Метрическая геометрия 10: многогранник Рипса

Миша Вербицкий

21 мая, 2016

НМУ

Квазиизометрии (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Отображение $f: X \to Y$ называется **билипшицевым с константой C**, или просто **билипшицевым**, если это биекция, причем f и f^{-1} C-липшицевы (то есть удовлетворяют $d(f(x), f(y)) \leqslant Cd(x, y)$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пространства X и Y **квазиизометричны**, если в X и в Y существуют ε-сети X_ε и Y_ε, между которыми есть билипшицево отображение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Отображение $f: X \to Y$ метрических пространств называется **квазиметрическим**, если для каких-то констант C, $\varepsilon > 0$, имеем $d(f(x), f(y)) \leqslant Cd(x, y) + \delta$.

ТЕОРЕМА: Пусть X, Y – метрические пространства. **Тогда следующие условия равносильны:**
(а) Существуют квазиметрические отображения $f: X \to Y$, $g: Y \to X$, и константа $A > 0$ такая, что $d(gf(x), x) < A$ **и** $d(fg(y), y) < A$ **для любых** $x \in X, y \in Y$**.**
(б) X **и** Y **квазиизометричны.**

Неравенство Громова (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть X – метрическое пространство с отмеченной точкой p. **Громовское произведение** $(a,b)_p$ есть $1/2(|ap|+|bp|-|ab|)$. Это число, которое измеряет отклонение неравенства треугольника от равенства.

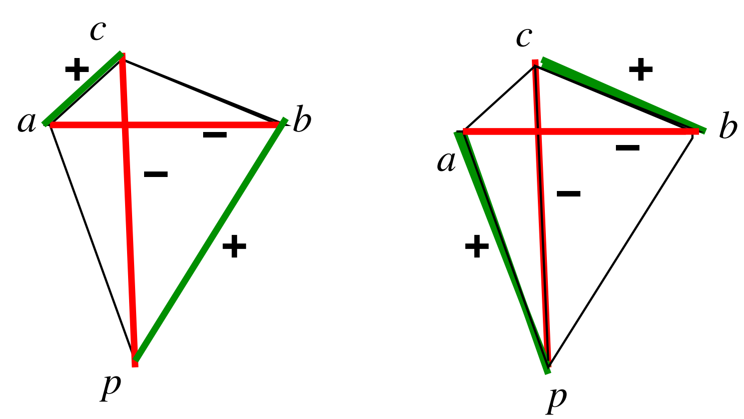
ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Неравенство Громова** есть неравенство на попарные громовские произведения:

$$(a,b)_p \geqslant \min\left[(a,c)_p,(b,c)_p\right]-\delta.$$

Когда нужно обозначить, о каком конкретно δ идет речь, говорится **δ-неравенство Громова.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Неравенство Громова равносильно следующему условию:

$$\max(|bp|+|ac|-|cp|-|ab|,|ap|+|bc|-|cp|-|ab|)\geqslant -\delta.$$



Гиперболичность по Громову (повторение)

ТЕОРЕМА: Пусть в (X,p) выполнено δ-неравенство Громова. **Тогда для любой точки p', в (X,p') выполнено 2δ-неравенство Громова.**

ТЕОРЕМА: Пусть в X выполнено δ-неравенство Громова. Тогда X 6δ-гиперболично.

СЛЕДСТВИЕ: В любом δ-гиперболическом пространстве выполнено 3δ-неравенство Громова.

СЛЕДСТВИЕ: Гиперболичность по Громову эквивалентна гиперболичности, определенной через тонкие треугольники

ЗАМЕЧАНИЕ: Когда говорят **"определение А гиперболичности эквивиалентно определению Б"** это значит, что **для какого-то числа $C>0$ из δ-гиперболичности в смысле А следует $C\delta$-гиперболичность в смысле Б, а из δ-гиперболичности в смысле Б следует $C\delta$-гиперболичность в смысле А.**

Квазигеодезические (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **C-квазигеодезическая** в метрическом пространстве M есть спрямляемая кривая $\gamma: [0,a] \to M$, которое удовлетворяет $L(\gamma|_{[x,y]}) \leqslant Cd(x,y)$, где $L(\gamma|_{[x,y]})$ обозначает длину отрезка кривой.

ЗАМЕЧАНИЕ: Я буду по умолчанию считать, что **квазигеодезические параметризованы длиной кривой,** то есть $L(\gamma|_{[x,y]}) = |x-y|$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть γ – C-квазигеодезическая в геодезическом пространстве, а $R(\gamma)$ есть максимум расстояния от точек γ до любой из кратчайших $[a,b]$, соединяющих концы γ. **Лемма Морса** утверждает, что $R(\gamma)$ **ограничено константой, которая зависит только от M и C, для любой C-квазигеодезической в гиперболическом пространстве M.**

Лемма Морса была доказана на прошлой лекции.

ЗАМЕЧАНИЕ: Также было доказано, что **максимум расстояния от точек $[a,b]$ до γ также ограничен константой, которая зависит только от M и C.**

Полиэдр Рипса

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Прямоугольный сферический симплекс диаметра d** есть пересечение C_d сферы радиуса $2\pi^{-1}d$ в $\mathbb{R}^{n+1}$ и квадранта $x_1 \geqslant 0, ..., x_{n+1} \geqslant 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть – метрическое пространство. **Многогранник Рипса** есть полиэдральное пространство $P_d(M)$, вершины которого - точки M, а n-симплексы натянуты на любые n различных точек, попарное расстояние между которыми $\leqslant d$. Введем на многограннике Рипса метрическую структуру таким образом, чтобы **все стороны были равны d, а все симплексы - изометричны прямоугольным сферическим симплексам диаметра d.**

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть M – геодезическое метрическое пространство, а $M \stackrel{\varphi}{\to} P_\delta(M)$ – естественное вложение. **Тогда $d(\varphi(x), \varphi(y)) = \delta\lceil\delta^{-1}d(x,y)\rceil$**, где $\lceil a \rceil$ обозначает минимальное целое число, которое $\geqslant a$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Используется следующее свойство прямоугольного сферического симплекса: **расстояние от вершины симплекса до любой точки противоположной стороны равно d.** ■

$+$-квазиизометрии

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Отображение $f: X \to Y$ называется **$\delta, +$-квазиметрическим**, если $d(f(x), f(y)) \leqslant d(x,y) + \delta$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **$\delta, +$-квазиизометрия** есть $\delta, +$-квазиметрическое отображение $f: X \to Y$, такое, что δ-окрестность $f(X)$ есть Y. Пространства называются **$+$-квазиизометричными**, если между ними есть $\delta, +$-квазиизометрия, для какого-то δ.

ЛЕММА: Естественное вложение $\varphi: M \to P_\delta(M)$ есть $\delta, +$-квазиизометрия.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: В самом деле, $P_\delta(M)$ лежит в δ-окрестности $\varphi(M)$, а φ искажает расстояния меньше, чем на δ. ■

$+$-квазиизометрии и гиперболичность

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть $f: X \to Y$ $\varepsilon, +$-квазиизометрия. Тогда **X δ-гиперболично $\Rightarrow$ Y $\delta + 8\varepsilon$-гиперболично.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Неравенство Громова равносильно следующему условию:

$$\max(|bp| + |ac| - |cp| - |ab|, |ap| + |bc| - |cp| - |ab|) \geqslant -\delta.$$

Тогда для любых точек в $f(X)$, имеем $\max(|bp| + |ac| - |cp| - |ab|, |ap| + |bc| - |cp| - |ab|) \geqslant -\delta - 4\varepsilon$, а любые 4 точки в Y отстоят от каких-то точек в $f(X)$ не больше, чем на ε, что дает $\max(|bp| + |ac| - |cp| - |ab|, |ap| + |bc| - |cp| - |ab|) \geqslant -\delta - 8\varepsilon$. ■

$+$-квазиизометрии и квазиизометрии

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: ε-сеть N называется **δ-разделенной**, если для любых неравных $a, b \in N$, имеем $d(a,b) > \delta$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть N – ε-сеть в метрическом пространстве. Тогда **из N можно выбрать ε-разделенную 2ε-сеть.**

ТЕОРЕМА:
$+$-квазиизометричные пространства квазиизометричны.

Доказательство. Шаг 1: Пусть $f: X \to Y$ – $\delta, +$-квазиизометрия. Обозначим за $Z(\varepsilon)$ ε-окрестность множества Z. **Поскольку образы точек, отстоящих на λ, отстоят на расстояние $\leqslant \lambda + \delta$, имеем $f(Z(\lambda)) \subset f(Z)(\lambda + \delta)$.**

Шаг 2: Выберем в X 4δ-разделенную 8δ-сеть N_X. Поскольку $N_X(8\delta) = X$, имеем $Y = f(X)(\delta) = f(N_X(8\delta))(\delta) \subset f(N_X)(9\delta)(\delta)$. **Значит, $f(N_X)$ есть 10δ-сеть.**

$+$-квазиизометрии и квазиизометрии (продолжение)

ТЕОРЕМА:
$+$-квазиизометричные пространства квазиизометричны.

Доказательство. Шаг 1: Пусть $f: X \to Y - \delta, +$-квазиизометрия. Обозначим за $Z(\varepsilon)$ ε-окрестность множества Z. **Поскольку образы точек, отстоящих на λ, отстоят на расстояние $\leqslant \lambda + \delta$, имеем $f(Z(\lambda)) \subset f(Z)(\lambda + \delta)$.**

Шаг 2: Выберем в X 4δ-разделенную 8δ-сеть N_X. Поскольку $N_X(8\delta) = X$, имеем $Y = f(X)(\delta) = f(N_X(8\delta))(\delta) \subset f(N_X)(9\delta)(\delta)$. **Значит, $f(N_X)$ есть 10δ-сеть.**

Шаг 3: Поскольку расстояние между точками $N_X \geqslant 4\delta$, а отображение f $\delta, +$-квазиметрическое, $f: N_X \to f(N_X)$ 2-билипшицево:

$$|d(f(z), f(z')) - 2\delta| \leqslant d(z, z') \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2d(z, z') \geqslant d(z, z') + 2\delta \geqslant d(f(z), f(z')) \geqslant d(z, z') - 2\delta \geqslant 1/2 d(z, z')$$

для всех $z, z' \in N_X$. **Мы построили 2-билипшицевы ε-сети в X, Y.** ■

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что $+$-квазиизометрия есть отношение эквивалентности.

Полиэдр Рипса и разложение квазиизометрий

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть N_X есть ε-сеть в геодезическом пространстве X, d. Определим расстояние $d_{2\varepsilon}$ на N_X по формуле $d_{2\varepsilon}(x,y) = \inf_S \sum d(x_i, x_{i+1})$, где инфимум берется по всем последовательностям

$$S = \{x_0 = x, x_1, ..., x_n = y\} \subset N_X,$$

в которых $d(x_i, x_{i+1}) < 2\varepsilon$. **Тогда метрики d_ε и d на N_X билипшицевы.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Разобьем геодезическую, соединяющую x и $y \in N_X$, в $N = \lceil \varepsilon^{-1} d(x,y) \rceil$ отрезков $[z_i, z_{i+1}]$ длины $\leqslant \varepsilon$, и пусть x_i – точки N_X, лежащие на расстоянии $\leqslant \varepsilon$ от z_i. Тогда $d(x_i, x_{i+1}) \leqslant 3\varepsilon$, значит, $d(x,y) \leqslant d_{2\varepsilon}(x,y) \leqslant 3\varepsilon N \leqslant 4\varepsilon d(x,y)$. ■

СЛЕДСТВИЕ: Пусть X – геодезическое пространство, N_X – ε-сеть, а $P_{2\varepsilon}(N_X)$ – ее многогранник Рипса. **Тогда X и $P_{2\varepsilon}(N_X)$ $+$-квазиизометричны.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Метрика на вершинах $P_d(N_X)$ равна $d_{2\varepsilon}$, значит, **N_X билипшицево множеству вершин $P_d(N_X)$.** ■

СЛЕДСТВИЕ: Пусть X, Y – квазиизометрические геодезические пространства. **Тогда X, Y $+$-квазиизометричны геодезическим пространствам X', Y', которые билипшицево эквивалентны.** ■

δ-гиперболичность и квазиизометрии

ТЕОРЕМА: Пусть X, Y – квазиизометрические геодезические пространства, причем X гиперболично. **Тогда Y тоже гиперболично.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Квазиизометрия из X в Y может быть разложена в композицию $+$-квазиизометрий и билипшицева отображения между полиэдрами Рипса соответствующих ε-сетей.

Пространство, которое $+$-квазиизометрично гиперболическому, тоже гиперболично, как доказано выше. Поэтому теорема вытекает из следующего

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть $X \stackrel{f}{\to} Y$ – C-билипшицево отображение геодезических пространств. **Тогда X гиперболично $\Leftrightarrow$ Y гиперболично.**

Доказательство. Шаг 1: Пусть X δ-гиперболическое (по Рипсу), T_1, T_2, T_3 – стороны геодезического треугольника, соединяющего точки $a, b, c \in X$, а S_1, S_2, S_3 – стороны аналогичного треугольника в Y, соединяющего $f(a), f(b), f(c)$. Тогда $f^{-1}(S_i)$ – **C-квазигеодезическая. По лемме Морса, она лежит в R-окрестности T_i, и наоборот, $T_i \subset f^{-1}(S_i)(R)$.**

δ-гиперболичность и билипшицевы отображения

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть $X \overset{f}{\to} Y$ – C-билипшицево отображение геодезических пространств. **Тогда X гиперболично $\Leftrightarrow$ Y гиперболично.**

Доказательство. Шаг 1: Пусть X δ-гиперболическое (по Рипсу), T_1, T_2, T_3 – стороны геодезического треугольника, соединяющего точки $a, b, c \in X$, а S_1, S_2, S_3 – стороны аналогичного треугольника в Y, соединяющего $f(a), f(b), f(c)$. Тогда $f^{-1}(S_i)$ – **C-геодезическая, значит, она лежит в R-окрестности T_i: $f^{-1}(S_i) \subset T_i(R)$, и наоборот, $T_i \subset f^{-1}(S_i)(R)$.**

Шаг 2: В силу δ-гиперболичности X, $T_1 \subset T_2(\delta) \cup T_3(\delta)$. Это дает

$$f^{-1}(S_1) \subset T_1(R) \subset T_2(R+\delta) \cup T_3(R+\delta) \subset \\ \subset f^{-1}(S_2)(2R+\delta) \cup f^{-1}(S_3)(2R+\delta).$$

Шаг 3: Применяя f, получаем из предыдущего шага $S_1 \subset S_2(2CR+C\delta) \cup S_3(2CR+C\delta)$, **значит, пространство Y $2CR+C\delta$-гиперболично.** ■

Метрика слов на группе (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Набор образующих конечно-порожденной группы G есть конечное множество элементов S, мультипликативно порождающих G. **В дальнейшем, мы будем всегда предполагать, что $s \in S \Leftrightarrow s^{-1} \in S$.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть G – группа, $\{s_i\}$ – набор образующих. **Граф Кэли** пары $(G, \{s_i\})$ есть граф, вершины которого – элементы G, а ребра соединяют точки вида g и gs_i. Положим длину ребер графа равной 1. Этот метрический граф называется **графом Кэли.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Метрика слов на группе Г с набором образующих S есть метрика d_S, индуцированная с графа Кэли.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть самое короткое разложеие вида $\gamma = \prod_i s_i$ имеет длину i. **Тогда $d_S(1, \gamma) = i$.**

СЛЕДСТВИЕ: Пусть S, S' – наборы образующих, причем $\max_{s' \in S'} d_S(1, s') = C$. **Тогда тождественное отображение $(\Gamma, d_S) \to \Gamma, d_{S'})$ C-липшицево**.
■

СЛЕДСТВИЕ: Для любой конечно-порожденной группы, все ее графы Кэли квазиизометричны. ■

Гиперболические группы (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Группа (Γ, S) с заданной системой образующих называется **гиперболичной по Громову**, если ее граф Кэли δ-гиперболичен, для какого-то δ.

ЗАМЕЧАНИЕ: Универсальное накрытие свободной группы есть ее граф Кэли. **В силу односвязности универсального накрытия, это дерево.** Значит, **свободная группа 0-гиперболична**.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что $\mathbb{Z}^n$ **со стандартным набором образующих не гиперболична.**

ТЕОРЕМА: Если группа (Γ, S) с заданной системой образующих S гиперболична, **она гиперболична для любой другой системы образующих S'.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Группа Γ с метрикой слов d_S квазиизометрична Γ с метрикой слов $d_{S'}$. Также, Γ $+$-квазиизометрична своему графу Кэли. **Значит, графы Кэли для (Γ, S) и (Γ, S') квазиизометричны.** Поэтому гиперболичность одного графа равносильна гиперболичности другого. ■

Конечно-порожденные группы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Конечно-порожденная группа Γ называется **конечно представимой**, если Γ есть фактор свободной группы по нормальной подгруппе, натянутой на конечной набор соотношений.

УПРАЖНЕНИЕ: Постройте конечно-порожденную, но не конечно-представимую группу.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть Γ – конечно-порожденная группа с образующими $x_1, ..., x_n$. Говорится, что **в Γ разрешима проблема слов**, если существует алгоритм, который в ответ на два слова, составленных из букв x_i, сообщает, равны ли соответствующие произведения x_i в Γ.

ЗАМЕЧАНИЕ: П. С. Новиков в 1955-м году построил группу, в которй не разрешима проблема слов.

Свойства гиперболических групп

Collins, Donald J. (1986), *"A simple presentation of a group with unsolvable word problem"*, Illinois Journal of Mathematics 30 (2): 230-234,
John Pedersen's "A Catalogue of Algebraic Systems" *An explicit example of a reasonable short presentation with insoluble word problem*

$$
\begin{array}{llll}
\langle & a,b,c,d,e,p,q,r,t,k & | & \\
& p^{10}a = ap, & pacqr = rpcaq, & ra = ar, \\
& p^{10}b = bp, & p^2adq^2r = rp^2daq^2, & rb = br, \\
& p^{10}c = cp, & p^3bcq^3r = rp^3cbq^3, & rc = cr, \\
& p^{10}d = dp, & p^4bdq^4r = rp^4dbq^4, & rd = dr, \\
& p^{10}e = ep, & p^5ceq^5r = rp^5ecaq^5, & re = er, \\
& aq^{10} = qa, & p^6deq^6r = rp^6edbq^6, & pt = tp, \\
& bq^{10} = qb, & p^7cdcq^7r = rp^7cdceq^7, & qt = tq, \\
& cq^{10} = qc, & p^8ca^3q^8r = rp^8a^3q^8, & \\
& dq^{10} = qd, & p^9da^3q^9r = rp^9a^3q^9, & \\
& eq^{10} = qe, & a^{-3}ta^3k = ka^{-3}ta^3 & \rangle
\end{array}
$$

ТЕОРЕМА: Любая конечно-порожденная гиперболическая группа Γ конечно-представима. Более того, в Γ разрешима проблема слов.

Доказательство дальше.

Конечные полиэдральные пространства с орбиособенностями

ТЕОРЕМА: Пусть S – стягиваемый метрический полиэдр (с гиперболической, сферической, или плоской метрикой на симплексах), а Γ – группа, собственно действующая на S полиэдральными изометриями с конечными стабилизаторами (и свободно в общей точке). Предположим, что $X := S/\Gamma$ компактно. **Тогда Γ конечно порождена и конечно представима.**

Доказательство. Шаг 1: Обозначим за $D \subset S$ фундаментальный полиэдр действия Γ, и пусть $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} D_\gamma$ соответствующее полиэдральное разбиение S, $D_\gamma = \gamma(D)$. Каждая стягиваемая петля ξ в S **разлагается в произведение стягиваемых петель $\xi = \xi_1\xi_2\xi_3...\xi_n$, где каждый из ξ_i лежит в каком-то из D_γ, и там же стягивается.**

Шаг 2: За образующие Γ можно взять симпициальные пути в X, которые лежат в D, а за соотношения - симплициальные 2-цепи, лежащие в D, со связной границей, и поднимающиеся в X. **Их конечное число.** ■

Полиэдр Рипса стягиваем

ТЕОРЕМА: Пусть X – δ-гиперболическое (в смысле неравенства Громова) геодезическое пространство. **Тогда его полиэдр Рипса $P_d(X)$ стягиваем, для любого $d \geqslant 4\delta$.**

Доказательство. Шаг 1: Достаточно доказать, что каждый конечный подполиэдр $D \subset P_d(X)$ можно стянуть в точку в $P_d(X)$.

Шаг 2: Любой полиэдр $D \subset P_d(X)$ с вершинами, лежащими в области $U \subset X$ диаметра $\leqslant d$ стягиваем, ибо **в $P_d(X)$ присутствует симплекс, натянутый на любой набор точек из $P_d(U)$.**

Шаг 3: Пусть $p \in X$ – фиксированная точка, $D \subset P_d(X)$ конечный подполиэдр, а y_0 – вершина D, такая, что $d(p, y_0) \geqslant d(p, z)$ для любой другой вершины D. Возьмем точку y_1 на кратчайшей $[p, y_0]$, отстоящую от y_0 на $\frac{1}{2}d$. **Достаточно доказать, что D можно прогомотопировать в D_1, у которого все вершины кроме y_0 такие же, а y_0 заменяется на y_1.**

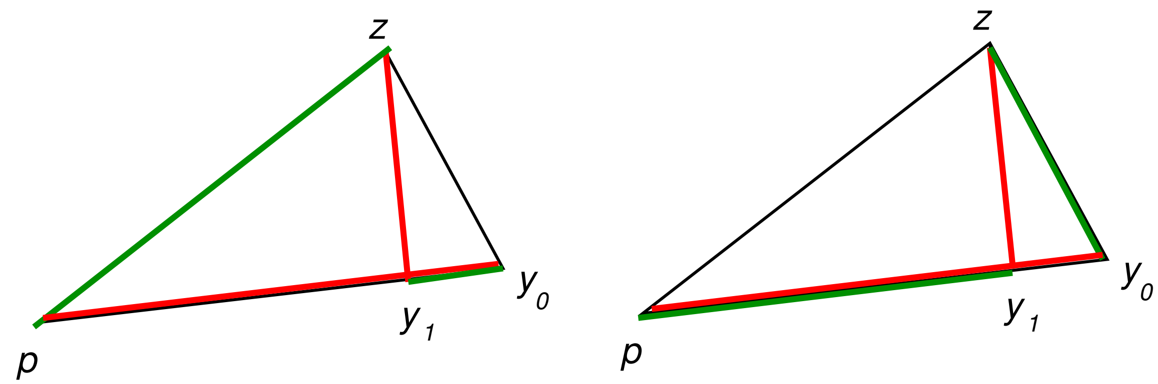
Шаг 4: Вершины z, y_0 можно соединить 1-симплексом в $P_d(X)$, если $d(z, y_0) \leqslant d$. Значит, D_1 **существует $\Leftarrow$ для каждой $z \in X$, $d(y_1, z) \leqslant \min(d, d(y_0, z))$.**

Полиэдр Рипса стягиваем (продолжение)

Мы свели стягиваемость D к следующей лемме.

ЛЕММА: Пусть p, y_0, z, $d(p, y_0) \geqslant d(p, z)$ – точки геодезического пространства, которое δ-гиперболично, $d \geqslant 2\delta$, а y_1 – точка на кратчайшей $[p, y_0]$, отстоящая от y_0 на $\frac{1}{2}d$. **Тогда $d(y_1, z) \leqslant \min(d, d(y_0, z))$.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Применим неравенство Громова для четверки точек p, y_0, z, y_1.



либо $\delta - |zy_1| - |py_0| + |y_1y_0| + |pz| \geqslant 0$,
либо $\delta - |zy_1| - |py_0| + |zy_0| + |py_1| \geqslant 0$
это дает: $\delta + |zp| - |py_1| - |zy_1| \geqslant 0$, либо $\delta + |zy_0| - |zy_1| - |y_0y1| \geqslant 0$.

В первом случае с учетом $|py_0| = |py_1| + \frac{1}{2}d \geqslant |pz|$ получаем $|zy_1| \leqslant \delta + \frac{1}{2}d \leqslant d$. Во втором случае $|zy_0| \leqslant |zy_1| - \delta + \frac{1}{2}d = |zy_1|$. ■

Конечная порожденность гиперболических групп

Этот же аргумент доказывает следующую теорему.

ТЕОРЕМА: Пусть – дискретное δ-гиперболическое пространство, $\delta \in \mathbb{Z}$, $d \geqslant 2\delta$, а $P_d(X)$ – его многогранник Рипса. **Предположим, что X есть множество вершин метрического графа со сторонами 1. Тогда $P_d(X)$ стягиваемый.** ■

ЛЕММА: Рассмотрим конечно-порожденную группу Γ как метрическое пространство с метрикой слов. **Тогда Γ действует с конечными стабилизаторами на многограннике $P_d(\Gamma)$.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Стабилизатор точки $z \in I$ в k-мерном симплексе I переставляет вершины этого симплекса, а любой элемент $\gamma \in \Gamma$, сохраняющий какую-то из вершин, равен 1. Значит, для каждого $s \in St(z)$, $s^N = \mathsf{Id}$, причем $N \leqslant r(k+1)$, где N есть максимальный порядок в симметрической группе S_{k+1}. ■

ЗАМЕЧАНИЕ: Применяя этот результат к графу Кэли, получаем, что **гиперболическая группа Γ действует с конечными стабилизаторами на стягиваемом многограннике $P_d(\Gamma)$,** причем $P_d(\Gamma)/\Gamma$ компактно.

Применения стягиваемости полиэдра Рипса

СЛЕДСТВИЕ: **Любая конечно-порожденная гиперболическая группа Γ конечно представима.** ■

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что рациональные когомологии Γ конечномерны.

ТЕОРЕМА: Пусть Γ – конечно-порожденная гиперболическая группа. **Тогда число классов сопряженности элементов конечного порядка в Γ конечно.**

Доказательство: Каждый такой элемент γ сохраняет точку $P_d(\Gamma)$, сопряженные элементы соответствуют одинаковым точкам в $P_d(\Gamma)/\Gamma$. Это задает **биекцию между элементами конечного порядка и компонентами особого множества в $P_d(\Gamma)/\Gamma$,** но $P_d(\Gamma)/\Gamma$ – конечный полиэдр, а компоненты особого множества суть подполиэдры в барицентрическом разбиении полиэдра $P_d(\Gamma)/\Gamma$, значит, их конечное число. ■

Треугольные копредставления

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть Γ – конечно-порожденная, конечно-представимая группа. Тогда существует такой набор образующих $\{x_i\}$, что соотношения в Γ "порождены треугольниками", то есть **Γ есть фактор свободной группы по нормальной подгруппе, натянутой на соотношения вида $w_{abc} := x_a x_b x_c = 1$.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Такой набор образующих называется **треугольным копредставлением**.

ЗАМЕЧАНИЕ: Петли в графе Кэли группы Γ суть соотношения вида $x_{i_1} x_{i_2} ... x_{i_N} = 1$. Если каждое соотношение в Γ есть произведение соотношений вида $g w_{abc} g^{-1}$, **каждая петля может быть разрезана на треугольники со сторонами 1,1,1.** Это **геометрическая интерпретация понятия треугольного копредставления.**

Площадь ломаной

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть Γ – группа, снабженная треугольным копредставлением. **Площадь** петли γ в графе Кэли есть минимальное число треугольников со сторонами 1,1,1, на которые можно разрезать γ. Иначе говоря, площадь замкнутой ломаной в графе Кэли есть число треугольников, потребных, чтобы затянуть эту ломаную, то есть выразить соответствующее соотношение как произведение треугольных: $W = \prod_i L_k w_{a_k b_k c_k} L_k^{-1}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть Γ – группа, снабженная треугольным копредставлением $\Gamma = Fr(x_1, ..., x_d)/\langle w_{a_1 b_1 c_1}, ..., w_{a_{d'} b_{d'} c_{d'}}\rangle$, а $\Psi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ вычислимая функция такая, что любая петля длины N имеет площадь $\leqslant \Psi(N)$. **Тогда в Γ разрешима проблема слов.**

Разрешимость проблемы слов

Доказательство. Шаг 1: Пусть петля $x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_n}$, разрезана на треугольники $w_{a_1b_1c_1}$, $w_{a_2b_2c_2}$, ..., причем треугольник $w_{a_{i+1}b_{i+1}c_{i+1}}$ приделывается к вершине $\psi(i) \in \Gamma$ треугольника за номером i. Тогда $\psi_i\psi_{i-1}^{-1}$ соответствует ломаной, соединяющей отмеченные вершины соседних треугольников, значит, $\psi_i\psi_{i-1}^{-1}$ представляется словом h_i длины $\leqslant 2$. Пусть теперь $L_k := \prod_{i=1}^k h_k$ – ломаная, соединяющая 1 и вершину ψ_k, и идущая через вершины $\psi_1, ..., \psi_{k-1}$. Воспользовавшись индукцией, обозначим за g_k петлю вида $g_{k-1}L_kw_{a_kb_kc_k}L_k^{-1}$. **Это петля в графе Кэли, ограниченная треугольниками с 1-го до k-й.**

Шаг 2: Обход петли $x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_N}$ можно получить из обхода маленьких треугольников. **Поэтому в свободной группе $Fr(x_1, ..., x_d)$ имеет место соотношение $x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_n} = g_N$.**

Шаг 3: Пусть $x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_n} = 1$ – соотношение в группе, которое надо проверить. Напишем все последовательности вида $g_1 = L_1w_{a_1b_1c_1}L_1^{-1}$, $g_2 = g_1L_2w_{a_2b_2c_2}L_2^{-1}$, ..., $g_N = g_{N-1}L_Nw_{a_Nb_Nc_N}L_N^{-1}$. Число таких последовательностей конечно, ибо на каждом шаге мы делаем конечное число выборов: выбираем треугольник $w_{a_ib_ic_i}$ и слово $h_i = \psi_i\psi_{i-1}^{-1}$ длины $\leqslant 2$.

Поэтому нам нужно перебрать не больше $(2d + d')^{\Psi(N)}$ вариантов.

■

Разрешимость проблемы слов в гиперболических группах

ТЕОРЕМА: Пусть Г – конечно-порожденная гиперболическая группа. **Тогда в Г разрешима проблема слов.**

Доказательство. Шаг 1: Выберем у Г треугольное копредставление. Предположим, что граф Кэли Г δ-гиперболичен (по Рипсу). **Достаточно доказать, что площадь кусочно-геодезической ломаной в графе Кэли с N звеньями и периметром P ограничена** $\operatorname{const} \cdot NP + \operatorname{const}' N$. Тогда площадь петли с d звеньями ограничена $\operatorname{const} \cdot d^2$, и разрешимость проблемы слов следует.

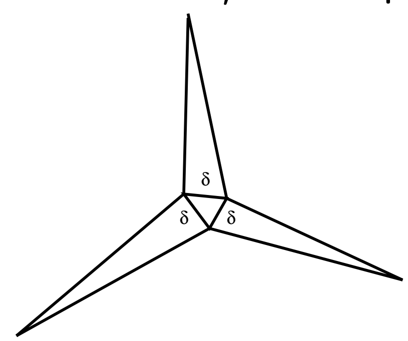
Шаг 2: **Пусть C – максимальная площадь треугольника, все стороны которого $\leqslant \delta$. Число таких треугольников конечно,** значит, C конечна.

Шаг 3: Пусть треугольник $\triangle$ в графе Кэли Г с периметром P весь лежит в δ-окрестности одной стороны (такой треугольник называется **δ-вырожденным**). **Тогда его площадь ограничена $C\lceil \delta^{-1}P\rceil$.** В самом деле, $\triangle$ можно разрезать на $\lceil \delta^{-1}P\rceil$ треугольников со стороной $\leqslant \delta$.

Разрешимость проблемы слов (продолжение)

Достаточно доказать, что площадь $\operatorname{Area}(\gamma)$ кусочно-геодезической ломаной γ в графе Кэли с N звеньями и периметром $\operatorname{Per}(\gamma)$ ограничена $\mathrm{const}\cdot N \operatorname{Per}(\gamma)+\mathrm{const}' N$.

Шаг 4: В силу δ-гиперболичности, каждый треугольник можно разрезать на три δ-вырожденных треугольника, и еще один со сторонами $\leqslant \delta$.



Значит, **площадь треугольника $\leqslant C\lceil\delta^{-1}P\rceil + C \leqslant C\delta^{-1}P + 2C$, где P – его периметр.**

Шаг 5: Пусть γ – кусочно-геодезическая ломаная в графе Кэли с N звеньями и периметром P, а γ' – ломаная с $\lceil\frac{N}{2}\rceil$ звеньями, полученная из γ удалением четных вершин, с заменой прилежащих звеньев на отрезок. Тогда

$$\operatorname{Area}(\gamma)-\operatorname{Area}(\gamma') \leqslant C\lceil\delta^{-1}[\operatorname{Per}(\gamma)-\operatorname{Per}(\gamma')]\rceil + 2C\lceil\delta^{-1}\operatorname{Per}(\gamma')\rceil \leqslant 2C\left\lceil\frac{N}{2}\right\rceil + C\delta^{-1}\operatorname{Per}(\gamma)$$

значит $\operatorname{Area}(\gamma) \leqslant 2C\delta^{-1}N\operatorname{Per}(\gamma)+2CN$. ■