Метрическая геометрия 6: теорема Картана-Адамара

Миша Вербицкий

21 марта, 2016

НМУ

Внутренняя метрика (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (M,d) – метрическое пространство, а $\gamma : [a,b] \to M$ – путь. Рассмотрим разбиение отрезка $[a,b] = [a,_1] \cup [x_1,x_2] \cup ... \cup [x_{n-1},b]$. Обозначим $x_0 := a, x_n := b$. Положим $L_\gamma(x_1,...x_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} d(x_i,x_{i+1})$. Определим **длину пути** γ формулой

$$L_d(\gamma) := \sup_{a<x_1<...<x_{n-1}<b} L_\gamma(x_1,...x_{n-1}).$$

где супремум берется по всем разбиениям отрезка. Путь γ называется **спрямляемым**, если $L_d(\gamma) < \infty$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (M,d) – метрическое пространство, а $\hat{d}(x,y)$ равно инфимуму длин путей, соединяющих x и y. Она называется **внутренней метрикой, индуцированной d.**

ТЕОРЕМА: Для любого метрического пространства, $\hat{\hat{d}} = \hat{d}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Метрика d на M называется **внутренней**, если $\hat{d} = d$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Финслеровы и римановы метрики, построенные раньше, **являются внутренними**.

Кратчайшие в метрическом пространстве (повторение)

Определение: Непрерывное отображение $\gamma : [0, \alpha] \to M$ называется **кратчайшей**, если его длина равна $d(\gamma(0), \gamma(\alpha))$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Любой отрезок кратчайшей - снова кратчайшая.

Определение: Пусть $\varphi : [a, b] \to [c, d]$ – монотонное отображение, переводящее концы отрезка в концы. Предположим, что $\varphi \circ \gamma$ непрерывно. Тогда $\varphi \circ \gamma$ называется **репараметризацией** пути γ. **Параметризация** γ – выбор пути в классе путей, эквивалентных с точностью до репараметризации.

Определение: Пусть $\gamma : [0, \alpha] \to M$ - кратчайшая, соединяющая x и y, причем $d(\gamma(x), \gamma(y)) = |x - y|$. Такая кратчайшая называется **кратчайшей геодезической**, а соответствующая параметризация - **геодезической параметризацией**.

ЗАМЕЧАНИЕ: Геодезическая кратчайшая задается изометрическим вложением из отрезка в M.

Углы (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть a, b, c – точки в метрическом пространстве (M, d). **Здесь и в дальнейшем $\mathbb{R}^2$ предполагается метрическим пространством, с обычной (евклидовой) метрикой. Треугольник сравнения** $\triangle(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ есть треугольник в $\mathbb{R}^2$, с вершинами $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, и сторонами $|\bar{a}, \bar{b}| = d(a, b)$, $|\bar{a}, \bar{c}| = d(a, c)$, и $|\bar{b}, \bar{c}| = d(b, c)$ (такой треугольник, очевидно, существует, и определен единственно с точностью до конгруэнтности). Угол $\measuredangle(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ в треугольнике $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ обозначается $\theta(a, b, c)$; он называется **углом сравнения**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\gamma_1 : [0, a] \to M$, $\gamma_2 : [0, b] \to M$ два пути в метрическом пространстве M, $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$. **Угол** между путями γ_1, γ_2 в p есть число

$$\measuredangle(\gamma_1, p, \gamma_2) := \lim_{t,s\to 0} \theta(\gamma_1(t), p, \gamma_2(s)),$$

если такой предел существует (в противном случае, говорится, что **угол между γ_1 и γ_2 не существует**). **Верхний угол** есть

$$\measuredangle_{\sup}(\gamma_1, p, \gamma_2) := \limsup_{t,s\to 0} \theta(\gamma_1(t), p, \gamma_2(s)),$$

где $\limsup$ **обозначает супремум всех предельных точек последовательностей $\theta(\gamma_1(t_i), p, \gamma_2(s_j))$, для всех t_i, s_j сходящихся к 0.**

Пространства Александрова (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть a, b, c – точки на пространстве (M, d) со строго внутренней метрикой, $r = d(a, b)$, а $\gamma: [0, r] \to M$ – кратчайшая с геодезической параметризацией, соединяющая точки (a, b). Рассмотрим функцию $d_c: [0, r] \to \mathbb{R}^{\geqslant 0}$, переводящую t в $d(c, \gamma(t))$. Пусть $\triangle(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) \subset \mathbb{R}^2$ – треугольник сравнения, а $d_{\bar{c}}: [0, r] \to \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ – функция, переводящая t в $d(\bar{c}, \bar{\gamma}(t))$, где $\bar{\gamma}: [0, r] \to \mathbb{R}^2$ обозначает сторону треугольника сравнения с нормальной параметризацией. Функция $d_{\bar{c}}$ называется **функцией сравнения**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пространство M называется **пространством неотрицательной/неположительной кривизны в целом**, если для любых a, b, c, функция сравнения удовлетворяет неравенству $d_c \geqslant d_{\bar{c}}$ (соответственно, $d_c \leqslant d_{\bar{c}}$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пространство M называется **пространством Александрова неотрицательной/неположительной кривизны**, если у каждой точки есть окрестность неотрицательной/неположительной кривизны в целом.

ЗАМЕЧАНИЕ: Пространства неположительной кривизны в целом также называются **CAT(0)-пространствами** (в честь Эли Картана, Д. А. Александрова и В. А. Топоногова).

Условие монотонности углов (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\gamma_1, \gamma_2 : [0, a] \to M$ – кратчайшие в M, $\gamma_i(0) = p$. Говорится, что **в M выполнено условие монотонности углов (для неположительной/неотрицательной кривизны)**, если угол $\theta(\gamma_1(s), p, \gamma_2(t))$ монотонно возрастает/убывает как функция от s, t.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Условие монотонности углов для неположительной/неотрицательной кривизны **равносильно неположительности/неотрицательности кривизны в целом.**

СЛЕДСТВИЕ: Пусть M – пространство Александрова. **Тогда углы между геодезическими кратчайшими в M всегда определены.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Угол $\theta(\gamma_1(t), p, \gamma_2(s))$ – монотонная функция s, t.
■

Условие сравнения углов (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть a, b, c – три точки в метрическом пространстве, а $\triangle(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ – треугольник сравнения. Рассмотрим кратчайшие γ_1, γ_2, соединяющие a с b и a с c. **Условие сравнения углов для неположительной кривизны** есть неравенство $\measuredangle(\gamma_1, a, \gamma_2) \leqslant \measuredangle(\overline{cab})$. **Условие сравнения углов для неотрицательной кривизны** есть неравенство $\measuredangle(\gamma_1, a, \gamma_2) \geqslant \measuredangle(\overline{cab})$ плюс равенство $\measuredangle(\gamma_+, p, \mu) + \measuredangle(\gamma_-, p, \mu) = \pi$ для любых смежных углов $\measuredangle(\gamma_+, p, \mu)$ и $\measuredangle(\gamma_-, p, \mu)$.

ТЕОРЕМА: **Условие сравнения углов равносильно ограничению на кривизну с тем же знаком.**

Выпуклые функции

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Подмножество $U \subset M$ метрического пространства называется **выпуклым**, если для любых точек $x, y \in U$, любая кратчайшая, соединяющая x и y, содержится в U. **Граница** U есть множество $\bar{U} \cap \overline{(M \backslash U)}$, полученное как пересечение замыкания U и его дополнения. Выпуклое подмножество **строго выпукло**, если его граница не содержит нетривиальных кратчайших.

ПРИМЕР: Функция $\varphi : [0, a] \to \mathbb{R}$ **выпукла тогда и только тогда, когда $\{(x, y) \mid y \geqslant \varphi(x)\}$ – выпуклое подмножество в $\mathbb{R}^2$.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Функция на метрическом пространстве называется **выпуклой**, если ее ограничение на любой отрезок кратчайшей выпукло, и **строго выпуклой**, если ее ограничение на любой отрезок кратчайшей $I = [0, a]$ не линейно ни на каком открытом подмножестве $I_1 \subset T$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Для любой (строго) выпуклой функции $\varphi : M \to \mathbb{R}$, **множество $\varphi^{-1}(] - \infty, c])$ выпуклое (строго выпуклое)**

■

Выпуклые функции в CAT(0)-пространствах

УТВЕРЖДЕНИЕ: Определим функцию $d_z : M \to \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ на метрическом пространстве формулой $d_z(x) := d(z,x)$. **Пусть M – CAT(0)-пространство. Тогда d_z строго выпукла.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Пусть $\gamma : [0,t] \to M$ – кратчайшая, соединяющая a и b, а $\triangle(\bar{a},\bar{b},\bar{z})$ – треугольник сравнения. Тогда $d_z \leqslant d_{\bar{z}}$, но последняя функция выпукла, что дает

$$d_z(\lambda t) \leqslant d_{\bar{z}}(\lambda t) < \lambda d_{\bar{z}}(0) + (1-\lambda)d_{\bar{z}}(t) = \lambda d_z(0) + (1-\lambda)d_z(t). \quad \blacksquare$$

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть d_z строго выпукла для любого $z \in M$. Тогда **z соединяется с любой точкой M не более чем одной кратчайшей.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Пусть существуют две кратчайшие A и B, соединяющие z и y, а a и b – середины этих кратчайших. Если a и b всегда совпадают, доказывать нечего.

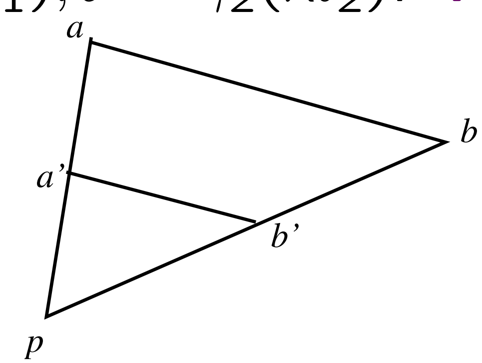
Если же они не совпадают, рассмотрим кратчайшую C, соединяющую a и b. Функция d_z строго выпукла на C, из чего следует, что для любой $c \in C$, $d(z,c) < 1/2d(z,y)$. По той же причине, $d(y,c) < 1/2d(z,y)$. Это противоречит неравенству треугольника:

$$d(y,c) + d(z,c) < 1/2d(z,y) + 1/2d(z,y) = d(z,y). \quad \blacksquare$$

Расстояние до геодезической в CAT(0)-пространстве

ЛЕММА: (лемма о выпуклости) Пусть $\gamma_i: [0,t_i] \to M$ – кратчайшие геодезические в CAT(0)-пространстве, а $\kappa: [0,1] \to \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ переводит $u \in [0,1]$ в $d(\gamma_1(t_1u), \gamma_2(t_2u))$. **Тогда κ выпукла.**

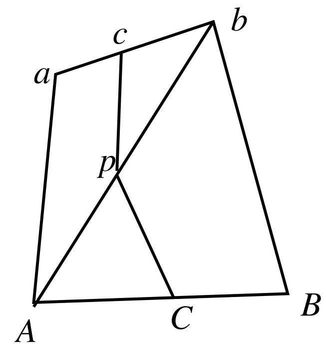
Доказательство. Шаг 1: Пусть $\gamma_i: [0,t_i] \to M$ – кратчайшие геодезические в CAT(0)-пространстве, $\gamma_i(0) = p$, $\gamma_1(t_1) = a, \gamma_2(t_2) = b$. Выберем $0 < \lambda < 1$, и пусть $a' = \gamma_1(\lambda t_1), b' = \gamma_2(\lambda t_2)$. **Тогда $d(a',b') \leqslant \lambda d(a,b)$,**



в силу монотонности углов.

Расстояние до геодезической в CAT(0)-пространстве (продолжение)

Шаг 2: Пусть a, b, A, B – точки в CAT(0)-пространстве, c, C – середины кратчайших, соединяющих a, b и A, B, а p – середина кратчайшей, соединяющей A и b.



Применив шаг 1, получим, что $d(c,p) + d(p,C) \leqslant \frac{1}{2}(d(a,A) + d(b,B))$, а из неравенства треугольника следует $d(c,C) \leqslant d(c,p) + d(p,C)$. **Это дает неравенство $\kappa(1/2) < \frac{1}{2}(\kappa(0) + \kappa(1))$.**

Шаг 3: Получаем, что для любого отрезка $[a,b] \subset [0,1]$,

$$\kappa\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}(\kappa(a) + \kappa(b)).$$

Шаг 4: Для любой непрерывной функции $\kappa : [0,1] \to \mathbb{R}^{\geqslant 0}$, **неравенство $\kappa(\frac{a+b}{2}) \leqslant \frac{1}{2}(\kappa(a) + \kappa(b))$ влечет выпуклость** (проверьте). ■

Равномерная сходимость геодезических

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Определим **расстояние** между функциями $\gamma_i : [0, t_i] \to M$ по формуле $d_\Gamma(\gamma_1, \gamma_2) := \sup_x d\left(\gamma_1(x/t_1), \gamma_2(x/t_2) f_2(x)\right)$.

УПРАЖНЕНИЕ: Проверьте, что это метрика.

ТЕОРЕМА: Пусть M – CAT(0)-пространство, а $\gamma_i : [0, t_i] \to M$ – последовательность кратчайших геодезических, такая, что концы $a_i := \gamma_i(0)$, $b_i := \gamma_i(t_i)$ сходятся к точкам a, b. Пусть $\gamma : [0, t] \to M$ – кратчайшая геодезическая, соединяющая a и b. Тогда **последовательность γ_i равномерно сходится к γ.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: В силу леммы о выпуклости, $d_\Gamma(\gamma_i, \gamma) = \max(d(a_i, a), d(b_i, b))$, то есть **сходимость γ_i равносильна сходимости их концов.** ■

ЗАМЕЧАНИЕ: В доказательстве использовалось следующее полезное утверждение. Пусть γ, γ' – кратчайшие геодезические в CAT(0)-пространстве, а a, b и a', b' – их концы. Тогда $d_\Gamma(\gamma, \gamma') = \max(d(a, a'), d(b, b'))$

СЛЕДСТВИЕ: Обозначим за $\Gamma_p(M)$ пространство кратчайших геодезических с началом в p и метрикой d_Γ, и пусть $\pi : \Gamma_p(M) \to M$ отображает геодезическую в ее второй конец. **Тогда π – изометрия.** ■

Гомотопии и пространство кратчайших геодезических

Зафиксируем точку p в CAT(0)-пространстве. Пусть $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, а $P_\lambda : M \to M$ отображает геодезическую $\gamma : [0, t] \to M$ в $\gamma\big|_{[0,\lambda t]}$.

ЗАМЕЧАНИЕ: На $M \cong \Gamma_p(M)$ это отображение определяется следующим образом. Для какой-то точки $x \in M$, рассмотрим кратчайшую $\gamma_x : [0, d(p, x)] \to M$, соединяющую p с x. **Тогда $P_\lambda : M \to M$ отображает x в $\gamma_x(\lambda d(p, x))$.**

ЗАМЕЧАНИЕ: В силу того, что M изометрично пространству геодезических с началом в p, **P_λ задает непрерывное отображение из $M \times [0, 1]$ в M.**

СЛЕДСТВИЕ: **P_λ задает гомотопию между тождественным отображением из M в себя и отображением, переводящим M в $\{p\}$.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Мы доказали, что **все CAT(0)-пространства стягиваемы.**

Радиус выпуклости

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M – пространство Александрова неположительной кривизны. **Нормальный шар** в M есть шар $B_\varepsilon(x)$, который является CAT(0)-пространством.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M – пространство Александрова неположительной кривизны. **Радиус выпуклости** в точке $x \in M$ есть супремум всех ε таких, что шар $B_\varepsilon(x)$ – нормальный. Обозначим радиус выпуклости за $\rho(x)$.

ЗАМЕЧАНИЕ: **Функция $x \to \rho(x)$ 1-липшицева,** в силу стандартного аргумента.

ЗАМЕЧАНИЕ: Общая форма "стандартного аргумента". Пусть в множестве всех шаров есть подмножество $\mathfrak{S}$ такое, что для каждого шара $B_r(x) \in \mathfrak{S}$, все шары, содержащиеся в $B_r(x)$, тоже принадлежат $\mathfrak{S}$. **Тогда функция $\rho_{\mathfrak{S}}(x) := \sup_r\{r \mid B_r(x) \in \mathfrak{S}\}$ 1-липшицева.**

УПРАЖНЕНИЕ: **Докажите это**.

Кратчайшие и геодезические

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Геодезическая** **(не обязательно кратчайшая)** есть путь $\gamma : [a,b] \to M$ такой, что у каждой точки $x \in [0,t]$ есть связная окрестность U_x такая, что $\gamma\big|_{U_x}$ – кратчайшая геодезическая. Обозначим за $\Gamma(M)$ пространство всех геодезических, с метрикой d_γ, и за $\Gamma_p(M)$ пространством геодезических с началом в p.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Радиус выпуклости** для множества $Z \subset M$ есть $\inf_{z\in Z} \rho(z)$, где ρ есть радиус выпуклости в точке z.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть $\gamma : [0,t] \to M$, $\gamma' : [0,t'] \to M$ – геодезические в пространстве Александрова неположительной кривизны, радиус выпуклости γ равен ε, а $d_\Gamma(\gamma,\gamma') < \varepsilon$. Определим $\kappa : [0,1] \to \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ по формуле $\kappa(u) := d(\gamma(ut), \gamma'(ut'))$. **Тогда κ – выпуклая функция.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: **Выпуклость – локальное свойство,** а локально γ и γ' разбиваются в объединение сегментов кратчайших, которые лежат в нормальных шарах. ■

Кратчайшие и геодезические (продолжение)

СЛЕДСТВИЕ: Пусть $\gamma: [0,t] \to M$, $\gamma': [0,t'] \to M$ – геодезические в пространстве Александрова неположительной кривизны, радиус выпуклости γ равен ε, а $d_\Gamma(\gamma,\gamma') < \varepsilon$. **Тогда расстояние между геодезическими есть максимум расстояния между концами.**

СЛЕДСТВИЕ: Рассмотрим отображение $\Gamma_p(M) \xrightarrow{\pi} M$, переводящее геодезическую в ее второй конец. Пусть ε – радиус выпуклости для γ. Тогда **для каждого ε-шара $B_\varepsilon(\gamma) \subset \Gamma_p(M)$, ограничение $\pi\big|_{B_\varepsilon(\gamma)}$ задает изометрию $B_\varepsilon(\gamma)$ и шара $B_\varepsilon(\pi(\gamma))$.**

Теорема Картана-Адамара

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Полное, односвязное пространство Александрова неположительной кривизны называется **пространством Адамара**

ТЕОРЕМА: (Картан-Адамар) Пусть M – пространство Адамара. Рассмотрим отображение $\Gamma_p(M) \stackrel{\pi}{\to} M$, переводящее геодезическую в ее второй конец. **Тогда π – гомеоморфизм.**
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: См. следующий слайд.

СЛЕДСТВИЕ: Геодезическая, соединяющая две точки пространства Адамара, единственна. ■

СЛЕДСТВИЕ: Каждое пространство Адамара стягиваемо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Аргумент, который доказывает стягиваемость CAT(0)-пространств, работает и в этой ситуации. ■

Нетривиальное следствие из теоремы Картана-Адамара:

ТЕОРЕМА: Любое пространство Адамара является CAT(0)-пространством.

Доказательство см. в листочках.

Доказательство теоремы Картана-Адамара

ТЕОРЕМА: (Картан-Адамар) Пусть M – полное пространство Александрова неположительной кривизны. Рассмотрим отображение $\Gamma_p(M) \xrightarrow{\pi} M$, переводящее геодезическую в ее второй конец. **Тогда π – накрытие.**

Доказательство. Шаг 1: Пусть $X \to Y$ – локальная изометрия полных метрических пространств с внутренней метрикой, причем у каждой точки есть окрестность, в которой геодезические единственны. Мы говорим, что имеет место **принцип накрывающей гомотопии для геодезических:** для каждой геодезической γ в Y, поднятие γ в X существует, и единственным образом определяется значением $\gamma(t)$ для какого-то $t \in \mathbb{R}$.

Шаг 2: Пусть $X \to Y$ – локальный гомеоморфизм, удовлетворяющий принципу накрывающей гомотопии для геодезических, а у каждой точки Y есть геодезически выпуклая окрестность. **Тогда $X \to Y$ – накрытие.**

Шаг 3: Принцип накрывающей гомотопии для геодезических выполнен для $\Gamma_p(M) \xrightarrow{\pi} M$. Действительно, рассмотрим нормальный шар B в M, и пусть B_1 – связная компонента его прообраза. Рассмотрим геодезическую τ, замкнутую в B. Обозначим за $\tau_0 \subset B_1$ объединение всех связных сегментов поднятий геодезической τ, которые проходят через заданную точку $x \in B_1$. Геодезическая τ поднимается в B_1 локально, поскольку π это локальная изометрия, значит, $\pi(\tau_0)$ открыт в τ. предел геодезических это геодезическая, значит, $\pi(\tau_0)$ замкнут в B_1. Мы получили принцип накрывающей гомотопии для геодезических, лежащих в B. Склеивание геодезических из сегментов дает принцип накрывающей гомотопии для всех геодезических. ■