Метрическая геометрия 8: квазиизометрии

Миша Вербицкий

25 апреля, 2016

НМУ

Квазиизометрии

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Отображение $f: X \to Y$ называется **билипшицевым с константой C**, или просто **билипшицевым**, если это биекция, причем f и f^{-1} C-липшицевы (то есть удовлетворяют $d(f(x), f(y)) \leqslant Cd(x,y)$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пространства X и Y **квазиизометричны**, если для какого-то $\varepsilon > 0$ в X и в Y существуют ε-сети X_ε и Y_ε, между которыми есть билипшицево отображение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Отображение $f: X \to Y$ метрических пространств называется **квазиметрическим**, если для каких-то констант C, $\varepsilon > 0$, имеем $d(f(x), f(y)) \leqslant Cd(x,y) + \delta$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Квазиметрическое отображение не обязательно непрерывно.

Квазиизометрии и квазиметрические отображения

ТЕОРЕМА: Пусть X, Y – метрические пространства. **Тогда следующие условия равносильны:**
(а) Существуют квазиметрические отображения $f: X \to Y$, $g: Y \to X$, и константа $A > 0$ такая, что $d(gf(x), x) < A$ **и** $d(fg(y), y) < A$ **для любых** $x \in X, y \in Y$**.**
(б) X **и** Y **квазиизометричны.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: (б) $\Rightarrow$ (а): Пусть N_X, N_Y – ε-сети в X, Y, а $\varphi: N_X \to N_Y$ - билипшицево отображение. Выберем проекции $\Pi_X: X \to N_X$, $\Pi_Y: Y \to N_Y$, такие, что в каждую точку сети попадают элементы из ее ε-окрестности. **Тогда** $f := \Pi_X \circ \varphi$ **и** $g := \Pi_Y \circ \varphi^{-1}$ **– квазиизометрии, причем** $gf = \Pi_X$**, а** $fg = \Pi_Y$**.**

Доказательство (a) $\Rightarrow$ (b) будет через слайд.

СЛЕДСТВИЕ: **Квазиизометрия – отношение эквивалентности.** ■

Квазиизометрии и ε-сети

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: ε-сеть N называется **δ-разделенной**, если для любых неравных $a, b \in N$, имеем $d(a,b) > \delta$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть N – ε-сеть в метрическом пространстве. Тогда **из N можно выбрать ε-разделенную 2ε-сеть.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: См. листочек 1. ■

ЛЕММА: Пусть $f: M \to M'$ – квазиметрическое отображение. Тогда **существует $B > 0$ такое, что для каждой B-разделенной $2B$-сети, отображение $f\big|_{N_X}$ липшицево.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Пусть $d(f(x), f(y)) \leqslant Cd(x,y) + \delta$. Тогда надо взять $B > \frac{1}{2}C\delta$, и $f\big|_{N_X}$ будет $2C$-липшицево. ■

Квазиизометрии и ε-сети (продолжение)

ТЕОРЕМА: Пусть X, Y – метрические пространства. **Тогда следующие условия равносильны:**

(а) Существуют квазиметрические отображения $f: X \to Y$, $g: Y \to X$, и константа $A > 0$ такая, что $d(gf(x), x) < A$ **и** $d(fg(y), y) < A$ **для любых** $x \in X, y \in Y$**.**

(б) X **и** Y **квазиизометричны.**

Доказательство (а) $\Rightarrow$ (б). Шаг 1: В силу предыдущей леммы, **достаточно построить в** X**,** Y **такие** B**-сети** N_X, N_Y**, что** $f(N_X) = N_Y$, для достаточно большого $B \gg 0$.

Шаг 2: Выберем в X B-разделенную $2B$-сеть N_X, для $B > A$. Поскольку fg переводит каждую точку N_X в точку из ее A-окрестности, $f\big|_{N_X}$ **биективно.**

Шаг 3: Пусть $N_Y := f(N_X)$. Тогда $g(N_Y) = fg(N_X)$ есть $A + B$-сеть в X. Осталось убедиться, что N_Y есть ε-сеть в Y. Для каждой точки $x := g(y) \in X$ найдется $x_0 := g(y_0) \in g(N_Y)$ такая, что $d(x, x_0) < A + B$. Но поскольку g искажает расстояния не более, чем линейно, найдутся C и δ такие, что $d(y, y_0) < Cd(x, x_0) + \delta = C(A + B) + \delta$. **Мы доказали, что** N_Y **есть** $[C(A + B) + \delta]$**-сеть.** ■

Метрика слов на группе

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Набор образующих конечно-порожденной группы G есть конечное множество элементов S, мультипликативно порождающих G. В дальнейшем, **мы будем всегда предполагать, что $s \in S \Leftrightarrow s^{-1} \in S$.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть G – группа, $\{s_i\}$ – набор образующих. **Граф Кэли** пары $(G, \{s_i\})$ есть граф, вершины которого – элементы G, а ребра соединяют точки вида g и gs_i. Положим длину ребер графа равной 1. Этот метрический граф называется **графом Кэли.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Метрика слов на группе Γ с набором образующих S есть метрика d_S, индуцированная с графа Кэли.

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть самое короткое разложение вида $\gamma = \prod_i s_i$ имеет длину i. **Тогда $d_S(1, \gamma) = i$.** Именно поэтому d_S называется "метрика слов".

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть S, S' – наборы образующих, причем $\max_{s' \in S'} d_S(1, s') = C$. **Тогда тождественное отображение $(\Gamma, d_S) \to \Gamma, d_{S'})$ C-липшицево.** ■

СЛЕДСТВИЕ: Для любой конечно-порожденной группы, все ее графы Кэли квазиизометричны. ■

Кратчайшие в метрическом пространстве (повторение)

Определение: Пусть $\gamma: [0,\alpha] \to M$ - кратчайшая, соединяющая x и y, причем

$$d(\gamma(x), \gamma(y)) = |x - y|.$$

Такая кратчайшая называется **кратчайшей геодезической**, а соответствующая параметризация - **геодезической параметризацией**.

ЗАМЕЧАНИЕ: Геодезическая кратчайшая – то же самое, что изометрическое вложение из отрезка в M.

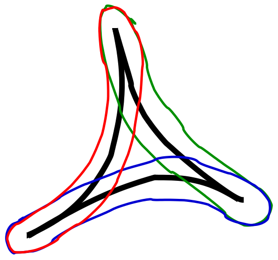
ТЕОРЕМА: Пусть M - локально компактное, полное пространство с внутренней метрикой, а $x_0, x_1 \in M$. **Тогда существует кратчайшая геодезическая, соединяющая x_0 и x_1.** ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Кратчайшая, соединяющая две точки a, b метрического пространства, обозначается $[a, b]$, а ее длина обозначается $|ab| := d(a, b)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Метрика называется **строго внутренней**, если любые две точки соединяются кратчайшей. Пространство со строго внутренней метрикой называется **геодезическим**.

Тонкие треугольники (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Геодезический треугольник** $\triangle(abc)$ в метрическом пространстве есть треугольник, составленный из трех вершин a, b, c, соединенных кратчайшими, которые я буду обозначать за $[a,b],[b,c]$ и $[c,a]$ **Талия** *(en: minsize, fr: taille minimale)* треугольника есть супремум расстояния от точки z, лежащей на одной из сторон, до объединения двух других. Треугольник называется **δ-тонким** (по Рипсу), если его талия не больше δ.



ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Метрическое пространство X со строго внутренней метрикой называется **δ-гиперболическим**, если все геодезические треугольники δ-тонкие. Будем говорить, что X **гиперболично**, если оно δ-гиперболично, для какой-то константы δ.

ЗАМЕЧАНИЕ: Когда говорят **"определение А гиперболичности эквивалентно определению Б"** это значит, что **для какого-то числа $C > 0$ из δ-гиперболичности в смысле А следует $C\delta$-гиперболичность в смысле Б, а из δ-гиперболичности в смысле Б следует $C\delta$-гиперболичность в смысле А.**

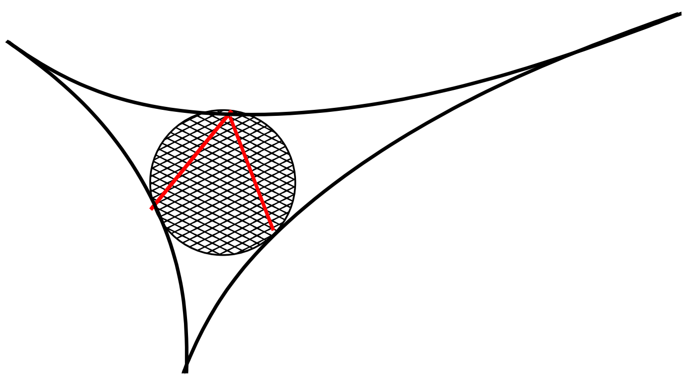
Свойства гиперболических пространств (повторение):

УТВЕРЖДЕНИЕ: Каждое 0-гиперболическое геодезическое пространство изометрично дереву (связному, односвязному графу).

ТЕОРЕМА: Пространство Лобачевского гиперболично.

Доказательство. Шаг 1: Поскольку любой геодезический треугольник лежит в плоскости, можно ограничиться плоскостью Лобачевского.

Шаг 2: Пусть $\triangle(abc)$ – геодезический треугольник на плоскости Лобачевского, а B – вписанная в него окружность. На каждой стороне треугольника (например, $[ab]$) максимум расстояния до объединения двух других сторон ограничен максимумом расстияния в точках касания вписанной окружности.



Из этого следует, что **талия треугольника удовлетворяет $T(abc) < 2R$, где R – радиус вписанной окружности.**

Гиперболичность пространства Лобачевского (повторение)

Шаг 2 (повтор): Талия треугольника удовлетворяет $T(abc) < 2R$, где R – радиус вписанной окружности.

Шаг 3: Площадь круга радиуса R растет с увеличением R неограниченно, потому что **площадь плоскости Лобачевского бесконечна** (ее можно замостить бесконечным количеством прямоугольных шестиугольников).

Шаг 4: Площадь n-угольника на плоскости Лобачевского равна $\pi(n-2)-\sum \alpha_i$, где α_i – его углы. Значит, площадь треугольника $\leqslant \pi$. Поэтому, **радиус круга, вписанного в треугольник, ограничен.** ■

Гиперболические группы (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Группа с заданной системой образующих называется **гиперболичной по Громову**, если ее граф Кэли δ-гиперболичен, для какого-то δ.

На следующей лекции я докажу такую (весьма нетривиальную) теорему.

ТЕОРЕМА: Пусть M, M' – квазиизометричные геодезические пространства, причем M гиперболическое. **Тогда M' тоже гиперболическое.**

СЛЕДСТВИЕ: Гиперболичность группы не зависит от выбора образующих: **если конечно порожденная группа гиперболична с одним набором образующих, она гиперболична со любым другим набором.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Выше доказано, что **все графы Кэли данной группы квазиизометричны.** ■

Громовское произведение (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть X – метрическое пространство с отмеченной точкой p. **Громовское произведение** $(a,b)_p$ есть $1/2(|ap|+|bp|-|ab|)$. Это число, которое измеряет отклонение неравенства треугольника от равенства.

ЗАМЕЧАНИЕ: Расстояние можно определить в терминах громовского произведения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (X,p) – множество с отмеченной точкой. Легко видеть, что расстояние на X можно определить в терминах громовского произведения $(a,b)_p$, потребовав выполнения недлинного списка аксиом. Говорится, что функция $(\cdot,\cdot)_p: \ X\times X\to\mathbb{R}^{\geqslant 0}$ **удовлетворяет аксиомам громовского произведения**, если выполнены следующие условия.

[**симметричность:**] $(a,b)_p=(b,a)_p$.
[**невырожденность:**] $(a,a)_p=(a,b)_p=(b,b)_p \ \Leftrightarrow a=b$.
[**неравенство треугольника**] $(a,b)_p+(b,c)_p\leqslant(a,c)_p+(b,b)_p$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть треугольник $\triangle(abp)$ δ-тонкий. **Тогда** $d(p,[ab])\geqslant(a,b)_p\geqslant d(p,[ab])-2\delta.$

Неравенство Громова (повторение)

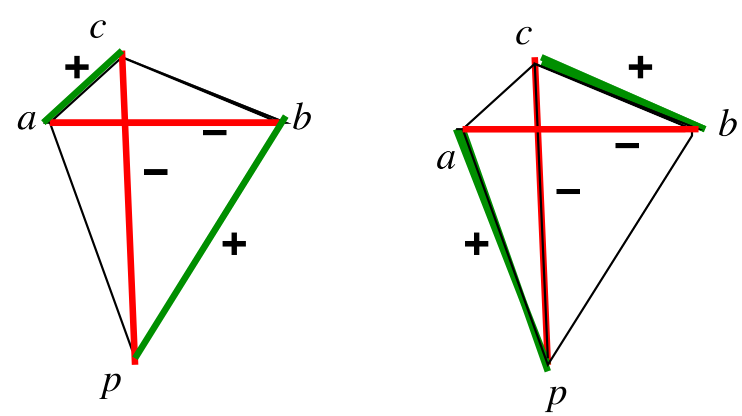
ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (X, p) – метрическое пространство с отмеченной точкой, а $a, b, c \in X$. **Неравенство Громова** есть неравенство на попарные громовские произведения:

$$(a, b)_p \geqslant \min [(a, c)_p, (b, c)_p] - \delta.$$

Когда нужно обозначить, о каком конкретно δ идет речь, говорится **δ-неравенство Громова.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Неравенство Громова равносильно следующему условию:

$$\max(|bp| + |ac| - |cp| - |ab|, |ap| + |bc| - |cp| - |ab|) \geqslant -\delta.$$



Гиперболичность по Громову (повторение)

ТЕОРЕМА: Пусть в (X, p) выполнено δ-неравенство Громова. **Тогда для любой точки p', в (X, p') выполнено 2δ-неравенство Громова.**

ТЕОРЕМА: Каждое пространство с внутренней метрикой, в котором верно 0-неравенство Громова, изометрично дереву.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть X – метрическое пространство, не обязательно геодезическое. Пространство X **гиперболично по Громову**, если выполнено δ-неравенство Громова, для какого-то δ.

ТЕОРЕМА: Гиперболичность по Громову равносильна гиперболичности в смысле тонких треугольников.

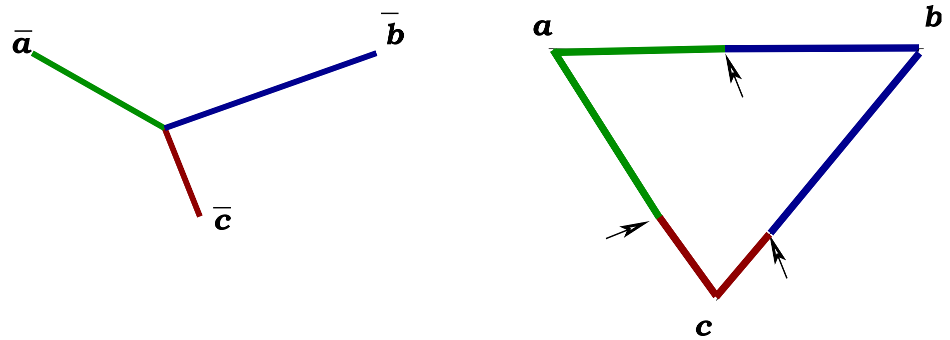
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: будет немного погодя.

ЗАМЕЧАНИЕ: Утверждение теоремы для $\delta = 0$ **доказано на прошлой лекции**. Действительно, 0-гиперболическое пространство это дерево.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть в метрическом пространстве (X, p) выполнено неравенство Громова для $\delta = 0$. **Тогда для любых $a, b, c \in X$, в тройке $(a, b)_p, (a, c)_p, (b, c)_p$ какие-то два числа равны, а третье $\geqslant$ первых двух.**

Модельный гиперболический треугольник (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\triangle(abc)$ – геодезический треугольник. Определим **модельный 0-гиперболический треугольник**, или же **модельное дерево**, $\triangle(\bar{a}\bar{b}\bar{c})$ как дерево с тремя вершинами



и тремя ребрами, соединенными в четвертой вершине, **таким образом, что соответствующие расстояния равны:** $|ab| = |\bar{a}\bar{b}|$, $|ac| = |\bar{a}\bar{c}|$, $|bc| = |\bar{b}\bar{c}|$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть $\triangle(abc)$ – геодезический треугольник в метрическом пространстве, а $\triangle(\bar{a}\bar{b}\bar{c})$ – модельное дерево. **Тогда существует отображение $\Psi : \triangle(abc) \to \triangle(\bar{a}\bar{b}\bar{c})$, задающее изометрию на каждой стороне, и переводящее вершины в соответствующие им вершины.** ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Это отображение называется **отображением сравнения**.

Кодиаметр (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\varphi: X \to Y$ – отображение метрических пространств. **Кодиаметр** $\operatorname{codiam}\varphi$ определяется формулой

$$\operatorname{codiam}(\varphi) := \sup_{x,y\in X} |d(x,y) - d(\varphi(x), \varphi(y))|.$$

Он измеряет то, насколько φ отличается от изометрии.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть $\Psi: \triangle(abc) \to \triangle(\bar{a}\bar{b}\bar{c})$ – отображение в модельный треугольник, построенное выше. Тогда

(а) **Если $\operatorname{codiam}\Psi \leqslant \delta$, то $\triangle(abc)$ δ-тонкий.**

(б) **Если $\triangle(abc)$ δ-тонкий, то $\operatorname{codiam}\Psi \leqslant 2\delta$.**

Аппроксимационное дерево

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть (X, p) – метрическое пространство с отмеченной точкой. Для набора точек $S = \{x = x_0, x_1, ..., x_n, x_{n+1} = y\} \subset X$, обозначим за $L_S(x, y) := \min_i (x_i, x_{i+1})_p$. Определим функцию $(x, y)'_p := \sup_S L_S(x, y)$, где супремум берется по всем множествам $x_1, ..., x_n \in X$. Пусть $d'(x, y) = d(x, p) + d(y, p) - 2(x, y)'_p$. **Тогда**

1. $d(x, y) \geqslant d'(x, y) \geqslant 0$

2. $(x, y)'_p$ **удовлетворяет 0-неравенству Громова:** в любой тройке $(a, b)'_p, (a, c)'_p, (b, c)'_p$ какие-то два числа равны, а третье $\geqslant$ первых двух.

3.d' **это полуметрика.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Утверждения 1-2 – тавтологии. Для 3, нужно проверить аксиомы громовского произведения: симметричность $(a, b)'_p = (b, a)'_p$ (очевидно) и неравенство треугольника

$$(a, b)'_p + (b, c)'_p \leqslant (a, c)'_p + (b, b)'_p. \qquad (*)$$

Аппроксимационное дерево (продолжение)

Мы проверяем неравенство треугольника

$$(a,b)'_p + (b,c)'_p \leqslant (a,c)'_p + (b,b)'_p. \qquad (*)$$

Шаг 1: Из 0-неравенства Громова для $(\cdot,\cdot)'_p$ следует $(a,b)'_p \leqslant (b,b)'_p$, $(c,b)'_p \leqslant (b,b)'_p$

Шаг 2: В тройке $(a,b)'_p, (a,c)'_p, (b,c)'_p$ какие-то два числа равны, а третье $\geqslant$ первых двух. Если $(a,c)'_p$ больше, оба слагаемых справа в (*) $\geqslant$ слагаемых слева. Если (для примера) $(a,b)'_p$ больше, а $(a,c)'_p = (b,c')_p$, воспользуемся $(a,b)'_p \leqslant (b,b)'_p$, и получим из шага 1

$$(a,c)'_p + (b,b)'_p \geqslant (a,c)'_p + (a,b)'_p \geqslant (a,b)'_p + (b,c)'_p.$$

■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Обозначим за X_{tr} метрическое пространство, полученное из построенной выше полуметрики (X,d') склеиванием точек x,y с $d'(x,y)=0$. Оно называется **аппроксимационным деревом для X**.

УТВЕРЖДЕНИЕ: X_{tr} **– дерево,** а тавтологическое отображение $(X,d) \xrightarrow{\nu} X_{tr}$ 1-липшицево и удовлетворяет $|px| = d'(\nu(p),\nu(x))$. ■

Неравенство мультигромова

УТВЕРЖДЕНИЕ: Предположим, что в метрическом пространстве X выполнено следующее "неравенство мультигромова": $(x,y)_p \geqslant \min_i((x_i, x_{i+1})_p) - \delta'$ **Тогда отображение $(X,d) \xrightarrow{\nu} X_{tr}$ имеет кодиаметр $\leqslant 2\delta'$.** ■

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть (X,p) – конечное метрическое пространство, в котором 2^k+2 точки, и выполнено δ-неравенство Громова. **Тогда в X выполнено неравенство мультигромова для $\delta' = k\delta$.**

Доказательство. Шаг 1: Пусть в последовательности $x_0, ..., x_n$ не больше 2^k+2 точки. Разобьем эту последовательность на две последовательности a_i и b_i длины $\leqslant 2^{k-1}+2$, причем в a_i входят точки от $x = x_0$ до $z = x_l$, а в b_i точки от $z = x_l$ до $y = x_n$. Воспользовавшись индукцией по k, можем считать, что $(x,z)_p \geqslant \min_i((a_i, a_{i+1})_p - (k-1)\delta$ и и $(z,y)_p \geqslant \min_i((b_i, b_{i+1})_p - (k-1)\delta$.

Шаг 2: В силу неравенства Громова,

$$(x,y)_p \geqslant \min((x,z)_p, (z,y)_p) - \delta \geqslant$$
$$\geqslant \min(\min_i((a_i, a_{i+1})_p, \min_i((b_i, b_{i+1})_p) - k\delta \geqslant \min_i((x_i, x_{i+1})_p - k\delta.$$

■

Неравенство Громова и тонкие треугольники

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть (X,p) – метрическое пространство со строго внутренней метрикой, в котором выполнено δ-неравенство Громова, а a', b' – точки на сторонах $[ca]$, $[cb]$ треугольника $\triangle(cab)$. Рассмотрим пространство Y из 5 точек (c,a,b,a',b'), и **пусть $\nu : Y \to Y_{tr}$ – отображение Y в его аппроксимационное дерево. Тогда $\operatorname{codiam} \nu \leqslant 2\delta$.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: В силу предыдущей теоремы, в Y выполнено 2δ-неравенство мультигромова. **Теперь $\operatorname{codiam} \nu \leqslant 2\delta$ следует из конструкции аппроксимационного дерева.** ■

ТЕОРЕМА: **Пусть в X выполнено δ-неравенство Громова. Тогда X 6δ-гиперболично.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Я буду доказывать, что кодиаметр отображения в модельный треугольник $\leqslant 6\delta$; из этого сразу следует, что все треугольники 6δ-тонкие.

Неравенство Громова и тонкие треугольники (продолжение)

Пусть a', b' – точки на сторонах $[ca]$, $[cb]$ треугольника $\triangle(cab)$, Y – пространство из 5 точек (c, a, b, a', b'), а $\nu: Y \to Y_{tr}$ – отображение Y в его аппроксимационное дерево

ТЕОРЕМА: Пусть в X выполнено δ-неравенство Громова. Тогда X 6δ-гиперболично.

Доказательство. Шаг 1: Пусть Y_{tr}^0 – минимальное связное под-дерево Y, содержащее $\nu(a), \nu(b), \nu(c)$. Тогда Y_{tr}^0 изометрично дереву с четырьмя вершинами (одной центральной и три по бокам), а **Y_{tr} лежит в 2δ-окрестности Y_{tr}^0.**

Шаг 2: Рассмотрим отображение $Y_{tr} \stackrel{\mu}{\to} Y_{tr}^0$, полученное стягиванием всех лишних веточек в точку. Тогда кодиаметр этого отображения $\leqslant 2\delta$.

Шаг 3: По построению, длины сторон Y_{tr}^0 отличаются от длин сторон модельного дерева не больше, чем на 2δ. **Значит, $d(\tau(a'), \tau(b')) - d(\mu(a'), \mu(b')) \leqslant 4\delta$, где τ – отображение треугольника $\triangle(abc)$ в модельное дерево.**

Шаг 4: Мы доказали, что $|d(a', b') - d(\mu(a'), \mu(b'))| \leqslant 2\delta$, а $|d(\tau(a'), \tau(b')) - d(\mu(a'), \mu(b'))| \leqslant 4\delta$. **Поэтому $\operatorname{codiam} \tau \leqslant 6\delta$.** ■

Неравенство Громова для гиперболических пространств

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть $\triangle(abc)$ – δ-тонкий треугольник, а p' – точка на стороне $[a,b]$, ближайшая к p. Предположим для определенности, что она лежит в δ-окрестности $[ac]$. **Тогда $(a,b)_p \geqslant (b,c)_p - 3\delta$.**

Доказательство. Шаг 1: Поскольку $d(p',[ac]) \leqslant \delta$, имеем $d(p,[a,b]) - d(p,[a,c]) \geqslant -\delta$.

Шаг 2: В прошлый раз доказали, что $(a,b)_p \leqslant d(p,[ab]) \leqslant (a,b)_p + 2\delta$. **Поэтому из шага 1 следует, что $(a,b)_p - (b,c)_p \geqslant -3\delta$.** ■

СЛЕДСТВИЕ: **В любом δ-гиперболическом пространстве выполнено 3δ-неравенство Громова.**

СЛЕДСТВИЕ: **Гиперболичность по Громову эквивалентна гиперболичности, определенной через тонкие треугольники.**