Метрическая геометрия 5: пространства Александрова

Миша Вербицкий

7 марта, 2016

НМУ

Внутренняя метрика (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (M,d) – метрическое пространство, а $\gamma: [a,b] \to M$ – путь. Рассмотрим разбиение отрезка $[a,b] = [a,_1]\cup[x_1,x_2]\cup...\cup[x_{n-1},b]$. Обозначим $x_0 := a, x_n := b$. Положим $L_\gamma(x_1,...x_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} d(x_i,x_{i+1})$. Определим **длину пути** γ формулой

$$L_d(\gamma) := \sup_{a<x_1<...<x_{n-1}<b} L_\gamma(x_1,...x_{n-1}).$$

где супремум берется по всем разбиениям отрезка. Путь γ называется **спрямляемым**, если $L_d(\gamma) < \infty$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (M,d) – метрическое пространство, а $\hat{d}(x,y)$ равно инфимуму длин путей, соединяющих x и y. Она называется **внутренней метрикой, индуцированной d.**

ТЕОРЕМА: Для любого метрического пространства, $\hat{\hat{d}} = \hat{d}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Метрика d на M называется **внутренней**, если $\hat{d} = d$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Финслеровы и римановы метрики, построенные раньше, **являются внутренними**.

Кратчайшие в метрическом пространстве (повторение)

Определение: Непрерывное отображение $\gamma : [0, \alpha] \to M$ называется **кратчайшей**, если его длина равна $d(\gamma(0), \gamma(\alpha))$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Любой отрезок кратчайшей - снова кратчайшая.

Определение: Пусть $\varphi : [a, b] \to [c, d]$ – монотонное отображение, переводящее концы отрезка в концы. Предположим, что $\varphi \circ \gamma$ непрерывно. Тогда $\varphi \circ \gamma$ называется **репараметризацией** пути γ. **Параметризация** γ – выбор пути в классе путей, эквивалентных с точностью до репараметризации.

Определение: Пусть $\gamma : [0, \alpha] \to M$ - кратчайшая, соединяющая x и y, причем $d(\gamma(x), \gamma(y)) = |x - y|$. Такая кратчайшая называется **кратчайшей геодезической**, а соответствующая параметризация - **геодезической параметризацией**.

ЗАМЕЧАНИЕ: Геодезическая кратчайшая задается изометрическим вложением из отрезка в M.

Углы (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть a, b, c – точки в метрическом пространстве (M, d). **Здесь и в дальнейшем $\mathbb{R}^2$ предполагается метрическим пространством, с обычной (евклидовой) метрикой.** **Треугольник сравнения** $\triangle(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ есть треугольник в $\mathbb{R}^2$, с вершинами $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, и сторонами $|\bar{a}, \bar{b}| = d(a, b)$, $|\bar{a}, \bar{c}| = d(a, c)$, и $|\bar{b}, \bar{c}| = d(b, c)$ (такой треугольник, очевидно, существует, и определен единственно с точностью до конгруэнтности). Угол $\measuredangle(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ в треугольнике $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ обозначается $\theta(a, b, c)$; он называется **углом сравнения**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\gamma_1 : [0, a] \to M$, $\gamma_2 : [0, b] \to M$ два пути в метрическом пространстве M, $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$. **Угол** между путями γ_1, γ_2 в p есть число

$$\measuredangle(\gamma_1, p, \gamma_2) := \lim_{t,s\to 0} \theta(\gamma_1(t), p, \gamma_2(s)),$$

если такой предел существует (в противном случае, говорится, что **угол между γ_1 и γ_2 не существует**). **Верхний угол** есть

$$\measuredangle_{\sup}(\gamma_1, p, \gamma_2) := \limsup_{t,s\to 0} \theta(\gamma_1(t), p, \gamma_2(s)),$$

где $\limsup$ **обозначает супремум всех предельных точек последовательностей $\theta(\gamma_1(t_i), p, \gamma_2(s_j))$, для всех t_i, s_j сходящихся к 0.**

Пространство направлений (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Путь $\gamma: [0,a] \to M$ **имеет направление**, если угол $\measuredangle(\gamma, \gamma(0), \gamma)$ существует (в этом случае он равен нулю). Пути $\alpha, \beta: [0,a] \to M$, $\alpha(0) = \beta(0) = p$ **имеют одинаковое направление**, если $\measuredangle_{\mathsf{sup}}(\alpha, p, \beta) = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ: В силу неравенства треугольника для углов, отношение «$\alpha \sim \beta$, если $\measuredangle_{\mathsf{sup}}(\alpha, p, \beta) = 0$» **задает отношение эквивалентности $\sim$ на множестве всех путей $\gamma: [0,a] \to M$, $\gamma(0) = p$, имеющих направление.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Пространство направлений** в точке p есть множество классов эквивалентности путей $\gamma: [0,a] \to M$, $\gamma(0) = p$, имеющих направление, по отношению $\sim$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: $\measuredangle_{\mathsf{sup}}(\alpha, p, \beta)$ **задает метрику на пространстве направлений.** ■

Конус

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Диаметр** метрического пространства M есть число $\sup_{x,y\in M} d(x,y)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (X,d) – метрическое пространство, $\operatorname{diam} X \leqslant \pi$. Рассмотрим топологическое пространство $C(X)$ с топологией фактора, полученное из $X\times[0,\infty[$ склеиванием $X\times\{0\}$ в точку. Определим функцию $d_C:\ C(X)\times C(X)\to\mathbb{R}^{>0}$ по формуле

$$d(p,q)=\sqrt{t^2+s^2-2ts\cos(d(x,y))},$$

где $p=(x,t), q=(y,s)$. **В скором времени будет доказано, что d_C есть метрика.** Пространство $C(X)$ с вышеописанной метрикой называется **метрическим конусом**, или просто **конусом** над X.

ТЕОРЕМА: **Функция d_C удовлетворяет неравенству треугольника.**

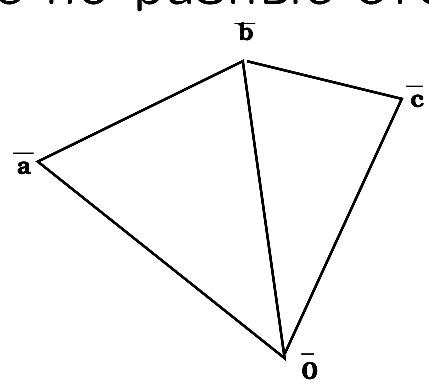
Доказательство. Шаг 1: Пусть $(\alpha,t),(\beta,s)$ – точки в конусе $C(X)$, а $\triangle(\bar{0},\bar{a},\bar{b})$ – треугольник сравнения со сторонами t,s и углом $\measuredangle(\bar{a},\bar{0},\bar{b})=d(\alpha,\beta)$. **Тогда $d_C(a,b)=|\bar{a},\bar{b}|$.**

Конус (продолжение)

ТЕОРЕМА: Функция d_C удовлетворяет неравенству треугольника.

Доказательство. Шаг 1: Пусть $(\alpha, t), (\beta, s)$ – точки в конусе $C(X)$, а $\triangle(\bar{0}, \bar{a}, \bar{b})$ – треугольник сравнения со сторонами t, s и углом $\measuredangle(\bar{a}, \bar{0}, \bar{b}) = d(\alpha, \beta)$. **Тогда $d_C(a, b) = |\bar{a}, \bar{b}|$.**

Шаг 2: Пусть $a = (\alpha, r), b = (\beta, s), c = (\gamma, t)$ – три точки на $C(X)$, а $\triangle(\bar{0}, \bar{a}, \bar{b})$, $\triangle(\bar{0}, \bar{b}, \bar{c})$ соответствующие треугольники сравнения, с общей стороной $[\bar{0}, \bar{b}]$, и отложенные по разные стороны от $(\bar{0}, \bar{b})$.



Тогда $d_C(a, c) \leqslant |\bar{a}, \bar{c}| \leqslant |\bar{a}, \bar{b}| + |\bar{b}, \bar{c}| = d_C(a, b) + d_C(b, c)$. ■

Свойства конуса

СВОЙСТВА КОНУСА: 1. Для каждого $x \in X$, **путь $\gamma : [0,a] \to C(X)$, переводящий a в (x,a) – кратчайшая.**

2. $x, y \in X$, а $\gamma_1 := (x,[0,a])$, $\gamma_2 := (y,[0,b]) \subset C(X)$ – соответствующие кратчайшие в конусе. **Тогда $\measuredangle(\gamma_1, 0, \gamma_2) = d(x,y)$.**

3. **Конус над отрезком длины α изометричен плоскому углу в $\mathbb{R}^2$ величины α.**

УТВЕРЖДЕНИЕ: Предположим, что X – пространство с внутренней метрикой и кратчайшими. **Тогда метрика на $C(X)$ – тоже внутренняя и с кратчайшими.**

Доказательство. Шаг 1: Для каждой кратчайшей $\gamma \in X$, конус $C(\gamma)$ изометричен плоскому углу, значит, **метрика на $C(\gamma)$ внутренняя и с кратчайшими.**

Шаг 2: Любые две точки на конусе лежат на $C(\gamma)$ для подходящей кратчайшей γ. ■

Конус пространства с $\operatorname{diam} > \pi$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть (X, d) – метрическое пространство, $a > 0$, а $d_a(x, y) = \min(d(x, y), a)$. **Тогда d_a – тоже метрика.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (X, d) – метрическое пространство, d_π – метрика на X, определенная выше. Определим **конус** $(C(X), d_C)$ как конус над (X, d_π).

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть (X, d) – пространство с внутренней метрикой и кратчайшими. **Тогда метрика d_C на $C(X)$ тоже внутренняя и с кратчайшими.**

Доказательство. Шаг 1: Для каждой кратчайшей $\gamma \in X$ длины $\alpha \leqslant \pi$, конус $C(\gamma)$ изометричен плоскому углу величины α. **Поэтому любые две точки (a, s) и (b, t) с $d(a, b) \leqslant \pi$ можно соединить кратчайшей.**

Шаг 2: Если (a, s) и (b, t) точки, для которых $d_\pi(a, b) = \pi$, расстояние между ними есть $s + t$, а соответствующая кратчайшая – отображение $\gamma : [-s, t] \to C(X)$, полученное объединением сегментов

$$\lambda \mapsto (a, \lambda), \lambda \in [-s, 0]$$
$$\lambda \mapsto (b, \lambda), \lambda \in [0, t].$$

■

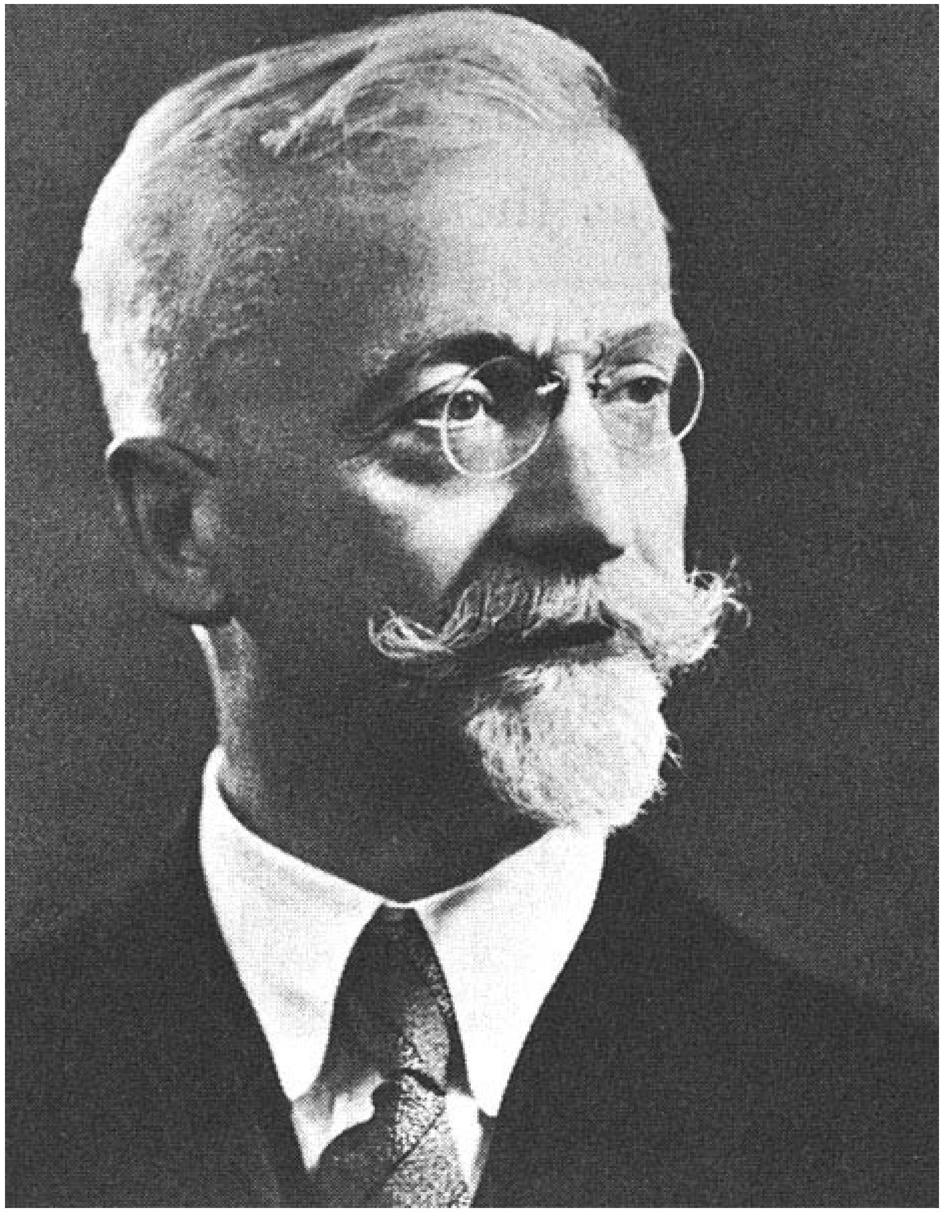
Пространства Александрова

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть a, b, c – точки на пространстве (M, d) со строго внутренней метрикой, $r = d(a, b)$, а $\gamma : [0, r] \to M$ – кратчайшая с геодезической параметризацией, соединяющая точки (a, b). Рассмотрим функцию $d_c : [0, r] \to \mathbb{R}^{\geqslant 0}$, переводящую t в $d(c, \gamma(t))$. Пусть $\triangle(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) \subset \mathbb{R}^2$ – треугольник сравнения, а $d_{\bar{c}} : [0, r] \to \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ – функция, переводящая t в $d(\bar{c}, \bar{\gamma}(t))$, где $\bar{\gamma} : [0, r] \to \mathbb{R}^2$ обозначает сторону треугольника сравнения с нормальной параметризацией. Функция $d_{\bar{c}}$ называется **функцией сравнения**.

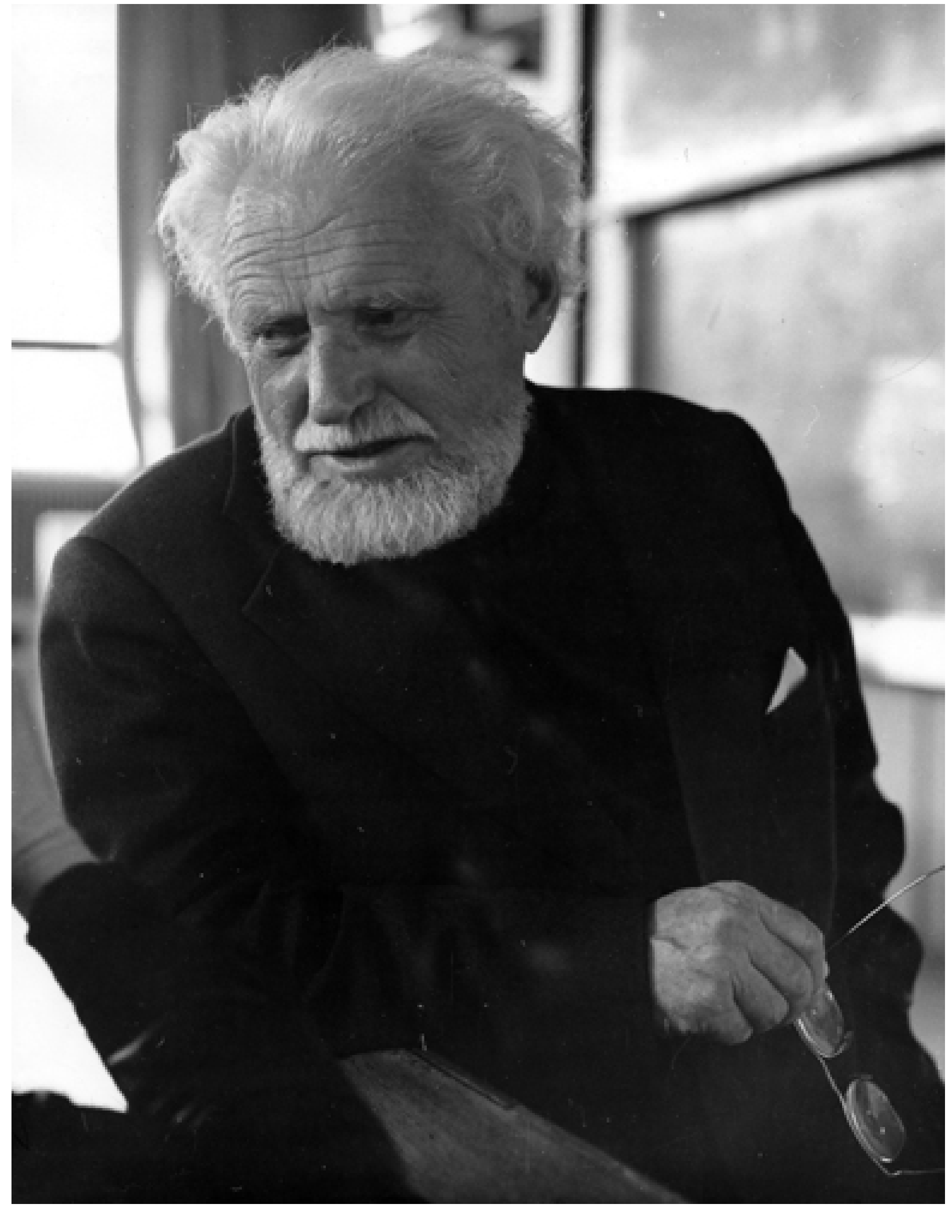
ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пространство M называется **пространством неотрицательной/неположительной кривизны в целом**, если для любых a, b, c, функция сравнения удовлетворяет неравенству $d_c \geqslant d_{\bar{c}}$ (соответственно, $d_c \leqslant d_{\bar{c}}$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пространство M называется **пространством Александрова неотрицательной/неположительной кривизны**, если у каждой точки есть окрестность неотрицательной/неположительной кривизны в целом.

ЗАМЕЧАНИЕ: Пространства неположительной кривизны в целом также называются **CAT(0)-пространствами** (в честь Эли Картана, Д. А. Александрова и В. А. Топоногова).

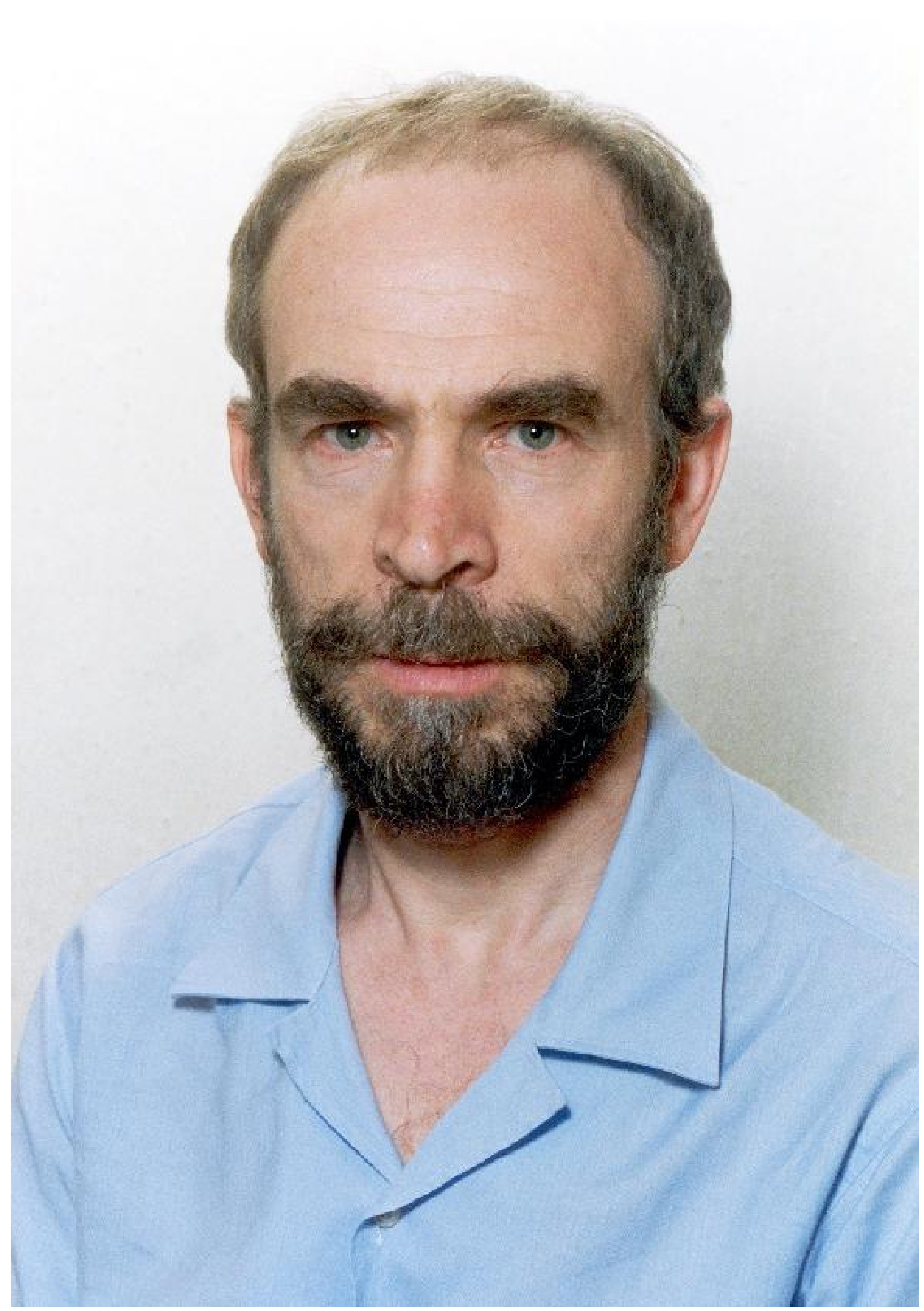


Élie Cartan,
1869-1951



Александр Данилович Александров,
1912-1999

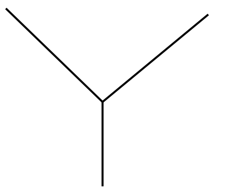
Виктор Андреевич Топоногов,
1930-2004



Михаил Громов
(р. 23 декабря 1943)

Примеры пространств Александрова

ПРИМЕР: Пусть Z – метрический граф, полученный склеиванием трех ребер в точке.



Тогда Z – пространство неположительной кривизны.

ПРИМЕР: Пусть L – окружность длины d с внутренней метрикой, а $C(L)$ – ее конус. Тогда $C(L)$ – **пространство Александрова неположительной кривизны** для $d \leqslant 2\pi$ и **пространство Александрова неотрицательной кривизны для $d \geqslant 2\pi$.**

ПРИМЕР: **Блокнот** есть полиэдральное пространство размерности 2, с метрикой фактора, полученное из нескольких полуплоскостей склейкой по граничной прямой. **Блокнот – пространство неположительной кривизны в целом.**

ПРИМЕР: **Метрический букет** пространств M_i с отмеченной точкой x_i получается из этих пространств склейкой точек x_i в одну (с метрикой фактора). **Метрический букет пространств неположительной кривизны - пространство неположительной кривизны.**

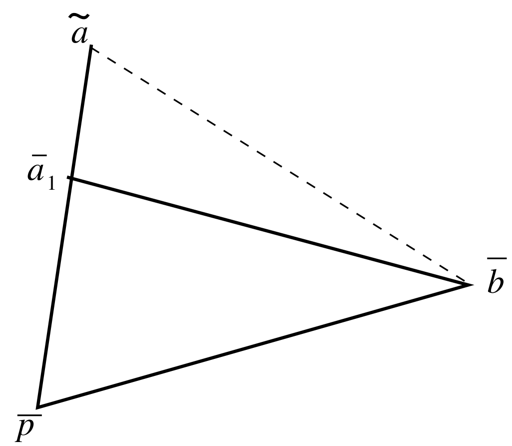
Условие монотонности углов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\gamma_1, \gamma_2 : [0, a] \to M$ – кратчайшие в M, $\gamma_i(0) = p$. Говорится, что **в M выполнено условие монотонности углов (для неположительной/неотрицательной кривизны)**, если угол $\theta(\gamma_1(s), p, \gamma_2(t))$ монотонно возрастает/убывает как функция от s, t.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Условие монотонности углов для неположительной/неотрицательной кривизны **равносильно неположительности/неотрицательности кривизны в целом.**

Условие монотонности углов (продолжение)

Доказательство. Шаг 1: Пусть p, a, b – три точки на метрическом пространстве, а a_1 – точка на кратчайшей, соединяющей a и p. Рассмотрим треугольник сравнения $\triangle(\bar{a}_1, \bar{p}, \bar{b})$ для a_1, p, b, и обозначим на прямой $(\bar{p}, \bar{a}_1)$ точку $\tilde{a}$ таким образом, что $|\bar{p}, \tilde{a}| = d(p, a)$.



Тогда $\theta(a_1, p, b) \leqslant \theta(a, p, b) \Leftrightarrow |\tilde{a}, \bar{b}| \leqslant d(a, b)$, ибо $|\tilde{a}, \bar{b}|$ и $d(a, b)$ - противолежащие стороны треугольников с соседними сторонами $d(p, a)$ и $d(p, b)$ и углом $\theta(a_1, p, b)$ для треугольника $\triangle(\tilde{a}, \bar{p}, \bar{b})$ и $\theta(a, p, b)$ для треугольника $\triangle(\bar{a}, \bar{p}, \bar{b})$.

Шаг 2: Ограничения на кривизну, в свою очередь, равносильны $|\tilde{a}, \bar{b}| \leqslant d(a, b)$ для неположительной кривизны, и $|\tilde{a}, \bar{b}| \geqslant d(a, b)$ для неотрицательной. ■

Углы в пространствах Александрова

СЛЕДСТВИЕ: Пусть M – пространство Александрова. **Тогда углы между геодезическими кратчайшими в M всегда определены.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Углы $\theta(\gamma_1(t), p, \gamma_2(s))$ монотонно растут либо убывают, значит, **соответствующие пределы существуют.** ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть p – внутренняя точка на краытчайшей γ. Обозначим два сегмента γ, начинающиеся от p, за γ_+ и γ_-. **Смежные углы** суть углы $\measuredangle(\gamma_+, p, \mu)$ и $\measuredangle(\gamma_-, p, \mu)$.

ЗАМЕЧАНИЕ: **Сумма смежных углов $\geqslant \pi$ в силу неравенства треугольника для углов.**

Условие сравнения углов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть a, b, c – три точки в метрическом пространстве, а $\triangle(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ – треугольник сравнения. Рассмотрим кратчайшие γ_1, γ_2, соединяющие a с b и a с c. **Условие сравнения углов для неположительной кривизны** есть неравенство $\measuredangle(\gamma_1, a, \gamma_2) \leqslant \measuredangle(\overline{c}\overline{a}\overline{b})$. **Условие сравнения углов для неотрицательной кривизны** есть неравенство $\measuredangle(\gamma_1, a, \gamma_2) \geqslant \measuredangle(\overline{c}\overline{a}\overline{b})$ плюс равенство $\measuredangle(\gamma_+, p, \mu) + \measuredangle(\gamma_-, p, \mu) = \pi$ для любых смежных углов $\measuredangle(\gamma_+, p, \mu)$ и $\measuredangle(\gamma_-, p, \mu)$.

ТЕОРЕМА: **Условие сравнения углов равносильно ограничению на кривизну с тем же знаком.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: См. листочек 6. ■