

Метрические пространства: контрольная 1

Правила: Пожалуйста, запишите задачи и сдайте ваше решение до 19:30, 14 марта. Число очков за это задание равно удвоенной сумме баллов за задачи. Пожалуйста, сформулируйте (не опуская деталей) все нетривиальные теоремы, которыми вы пользуетесь, и укажите ссылку либо набросок доказательства. Успешно учащиеся студенты должны получать по 10 баллов в неделю.

Задача 1.1. Докажите, что каждое метрическое пространство допускает изометрическое вложение в нормированное векторное пространство.

Задача 1.2. Пусть X – пространство с внутренней метрикой, гомеоморфное окружности. Докажите, что не существует изометрического вложения $X \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Задача 1.3 (2 балла). Пусть $\gamma_i : [0, 1] \rightarrow M$ – последовательность кратчайших с геодезической параметризацией в пространстве с внутренней метрикой, $\gamma_i(0) = p$. Предположим, что их классы образуют последовательность Коши в пространстве направлений в точке p . Докажите, что предел $\lim_i \gamma_i(t)$ существует для любого t и задает кратчайшую $\gamma(t)$, или найдите контрпример.

Задача 1.4 (3 балла). Пусть M – компактное метрическое пространство с внутренней метрикой, а γ – путь через точку p , имеющий направление. Докажите, что найдется геодезическая γ_1 через точку p такая, что $\angle(\gamma, p, \gamma_1) = 0$, или найдите контрпример.

Задача 1.5 (2 балла). Пусть M – компактное метрическое пространство, а $f : M \rightarrow M$ 1-липшицево, сюръективное отображение. Докажите, что f – изометрия.