Метрическая геометрия 9: лемма Морса

Миша Вербицкий

14 мая, 2016

НМУ

Кратчайшие в метрическом пространстве (повторение)

Определение: Пусть $\gamma:\ [0,\alpha] \to M$ - кратчайшая, причем

$$d(\gamma(x), \gamma(y)) = |x-y|$$

для любых x, y. Такая кратчайшая называется **кратчайшей геодезической**, а соответствующая параметризация - **геодезической параметризацией**.

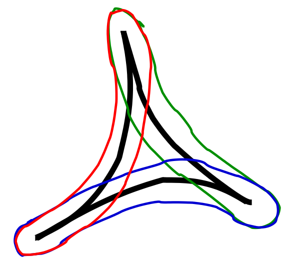
ЗАМЕЧАНИЕ: Геодезическая кратчайшая – то же самое, что изометрическое вложение из отрезка в M.

ТЕОРЕМА: Пусть M - локально компактное, полное пространство с внутренней метрикой, а $x_0, x_1 \in M$. **Тогда существует кратчайшая геодезическая, соединяющая x_0 и x_1.** ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Кратчайшая, соединяющая две точки a, b метрического пространства, обозначается $[a, b]$, а ее длина обозначается $|ab| := d(a, b)$.

Тонкие треугольники (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Геодезический треугольник** $\triangle(abc)$ в метрическом пространстве есть треугольник, составленный из трех вершин a, b, c, соединенных кратчайшими, которые я буду обозначать за $[a,b], [b,c]$ и $[c,a]$ **Талия** *(en: minsize, fr: taille minimale)* треугольника есть супремум расстояния от точки z, лежащей на одной из сторон, до объединения двух других. Треугольник называется **δ-тонким** (по Рипсу), если его талия не больше δ.



ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Метрическое пространство X со строго внутренней метрикой называется **δ-гиперболическим**, если все геодезические треугольники δ-тонкие. Будем говорить, что X **гиперболично**, если оно δ-гиперболично, для какой-то константы δ.

УТВЕРЖДЕНИЕ: **Каждое 0-гиперболическое геодезическое пространство изометрично дереву** (связному, односвязному графу).

ТЕОРЕМА: **Пространство Лобачевского гиперболично**.

Неравенство Громова (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть X – метрическое пространство с отмеченной точкой p. **Громовское произведение** $(a,b)_p$ есть $1/2(|ap|+|bp|-|ab|)$. Это число, которое измеряет отклонение неравенства треугольника от равенства.

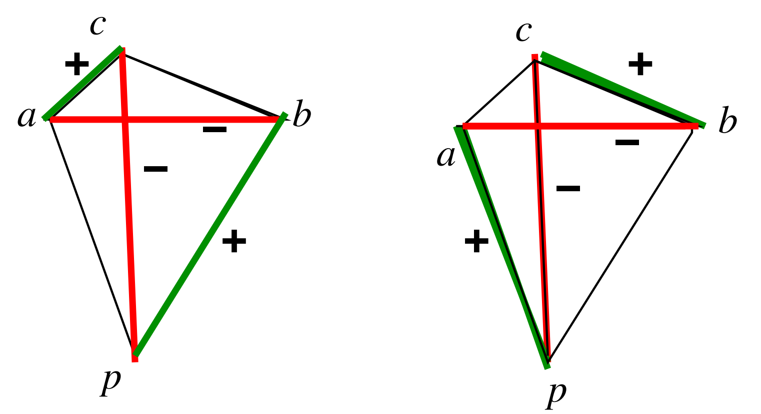
ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Неравенство Громова** есть неравенство на попарные громовские произведения:

$$(a,b)_p \geqslant \min\left[(a,c)_p,(b,c)_p\right]-\delta.$$

Когда нужно обозначить, о каком конкретно δ идет речь, говорится **δ-неравенство Громова.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Неравенство Громова равносильно следующему условию:

$$\max(|bp|+|ac|-|cp|-|ab|,|ap|+|bc|-|cp|-|ab|)\geqslant-\delta.$$



Гиперболичность по Громову (повторение)

ТЕОРЕМА: Пусть в (X, p) выполнено δ-неравенство Громова. **Тогда для любой точки p', в (X, p') выполнено 2δ-неравенство Громова.**

ТЕОРЕМА: Пусть в X выполнено δ-неравенство Громова. Тогда X 6δ-гиперболично.

СЛЕДСТВИЕ: В любом δ-гиперболическом пространстве выполнено 3δ-неравенство Громова.

СЛЕДСТВИЕ: Гиперболичность по Громову эквивалентна гиперболичности, определенной через тонкие треугольники

ЗАМЕЧАНИЕ: Когда говорят **"определение А гиперболичности эквивиалентно определению Б"** это значит, что **для какого-то числа $C > 0$ из δ-гиперболичности в смысле А следует $C\delta$-гиперболичность в смысле Б, а из δ-гиперболичности в смысле Б следует $C\delta$-гиперболичность в смысле А.**

Слабая и сильная топология на пространстве отображений

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть X, Y – метрические пространства, а $\operatorname{Map}(X,Y)$ – множество всех отображений. Для точки $x \in X$ и открытого подмножества $W \subset Y$, рассмотрим подмножество $U_{x,W} \subset \operatorname{Map}(X,Y)$, состоящее из всех отображений, переводящих x в W. **Топология поточечной сходимости**, или же **слабая топология** на $\operatorname{Map}(X,Y)$ задается предбазой вида $U_{x,W}$, $x \in X, W \subset Y$ для всех точек $x \in X$ и всех открытых подмножеств $W \subset Y$. **Топология равномерной сходимости**, обозначенная C^0, задается базой вида $U_{f,\delta}$, где $f \in \operatorname{Map}(X,Y)$, $\delta > 0$, а $U_{f,\delta}$ – множество всех отображений $g \in \operatorname{Map}(X,Y)$, таких, что $d(f(x), g(x)) < \delta$ для всех $x \in X$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Последовательность $\{f_i\} \subset \operatorname{Map}(X,Y)$ сходится к f в C_0 тогда и только тогда, когда $\lim_i \sup_{x\in X} d(f_i(x), f(x)) = 0$, и сходится к f поточечно $\Leftrightarrow$ для каждого $x \in X$, имеем $\lim_i f_i(x) = f(x)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: В C^0 предел последовательности непрерывных отображений непрерывен, а предел C-липшицевых C-липшицев.

УТВЕРЖДЕНИЕ: В слабой топологии, предел последовательности непрерывных отображений не всегда непрерывен, а **предел C-липшицевых все же C-липшицев.**

Теорема Тихонова

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть X счетно, а Y компактно. **Тогда** $\operatorname{Map}(X, Y)$ **компактно в топологии поточечной сходимости.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Дана последовательность $\{y_i(n)\}$ последовательностей точек в Y; нужно выбрать из нее подпоследовательность, в которой $\lim_n y_i(n)$ существует $\forall i$. Выбираем подпоследовательность, в которой $\lim_n y_1(n)$ сходится, оставляем из нее первый элемент, потом выбираем у этой последовательности такую, чтоб сходилось $\lim_n y_2(n)$, выбираем второй элемент, и так далее. ■

ЗАМЕЧАНИЕ: Счетность X не нужна; по теореме Тихонова, $\operatorname{Map}(X, Y)$ всегда компактно.

Теорема Арцела-Асколи

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Метрическое пространство **сепарабельно**, если оно содержит всюду плотное, счетное множество, и **ограниченно**, если у него конечный диаметр.

ЛЕММА: Пусть $X_0 \subset X$ – счетное, полное подмножество, Y компактны, X ограниченно, а $\{f_i \in \mathrm{Map}(X,Y)\}$ – последовательность C-липшицевых отображений. Предположим, что $f_i|_{X0}$ поточечно сходится. **Тогда f_i сходится в C^0-топологии, а предел $\{f_i\}$ тоже C-липшицев.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Липшицевость предела очевидна, C^0-сходимость следует. ■

СЛЕДСТВИЕ: (теорема Арцела-Асколи для липшицевых отображений) Пусть X сепарабельное, ограниченное метрическое пространство, Y компактно а $L_C(X,Y) \subset \mathrm{Map}(X,Y)$ – пространство C-липшицевых отображений. **Тогда $L_C(X,Y)$ компактно в топологии равномерной сходимости.**

Квазигеодезические метрики на графах

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **C-квазигеодезическая метрика** на графе Γ есть метрика d, которая удовлетворяет $|x-y| \leqslant d(x,y) \leqslant C|x-y|$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Рассмотрим C-квазигеодезическую метрику на Γ как отображение $\Gamma \times \Gamma \stackrel{d}{\to} \mathbb{R}$. Тогда d C-липшицева.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Рассмотрим пространство метрик на Γ как метрическое пространство с метрикой $d(d_1, d_2) := \sup_{(x,y)\in\Gamma^2} |d_1(x,y) - d_2(x,y)|$. **Тогда предел C-квазигеодических метрик – C-квазигеодическая метрика.**

СЛЕДСТВИЕ: **Пространство C-квазигеодических метрик компактно.**

Квазигеодезические

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **C-квазигеодезическая** в метрическом пространстве M есть спрямляемая кривая $\gamma : [0,a] \to M$, которое удовлетворяет $L(\gamma|_{[x,y]}) \leqslant Cd(x,y)$, где $L(\gamma|_{[x,y]})$ обозначает длину отрезка кривой.

ЗАМЕЧАНИЕ: Я буду по умолчанию считать, что **квазигеодезические параметризованы длиной кривой,** то есть $L(\gamma|_{[x,y]}) = |x-y|$.

ЗАМЕЧАНИЕ: «Лемма Морса» (в классической формулировке) есть утверждение о геометрии плоскости (или пространства) Лобачевского H. **Для каждого $C > 1$ найдется R такое, что любая C-квазигеодезическая, соединяющая a и b, лежит в R-окрестности отрезка $[a,b]$.**

Harold Marston Morse, *A fundamental class of geodesics on any closed surface of genus greater than one,* Trans. Amer. Math. Soc. 26 (1924), 25-60

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\gamma - C$-квазигеодезическая в геодезическом пространстве, а $R(\gamma)$ есть максимум расстояния от точек γ до любой из кратчайших, соединяющих концы γ. Лемма Морса утверждает, что $R(\gamma)$ **ограничено константой, которая зависит только от M и C, для любой C-квазигеодезической в гиперболическом пространстве M.**

Harold Calvin Marston Morse
(24 March 1892 - 22 June 1977)

Marston Morse and colleague at the dedication of the Institute for Advanced Study at Princeton, 1938.

Квазигеодезические в δ-гиперболических пространствах

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть $\gamma: [0,a] \to M$ – C-квазигеодезическая, соединяющая a и b. **Тогда метрика на отрезке** $[0,1]$ $d(x,y) := \frac{|\gamma(ax),\gamma(ay)|}{a}$ **является C-квазигеодезической.** Если к тому же δ-гиперболично, то **пространство** $([0,1],d)$ δ/a**-гиперболично.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Первое утверждение - тавтология, а второе очевидно, потому что неравенство Громова выполнено на $\gamma([0,a]) \subset M$.

■

ЗАМЕЧАНИЕ: Метрика d, построенная выше - не внутренняя!

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\gamma_i: [0,a_i] \to M$ – последовательность C-квазигеодезических. **Предельная метрика** есть (любой из) пределов последовательности $d(x,y) := \frac{|\gamma_i(a_ix),\gamma_i(a_iy)|}{a_i}$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Предел существует, так как метрика $d(x,y) := \frac{|\gamma(ax),\gamma(ay)|}{a}$ на $\gamma_i([0,a_i])$ квазигеодезична.

Свойства предельных метрик

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть $\gamma_i: [0, a_i] \to M$ – последовательность C-квазигеодезических в δ-гиперболическом пространстве, причем $\lim_i a_i = \infty$, а $([0,1], d)$ – соответствующая предельная метрика. **Тогда пространство $([0,1], d)$ 0-гиперболично.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Метрика $\frac{d_i}{a_i}$ $\frac{\delta}{a_i}$-гиперболична, значит, d удовлетворяет 0-неравенству Громова. ■

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть X – 0-гиперболическое пространство, а $[0,1] : \xrightarrow{\gamma} X$ – C-квазигеодезическая. **Тогда γ инъективно и осуществляет гомеоморфизм отрезка $[0,1]$ на его образ.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Вложив X в его аппроксимационное дерево X_{tr}, сведем утверждение к случаю, когда метрика на X геодезическая, и тогда X – дерево. ■

Лемма Морса: случай двуугольника

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть $\gamma_i: [0, a_i] \to M$ – последовательность C-квазигеодезических в гиперболическом пространстве, причем $\lim_i a_i = \infty$. Обозначим за X_i объединение образа γ_i и отрезка, соединяющего концы γ_i. Рассмотрим метрику d_i на графе-«двуугольнике» $\lozenge$ из двух вершин и двух ребер, полученную из $d\big|_{X_i}$ делением на a_i. **Тогда у d_i есть подпоследовательность, равномерно сходящаяся к какой-то полуметрике $\tilde{d}$, и в полуметрическом пространстве $(\lozenge, \tilde{d})$ выполнено 0-неравенство Громова.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Первое утверждение следует из Арцела-Асколи, второе - из того, что d_i удовлетворяют $\frac{\delta}{a_i}$-неравенству Громова. ■

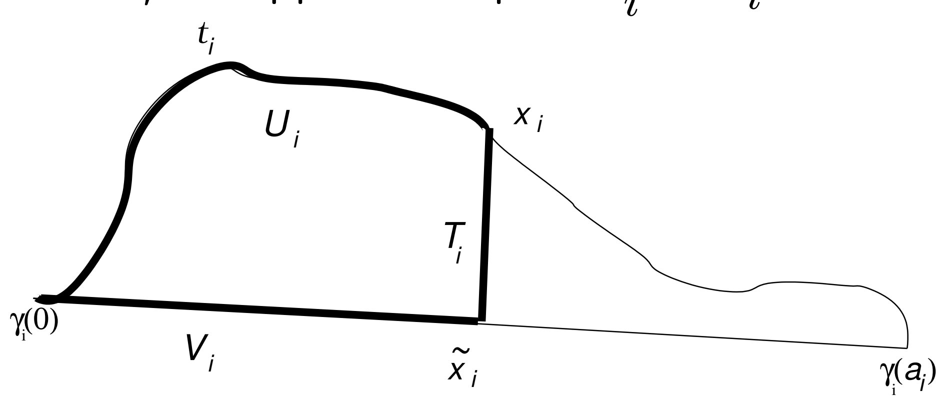
СЛЕДСТВИЕ: Пусть γ_i, – последовательность C-геодезических в δ-гиперболическом пространстве, соединяющих x_i с y_i. Пусть $\lim_i a_i = \infty$, где $a_i := d(x_i, y_i)$. Обозначим за $R(\gamma_i)$ расстояние от γ_i до геодезической $[x_i, y_i]$, соединяющей x_i с y_i. **Тогда $\lim_i \frac{R(\gamma_i)}{a_i} = 0$.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: В двуугольнике $(\lozenge, d)$, плолученном как предел двуугольников $[x_i, y_i] \cup \gamma_i$, одна из сторон отстоит от другой на $\lim_i \frac{R(\gamma_i)}{a_i}$. Но поскольку $(\lozenge, d)$ – дерево, **этот двуугольник является отрезком, то есть две его стороны склеены.** ■

Лемма Морса: случай треугольника

Пусть $\gamma_i : [0, a_i] \to M$ – последовательность C-квазигеодезических в гиперболическом пространстве, причем $\lim_i a_i = \infty$ и $\lim_i R(\gamma_i) = \infty$, но $R(\gamma_i) < \frac{a_i}{2C}$. Обозначим за $t_i \in [0, a_i]$ точку, где реализуется максимум расстояния между $\gamma_i(t_i)$ и отрезком кратчайшей, соединяющим концы γ_i. Предположим, что $d(t_i, \gamma_i(0)) \leqslant 2CR(\gamma_i)$ для всех i, и возьмем точку $x_i \in \gamma_i([0, a_i])$ на расстоянии $4CR(\gamma_i)$ от $\gamma(0)$. Пусть x_i' – ближайшая точка к x_i на отрезке кратчайшей, соединяющем концы γ_i.

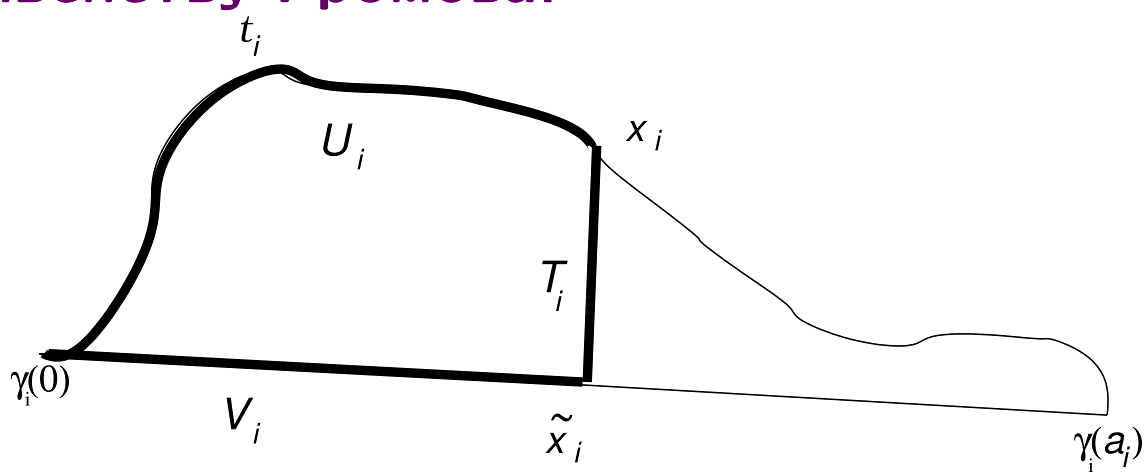
Рассмотрим криволинейный треугольник Y_i, одна сторона которого, обозначенная U_i, есть отрезок γ_i от $\gamma_i(0)$ до x_i, другая, обозначенная V_i, есть отрезок геодезической, соединяющий x_i' с $\gamma_i(0)$, третья, обозначенная T_i – отрезок геодезической, соединяющий x_i' с x_i.



Треугольник Y_i естественно отождествляется с графом $\triangle$, у которого 3 стороны и 3 вершины, соединенные последовательно. Обозначим за d_i метрику на $\triangle$, индуцированную из $(Y_i, \frac{d}{R(\gamma_i)})$.

Лемма Морса: случай треугольника (продолжение)

Сторона U_i в $(\triangle, d_i)$ есть C-квазигеодезическая, расстояние между концами которой равно $4C$, а прилежащие к ней стороны V_i и T_i – геодезические длины $V_i \leqslant 1$, $T_i \leqslant 4C+1$. Значит, **у $\{d_i\}$ есть подпоследовательность, которая равномерно сходится к полуметрике $\tilde{d}$ на $\triangle$, и $\tilde{d}$ удовлетворяет 0-неравенству Громова.**

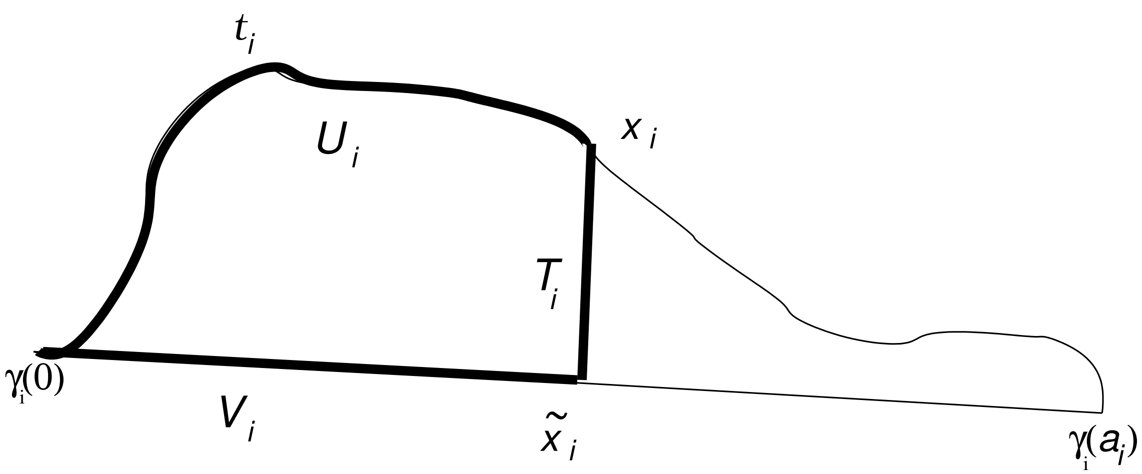


Обозначим за $U \subset (\triangle, \tilde{d})$ предел криволинейной стороны $U_i \in Y_i$, V, T – предел V_i, T_i. Тогда $|U| = 4C$, $|V| \leqslant 4C+1$, $|T| \leqslant 1$, а $(\triangle, \tilde{d})$ – дерево.

Пусть $t \in U$ – предел $t_i \in U_i$. Поскольку $d(\gamma(0), t_i) \leqslant 2CR(\gamma_i)$, точка t лежит на расстоянии $\leqslant 2C$ от одного из концов U.

Лемма Морса: случай треугольника (окончание)

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть $\triangle \to \mathbb{T}$ есть отображение треугольника с сторонами U, V, T в дерево, причем U переходит в отрезок длины $4C$, а T - в отрезок длины $\leqslant 1$. **Тогда образ любой точки U, отстоящей от точки, соединяющей V и U на расстояние $\leqslant 2C$, содержится в образе V.**

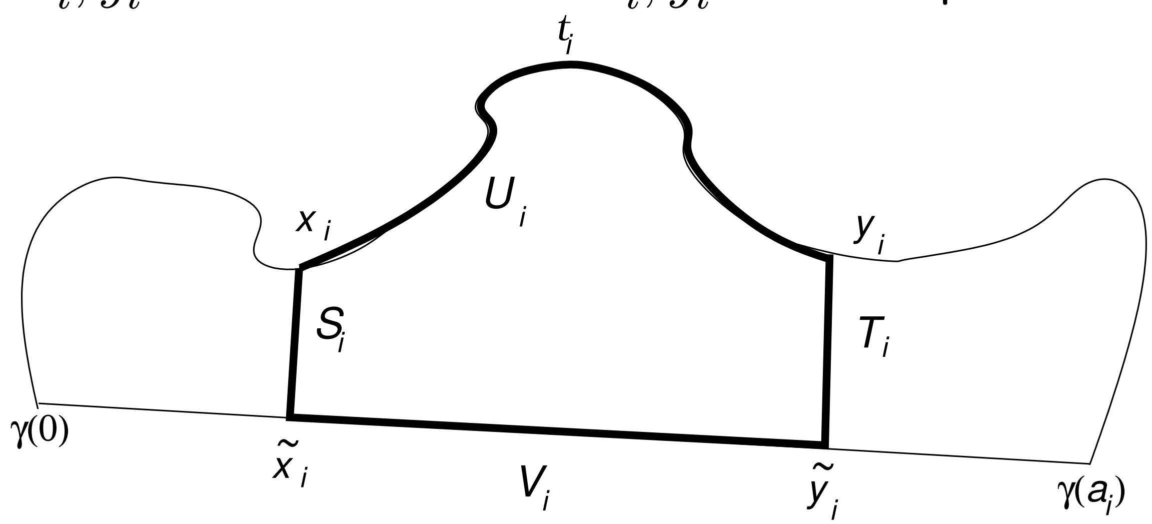


■

Мы получили $d(t, V) = 0$, но по построению, $d_i(t_i, U_i) = 1$, что приводит к противоречию. **Значит, из** $\lim_i \frac{R(\gamma_i)}{a_i} = 0$ **и** $R(\gamma_i) < \frac{a_i}{2C}$ **следует** $\lim_i R(\gamma_i) < R < \infty$**.**

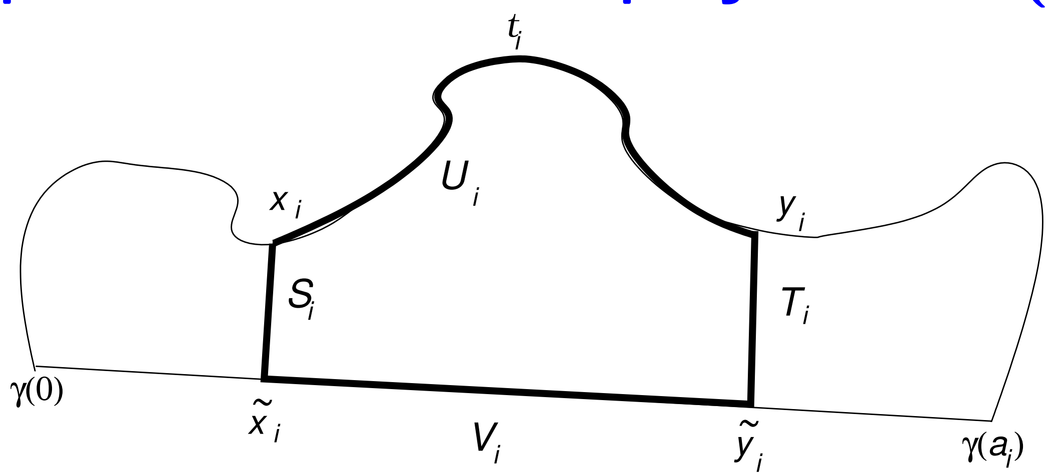
Лемма Морса: криволинейный четырехугольник

Пусть $\gamma_i : [0, a_i] \to M$ – последовательность C-квазигеодезических в гиперболическом пространстве, причем $\lim_i a_i = \infty$ и $\lim_i R(\gamma_i) = \infty$, но $R(\gamma_i) < \frac{a_i}{2C}$. Обозначим за $t_i \in [0, a_i]$ точку, где реализуется максимум расстояния между $\gamma(t_i)$ и отрезком кратчайшей, соединяющим концы γ_i. Возьмем точки x_i, y_i на $\gamma_i([0, a_i])$, такие что $d(x_i, y_i) = 4CR(\gamma_i)$, а t_i лежит в середине отрезка γ_i, соединяющего x_i, y_i. Рассмотрим четырехугольник Π_i, с одной криволинейной стороной, представляющей из себя отрезок γ_i от x_i до y_i, три другие стороны которого – отрезки геодезических $[x_i, \tilde{x}_i]$, $[\tilde{x}_i, \tilde{y}_i]$, $[\tilde{y}_i, y_i]$, где $\tilde{x}_i, \tilde{y}_i$ – ближайшие к x_i, y_i точки кратчайшей $[\gamma_i(0), \gamma_i(a_i)]$.



Четырехугольник Π_i естественно отождествляется с графом $\square$, у которого 4 стороны и 4 вершины, соединенные последовательно. Обозначим за d_i метрику на $\square$, индуцированную из $(\Pi_i, \frac{d}{R(\gamma_i)})$.

Лемма Морса: криволинейный четырехугольник (продолжение)

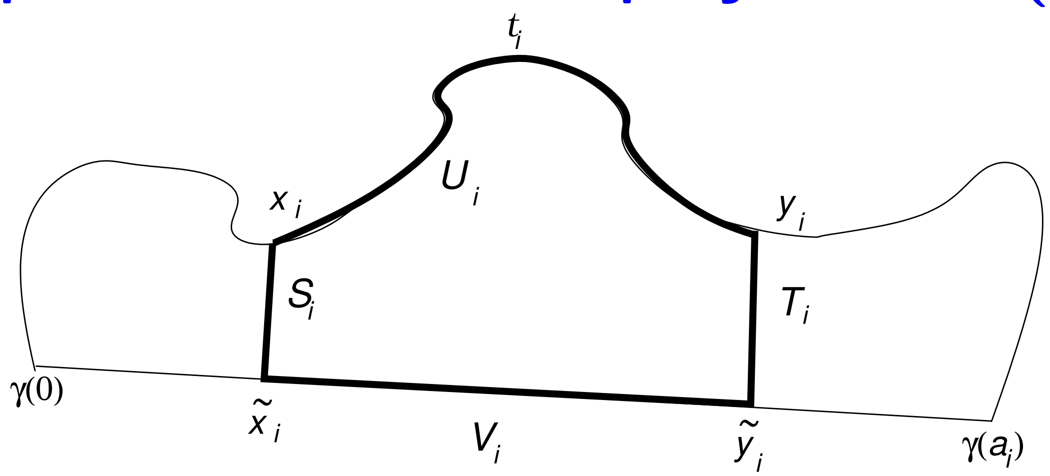


Одна из сторон $(\square, d_i)$ есть C-квазигеодезическая, расстояние между концами которой равно $4C$, две прилежащие к ней стороны имеют длину $\leqslant 1$, а противолежащая сторона – геодезическая, которая не длиннее $4C+1$. Значит, **у $\{d_i\}$ есть подпоследовательность, которая равномерно сходится к полуметрике $\tilde{d}$ на $\square$, и d удовлетворяет 0-неравенству Громова.**

Обозначим за $U \subset (\square, \tilde{d})$ предел криволинейной стороны $U_i \in \Pi_i$, V – предел противолежащей ей стороны V_i, а S, T – оставшиеся две стороны. Тогда $|U| = 4C$, $|V| \leqslant 4C+2$, $|S|, |T| \leqslant 1$, а $(\square, \tilde{d})$ – дерево.

Пусть $t \in U$ – предел $t_i \in U_i$. Поскольку $Cd(\gamma(x_i), t_i) \geqslant |x_i - t_i| = 2CR(\gamma_i)$, точка t лежит на расстоянии $\geqslant 2$ от концов U.

Лемма Морса: криволинейный четырехугольник (окончание)



УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть $\square \to \mathbb{T}$ есть отображение квадрата в дерево, причем верхняя сторона U переходит в отрезок длины $4C$, прилежащие к ней стороны - в отрезки длины $\leqslant 1$. **Тогда образ любой точки U, отстоящей от концов на расстояние > 1, содержится в образе V.** ■

Мы получили $d(t, V) = 0$, но по построению, $d_i(t_i, U_i) = 1$, что приводит к противоречию. **Значит, из $\lim_i \frac{R(\gamma_i)}{a_i} = 0$ следует $\lim_i R(\gamma_i) < R < \infty$.**

Лемма Морса: окончание доказательства

СЛЕДСТВИЕ: **Если $\gamma_i : [0, a_i] \to M$ – последовательность C-квазигеодезических в гиперболическом пространстве, то $\lim R_i(\gamma_i) < \infty$.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: $\lim_i \frac{R(\gamma_i)}{a_i} = 0$, что следует из аргумента с двуугольником, но в этом случае $\lim R_i(\gamma_i) < \infty$, что следует из рассмотрения трехугольника и четырехугольника. ■

Лемма Морса доказана. **Существует другое доказательство леммы Морса для δ-геодезических пространств, где оценка на R получается, как функция от C и δ.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Мы доказали, что квазигеодезическая лежит в R-окрестности геодезической, соединяющей ее концы: $S \subset T(R)$. **Тот же аргумент показывает, что $T \subset S(R)$.**