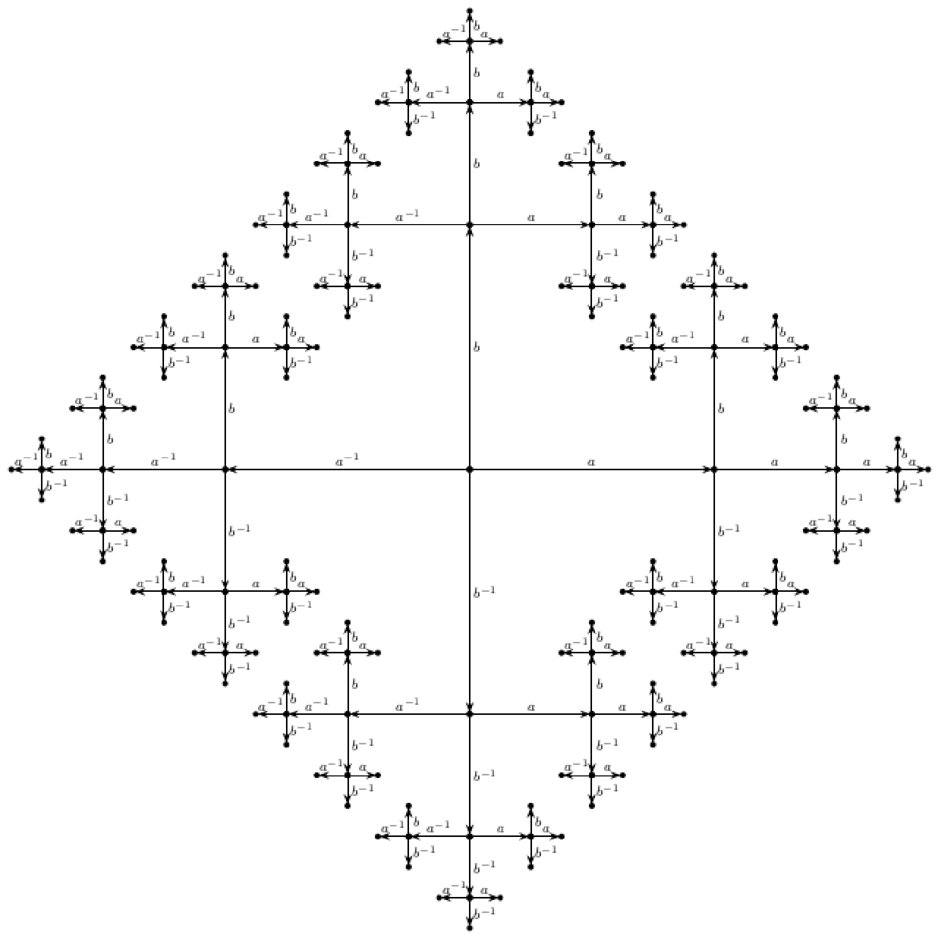
ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть G – группа, $\{s_i\}$ – набор образующих. **Граф Кэли** пары $(G, \{s_i\})$ есть граф, вершины которого – элементы G, а ребра соединяют точки вида g и gs_i. Полагая длину ребер графа равной 1, мы **определяем граф Кэли как метрическое пространство с внутренней метрикой.**

ПРИМЕР: Граф Кэли для $\mathbb{Z}^n$ с обычным набором образующих есть кубическая решетка.



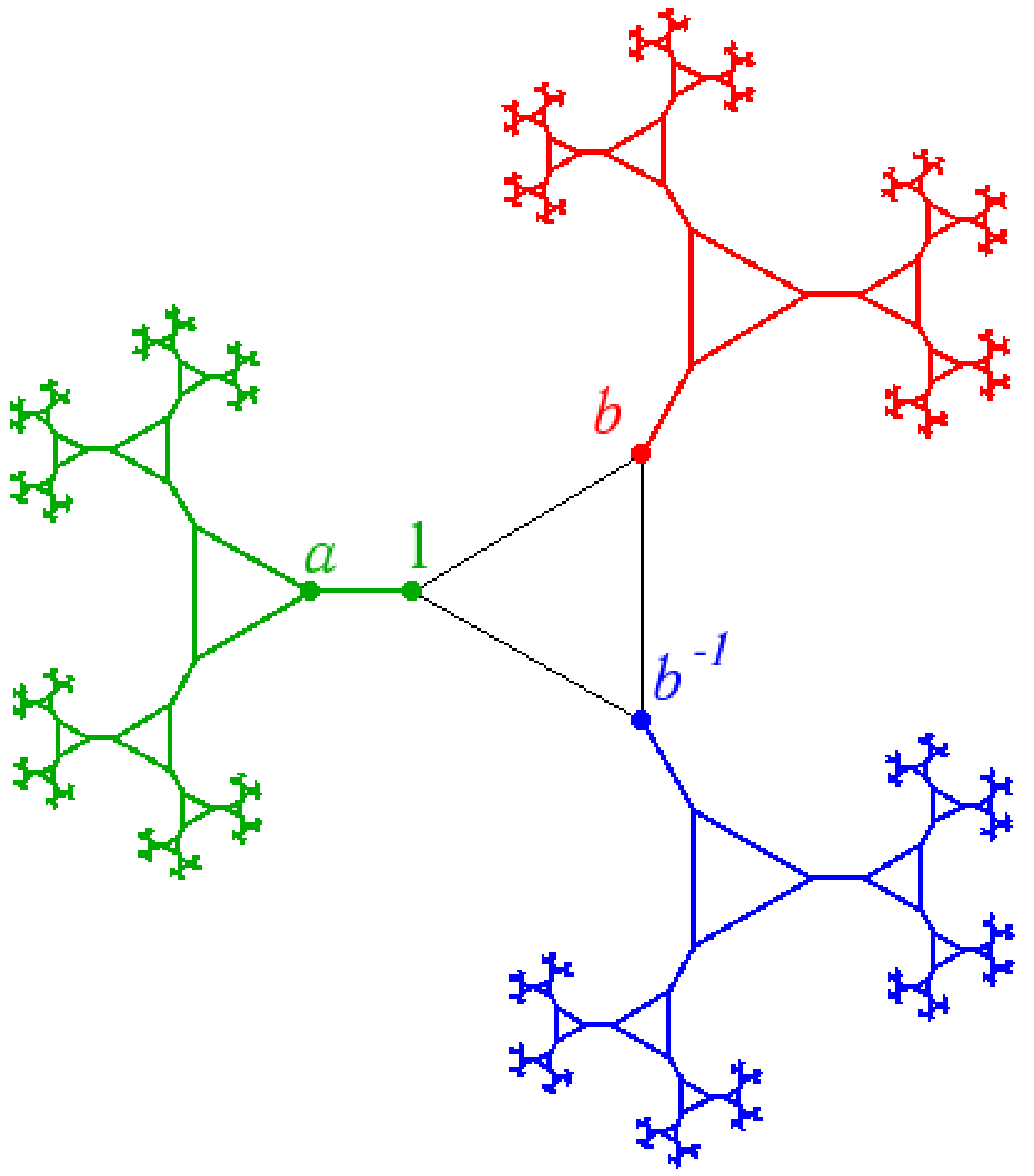
Граф Кэли для свободной группы

ПРИМЕР: Граф Кэли для свободной группы – регулярное дерево



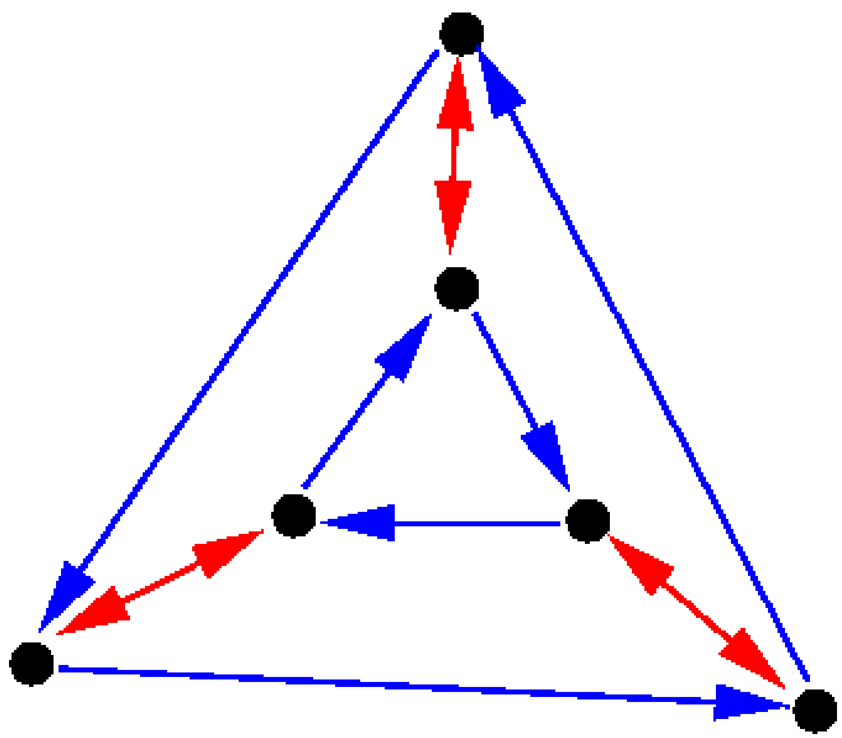
Граф Кэли свободной группы $\mathbb{F}_2$ с образующими a, b, a^{-1}, b^{-1}.

Граф Кэли для $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$



Граф Кэли для $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

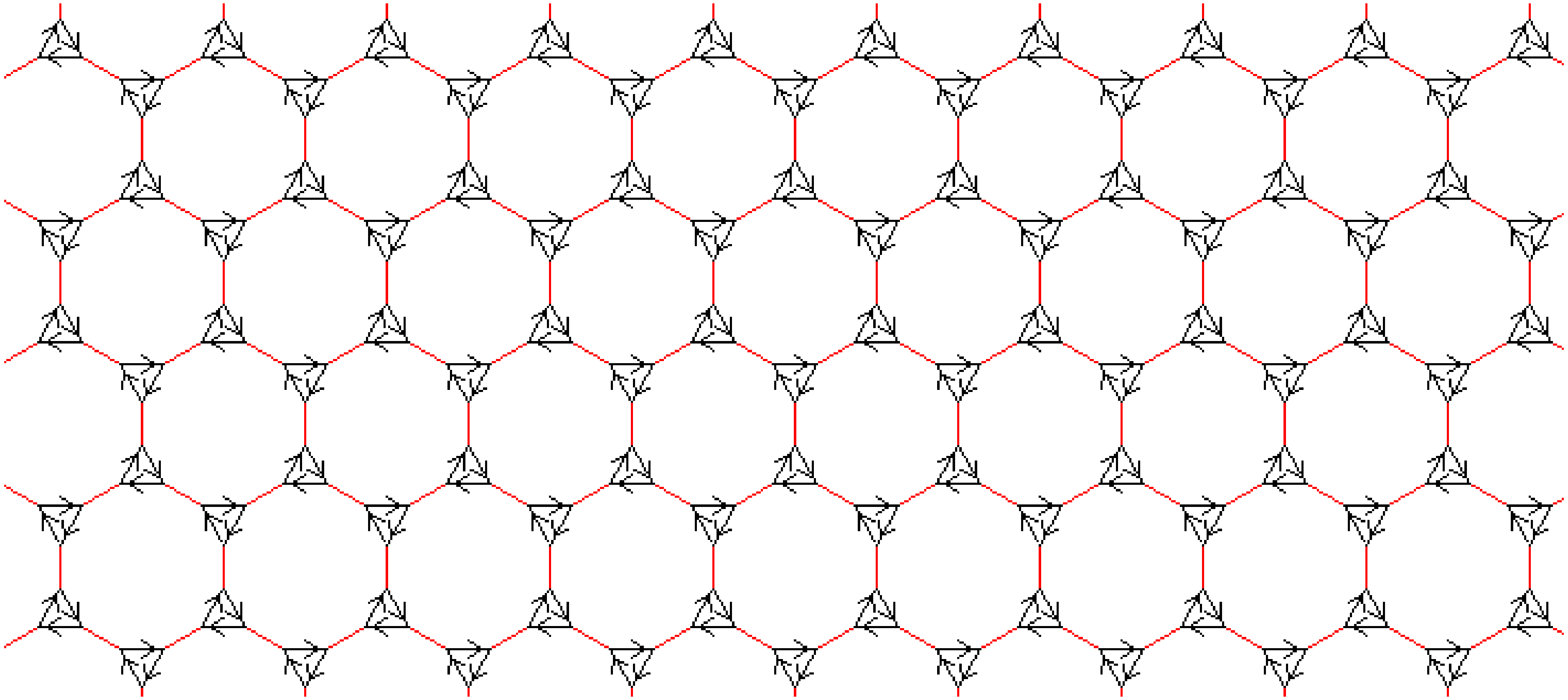
Граф Кэли для группы S^3



Граф Кэли для S^3.

Группа $S^3 = \langle k, r \mid k^2 = r^3 = (kr)^3 = 1\rangle$ задается образующими k (красная), r (черная), и соотношениями $k^2 = r^3 = (kr)^3 = 1$.

Граф Кэли для группы $\langle k, r \mid k^2 = r^3 = (kr)^6 = 1\rangle$



Граф Кэли для группы, заданной образующими k (красная), r (черная), и соотношениями $k^2 = r^3 = (kr)^6 = 1$.

Полиэдральные метрические пространства

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Полиэдральное метрическое пространство размерности 1** есть метрический граф.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Полиэдральное метрическое пространство размерности k определяется по индукции. Каждое k-мерное полиэдральное метрическое пространство получено объединением своих l-скелетов K_l, $l = 1, 2, 3, ..., k$, причем $K_k = K$, а каждое из K_l есть полиэдральное метрическое пространство размерности l. Каждое K_k получено из K_{k-1} приклеиванием выпуклых евклидовых многогранников, следующим образом.

Пусть задано полиэдральное метрическое пространство K размерности $k-1$ и набор выпуклых многоогранников V_i в k-мерном евклидовом пространстве. Пусть для каждого из V_i задано изометрическое вложение $\tau_i : \ \partial V_i \to {}_{k-1}$ границы V_i в K_{k-1}, переводящее l-мерные грани V_i в K_l. Метрический фактор $K_{k-1} \coprod_i V_i$ по соотношению, заданному таким склеиванием, называется **полиэдральным метрическим пространством размерности k.**

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что **метрика на полиэдральном метрическом пространстве - внутренняя.**

Углы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть a, b, c – точки в метрическом пространстве (M, d). **Здесь и в дальнейшем $\mathbb{R}^2$ предполагается метрическим пространством, с обычной (евклидовой) метрикой.** **Треугольник сравнения** $\triangle(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ есть треугольник в $\mathbb{R}^2$, с вершинами $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, и сторонами $|\bar{a}, \bar{b}| = d(a, b)$, $|\bar{a}, \bar{c}| = d(a, c)$, и $|\bar{b}, \bar{c}| = d(b, c)$ (такой треугольник, очевидно, существует, и определен единственно с точностью до конгруэнтности). Угол $\measuredangle(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ в треугольнике $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ обозначается $\theta(a, b, c)$; он называется **углом сравнения**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\gamma_1 : [0, a] \to M$, $\gamma_2 : [0, b] \to M$ два пути в метрическом пространстве M, $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$. **Угол** между путями γ_1, γ_2 в p есть число

$$\measuredangle(\gamma_1, p, \gamma_2) := \lim_{t,s\to 0} \theta(\gamma_1(t), p, \gamma_2(s)),$$

если такой предел существует (в противном случае, говорится, что **угол между γ_1 и γ_2 не существует**). **Верхний угол** есть

$$\measuredangle_{\sup}(\gamma_1, p, \gamma_2) := \limsup_{t,s\to 0} \theta(\gamma_1(t), p, \gamma_2(s)),$$

где $\limsup$ **обозначает супремум всех предельных точек последовательностей $\theta(\gamma_1(t_i), p, \gamma_2(s_j))$, для всех t_i, s_j сходящихся к 0.**

Неравенство треугольника для углов

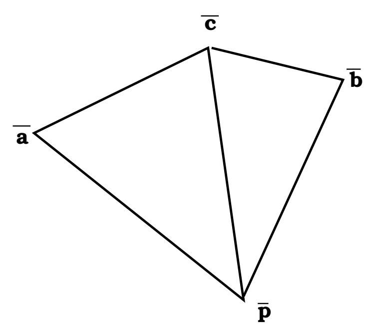
УПРАЖНЕНИЕ: Проверьте, что **угол между гладкими путями в $\mathbb{R}^n$ существует и равен углу между их касательными.**

УПРАЖНЕНИЕ: $\gamma : : [0, a] \to M$ – кратчайшая, наделенная геодезической параметризацией, а $\gamma(0) = p$. **Тогда угол $\measuredangle_{\mathsf{sup}}(\gamma, p, \gamma)$ существует и равен нулю.**

ТЕОРЕМА: Пусть $\gamma_i : [0, a] \to M$ – пути в M, Тогда верно **неравенство треугольника для верхних углов:**

$$\measuredangle_{\mathsf{sup}}(\gamma_1, p, \gamma_2) + \measuredangle_{\mathsf{sup}}(\gamma_2, p, \gamma_3) \geqslant \measuredangle_{\mathsf{sup}}(\gamma_1, p, \gamma_3).$$

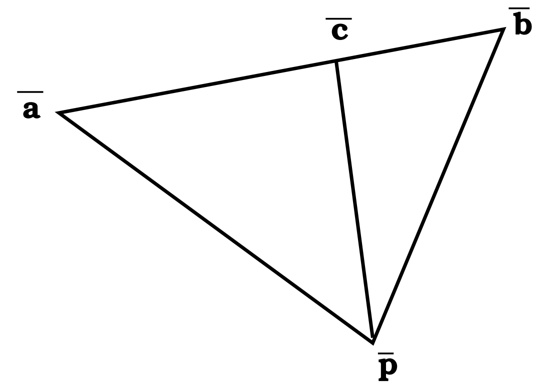
Доказательство. Шаг 1: Пусть $\gamma_i(0) = p$, $a = \gamma_1(s), b = \gamma_3(t)$, $c = \gamma_2(u)$. Рассмотрим треугольники сравнения $\triangle(\bar{p}, \bar{a}, \bar{c})$ и $\triangle(\bar{p}, \bar{c}, \bar{b})$, и нарисуем их на плоскости, с общей стороной $|\bar{p}, \bar{c}|$, чтобы они лежали по разные стороны от прямой $(\bar{p}, \bar{c})$.



В силу непрерывности $d(p, \gamma_2(u))$, **для любых заданных s, t, можно подобрать u таким образом, что $\bar{c}$ лежит на отрезке $[\bar{a}, \bar{b}]$.**

Неравенство треугольника для углов (продолжение)

Шаг 2: Из рассмотрения треугольников сравнения



убеждаемся, что

$$\theta(a,p,b)+\theta(b,p,c)=\measuredangle(\bar{a},\bar{p},\bar{c})=\arccos\left(\frac{s^2+t^2-|\bar{a},\bar{c}|^2}{2st}\right)$$

где $s=d(p,a)$ и $t=d(p,c)$.

Шаг 3: По определению, $|\bar{a},\bar{c}|=|\bar{a},\bar{b}|+|\bar{b},\bar{c}|=d(a,b)+d(b,c)\geqslant d(a,c)$. В силу монотонности арккосинуса, получаем

$$\measuredangle(\bar{a},\bar{p},\bar{c})=\arccos\left(\frac{s^2+t^2-|\bar{a},\bar{c}|^2}{2st}\right)\geqslant\arccos\left(\frac{s^2+t^2-d(a,c)^2}{2st}\right)=\theta(a,p,c).$$

Шаг 4: Сравнивая формулы, полученные в шаге 2 и шаге 3, получаем $\theta(a,p,b)+\theta(b,p,c)\geqslant\theta(a,p,c)$; неравенство для $\measuredangle_{\sup}$ следует немедленно. ■

Пространство направлений

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Путь $\gamma: [0, a] \to M$ **имеет направление**, если угол $\measuredangle(\gamma, \gamma(0), \gamma)$ существует. Пути $\alpha, \beta: [0, a] \to M$, $\alpha(0) = \beta(0) = p$ **имеют одинаковое направление**, если $\measuredangle_{\text{sup}}(\alpha, p, \beta) = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ: В силу неравенства треугольника для углов, оотношение «$\alpha \sim \beta$, если $\measuredangle_{\text{sup}}(\alpha, p, \beta) = 0$» **задает отношение эквивалентности на множестве всех путей $\gamma: [0, a] \to M$, $\gamma(0) = p$, имеющих направление.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Пространство направлений** в точке p есть множество классов эквивалентности путей $\gamma: [0, a] \to M$, $\gamma(0) = p$, имеющих направление, по отношению $\sim$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: $\measuredangle_{\text{sup}}(\alpha, p, \beta)$ **задает метрику на пространстве направлений.** ■