# Теория меры, экзамен

Можно свободно пользоваться всеми задачами и теоремами из листков и лекций, но надо быть готовым предъявить доказательство для каждого утверждения.

Каждому студенту выдаются задачи на $k := 60 - 2N$ баллов, где $N$ – число баллов за контрольные. За каждый сданный листочек начисляется по 8 баллов, за каждый балл по контрольным - два балла. Для получения оценки $l$ необходимо набрать $10l$ баллов.

## 1. Задачи к листкам 1-2 (объем)

**Задача 1.1 (5 баллов).** Дана булева алгебра $A$. Рассмотрим множество $Spec(A)$ всех максимальных идеалов $A$. Для каждого $a \in A$, рассмотрим подмножество $U_a \subset Spec(A)$, состоящее из всех идеалов, не содержащих $a$. Определим на $Spec(A)$ топологию, с базой, состоящей из всех $U_a$. Докажите, что $Spec(A)$ хаусдорфово и не содержит связных подмножеств, кроме точки.

**Задача 1.2 (10 баллов). Полусфера** есть часть сферы

$$S^2 = \{x, y, z \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\},$$

конгруэнтная $\{(x, y, z) \in S^2 \mid x \geqslant 0\}$. **Двуугольник** на сфере $S^2$ есть пересечение двух полусфер. **Кольцо сферических многоугольников** на сфере есть кольцо, порожденное полусферами. **Треугольник** есть пересечение трех полусфер. Равносоставленность сферических многоугольников определяется так же, как и для плоских многоугольников. Верно ли, что любой сферический треугольник равносоставлен двуугольнику?

**Задача 1.3 (10 баллов).** Пусть $M$ – многоугольник на плоскости Лобачевского. Докажите, что $M$ равносоставлен равностороннему треугольнику, или найдите контрпример.

**Задача 1.4 (5 баллов).** Пусть $A$ есть $n$-угольник на сфере, $\alpha$ сумма его углов, а $\delta(A)$ есть $\alpha - (n-2)\pi$. Докажите, что $\delta(A)$ задает конечно-аддитивную меру на кольце сферических многоугольников.

**Задача 1.5 (5 баллов).** Пусть $H$ – гильбертово пространство, $\mathfrak{S}$ – множество ограниченных, открытых подмножеств $H$, а $\mu : \mathfrak{S} \longrightarrow [0, \infty[$ – конечно-аддитивнаяаддитивная, монотонная функция, инвариантная относительно сдвигов. Докажите, что $\mu = 0$.

**Задача 1.6 (10 баллов).** Пусть $B_i$ – набор шаров в $\mathbb{R}^n$. Докажите, что мера $\mu\left(\bigcup B_i\right)$ меньше или равна, чем $3^n \sum \mu(B_i)$.

## 2. Задачи к листку 3 (мера Лебега)

**Задача 2.1 (5 баллов).** Пусть $M$ – локально компактное хаусдорфово пространство, $A_o$ - $\sigma$-алгебра подмножеств, порожденная открытыми, $A_c$ - $\sigma$-алгебра подмножеств, порожденная компактами. Всегда ли $A_o$ равно $A_c$?

**Задача 2.2 (5 баллов).** Пусть $M$ – измеримое подмножество $n$-мерного шара. Докажите, что $M$ отличается от компактного множества на множество произвольно малой меры.

**Задача 2.3 (5 баллов).** Пусть $\pi : \ [0,1]^n \longrightarrow [0,1]$ – проекция. Докажите, что образ борелевского множества – борелевский.

**Задача 2.4 (5 баллов).** Пусть $\pi : \ [0,1]^n \longrightarrow [0,1]$ – проекция. Докажите, что образ измеримого множества измерим, или найдите контрпример.

**Задача 2.5 (10 баллов).** Докажите, что график любой функции $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ измерим, или найдите контрпример.

## 3. Задачи к листку 3 (измеримые функции)

**Задача 3.1 (5 баллов).** Найдите последовательность непрерывных функций на $\mathbb{R}^n$, которая сходится в $L^1$, но не сходится равномерно. Найдите последовательность непрерывных функций на $\mathbb{R}^n$, которая сходится равномерно, но не сходится в $L^1$.

**Задача 3.2 (5 баллов).** Найдите последовательность непрерывных функций на $[0,1]$, которая сходится поточечно, но не сходится в $L^1$.

**Задача 3.3 (5 баллов).** Докажите, что произведение измеримых функций на $\mathbb{R}^n$ измеримо.

**Задача 3.4 (5 баллов).** Пусть $f$ – измеримая функция на $M = \mathbb{R}^n$ такая, что $\int_M fg = 0$ для любой непрерывной функции $g$ с компактным носителем. Докажите, что $f = 0$ почти всюду.

**Задача 3.5 (5 баллов).** Докажите, что непрерывные $L^1$-функции на $\mathbb{R}^n$ плотны в $L^1(\mathbb{R}^n)$.

## 4. Задачи к листку 3 (сходимость интеграла)

**Задача 4.1 (5 баллов).** Пусть $f_n$ – последовательность неотрицательных $L^1$-функций на $\mathbb{R}^n$, равномерно сходящихся к 0. Докажите, что $\lim_i \int_{\mathbb{R}^n} f_i \mu = 0$ или найдите контрпример.

**Задача 4.2 (5 баллов).** Пусть $f_n$ – последовательность неотрицательных $L^1$-функций на $\mathbb{R}^n$. Докажите, что $\liminf_i \int_{\mathbb{R}^n} f_i\mu = \lim \int_{\mathbb{R}^n} \inf_i f_i\mu$, или найдите контрпример.

**Задача 4.3 (5 баллов).** Пусть $f_n$ – последовательность неотрицательных $L^1$-функций на $\mathbb{R}^n$. Докажите, что

$$\lim_j \sum_{i=0}^{j} \int_{\mathbb{R}^n} f_i\mu = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_j \sum_{i=0}^{j} f_i\mu.$$

**Задача 4.4 (5 баллов).** Пусть $f_n$ – последовательность $L^1$-функций (не обязательно неотрицательных) на $\mathbb{R}^n$, причем ряд $\sum_{i=0}^{n} f_i$ сходится в каждой точке. Докажите, что $\lim_j \sum_{i=0}^{j} \int_{\mathbb{R}^n} f_i\mu = \lim_j \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=0}^{j} f_i\mu$, или найдите контрпример.

**Задача 4.5 (5 баллов).** Пусть последовательность неотрицательных $L^1$-функций $\{f_i\}$ на $\mathbb{R}^n$ равномерно сходится к 0, причем существует $g \in L^1(R^n)$ такая, что все $f_i$ удовлетворяют $f_i \leqslant g$. Докажите, что $\lim_i \int_{\mathbb{R}^n} f_i\mu = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_i f_i\mu$.

## 5. Задачи к листку 4 (теорема Фубини)

**Задача 5.1 (5 баллов).** Меры $\mu, \nu$ называются **эквивалентными**, если $\mu$ абсолютно непрерывна относительно $\nu$, а $\nu$ абсолютно непрерывна относительно $\mu$. Пусть на $\mathbb{R}^n$ задана мера $\mu$, такая, что для каждого сдвига $P: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $P_*\mu$ эквивалентна $\mu$. Докажите, что $\mu$ эквивалентна мере Лебега.

**Задача 5.2 (10 баллов).** Пусть $\nu$ – локально конечная мера на $\mathbb{R}^n$, $\mu$ – мера Лебега. Докажите, что $\nu \preccurlyeq \mu$ вне множества меры нуль по $\mu$.

**Задача 5.3 (10 балла).** Пусть $f$ – монотонно неубывающая функция на $\mathbb{R}$. Докажите, что $f$ дифференцируема вне множества меры 0.

**Задача 5.4 (10 баллов).** Функция $\phi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ называется **выпуклой**, если множество $\{(x,y) \mid y \geqslant f(x)\}$ выпукло. Докажите, что любая выпуклая функция непрерывна, дифференцируема вне множества меры 0, и ее производная монотонна на ее множестве определения.

**Задача 5.5 (10 баллов).** Докажите, что в $\mathbb{R}^n$ не существует измеримого множества $A$ такого, что $\mu(A \cap B) = \frac{1}{2}\mu(B)$ для любого куба $B$ ($\mu$ - мера Лебега).

**Задача 5.6 (5 баллов). Континуум-гипотеза** утверждает, что на континууме $C$ можно задать отношение полного порядка $\preccurlyeq$, такое, что каждый собственный отрезок $C$ счетный. Предположим, что такое отношение полного порядка есть, и рассмотрим в $\mathbb{R}^2$ подмножество $\{(x,y) \mid x \preccurlyeq y\}$. Докажите, что оно неизмеримо.

## 6. Задачи к листкам 5-6 (мера Хаара)

**Определение 6.1.** (Борелевская) мера $\mu$ на $X$ называется **вероятностной**, если $\mu(X) = 1$. Мера называется **трансляционно-инвариантной**, если она сохраняется параллельными переносами.

**Задача 6.1 (5 баллов).** Докажите, что на $\mathbb{R}$ не существует ненулевой трансляционно-инвариантной вероятностной меры.

**Задача 6.2 (10 баллов).** Докажите, что каждое измеримое подмножество $\mathbb{R}^n$ положительной меры содержит несчетное компактное подмножество.

**Определение 6.2. Борелевской алгеброй** называется $\sigma$-алгебра подмножеств топологического пространства, порожденная компактами.

**Задача 6.3 (10 баллов).** Пусть $C$ есть пространство непрерывных вещественнозначных функций на отрезке $[0,1]$, с топологией, заданной нормой $|f|_2 = \sqrt{\int_{[0,1]} f^2\mu}$, ($\mu$ - мера Лебега на отрезке), а $L_2([0,1])$ его пополнение по этой норме. Будет ли открытый шар в $L_2([0,1])$ борелевским множеством?

**Задача 6.4 (5 баллов).** Пусть $G$ – компактная группа, непрерывно действующая на топологическом пространстве $M$. Докажите, что на $M$ существует нетривиальная $G$-инвариантная борелевская мера.

**Задача 6.5 (5 баллов).** Пусть $G$ есть локально компактная, хаусдорфова топологическая группа, которая свободно действует на компакте. Докажите, что у нее правая мера Хаара пропорциональна левой, или найдите контрпример.

**Задача 6.6 (5 баллов).** Рассмотрим группу $G$ обратимых верхнетреугольных матриц $2 \times 2$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$$

Отображение $A \longrightarrow (a_{11}, a_{12}, a_{22})$ отождествляет $G$ и открытое подмножество в $\mathbb{R}^3$, заданное условиями $a_{11} \neq 0, a_{22} \neq 0$. Докажите, что мера Хаара $h$ на $G$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега $\mu$ на $\mathbb{R}^3$. Найдите функцию $f$ такую, что $h = f\mu$.