

Метрические пространства: контрольная 2

Правила: Пожалуйста, запишите задачи и сдайте ваше решение до 19:30, 14 марта. Число очков за это задание (и за предыдущее задание) равно утроенной сумме баллов за задачи. Пожалуйста, сформулируйте (не опуская деталей) все нетривиальные теоремы, которыми вы пользуетесь, и укажите ссылку либо набросок доказательства. Успешно учащиеся студенты должны получать по 10 баллов в неделю.

Замечание 2.1. Все метрические пространства в этом листке предполагаются с внутренней метрикой.

Задача 2.1 (3 балла). Пусть T есть двумерный тор с плоской метрикой. Докажите, что T имеет неотрицательную кривизну в целом (в смысле Александра).

Задача 2.2 (2 балла). Пусть M – компактное метрическое пространство с конечной, нетривиальной фундаментальной группой. Докажите, что в M есть замкнутая геодезическая.

Задача 2.3. Пусть M – метрическое пространство диаметра $\leq \pi$, а $C(M)$ его конус. Докажите, что M полно тогда и только тогда, когда его конус полон.

Задача 2.4. Пусть M, M' – CAT(0)-пространства (пространства с неположительной кривизной в целом). Докажите, что $M \times M'$ с метрикой произведения – тоже CAT(0)-пространство.

Задача 2.5. Пусть G – группа симметрий платонова многогранника (тетраэдра, куба, икосаэдра), действующая на \mathbb{R}^3 . Докажите, что G порождена отражениями, а фактор \mathbb{R}^3/G является CAT(0)-пространством.

Задача 2.6 (3 балла). Пусть X и Y – CAT(0)-пространства, $Z_1 \subset X$ и $Z_2 \subset Y$ изометричные, выпуклые замкнутые подмножества, а U получено из X и Y склейкой Z_1 и Z_2 . Докажите, что U – тоже CAT(0)-пространство.