Теория меры, тест 2

Определение 1.1. Пусть $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ – сфера. **Большая полусфера** есть подмножество сферы, заданное $\{x \in S^n \mid l(x) > 0\}$, где l есть линейный функционал на $\mathbb{R}^{n+1}$. Кольцо сферических многогранников есть кольцо подмножеств, порожденное большими полусферами. **Большая окружность** в S^n есть пересечение S^n с 2-мерной гиперплоскостью, проходящей через 0. Точка сферического многогранника R называетсяа **внутренней**, если R содержит ее окрестность.

Задача 1.1. Докажите, что множество внутренних точек сферического многогранника – многогранник.

Задача 1.2. Докажите, что замыкание сферического многогранника – многогранник.

Определение 1.2. Многогранник называется **приведенным**, если он совпадает с замыканием множества его внутренних точек. **Вершина** приведенного многогранника R есть точка $x \in R$, такая, что для любой большой окружности S, проходящей через x, никакая окрестность x в S не содержится в границе R.

Задача 1.3. Найдите все приведенные сферические многогранники в S^2, не имеющие вершин.

Задача 1.4. Найдите континуальное семейство неконгруэнтных многогранников в S^3, не имеющих вершин.

Задача 1.5. Пусть $x \in R$ – точка на границе приведенного многогранника. Докажите, что существует $C > 0$ такой, что пересечение ε-сферы с центром в x и R – многогранник в S^{n-1} для любого $\varepsilon < C$.

Задача 1.6. Приведите пример, когда это неверно для произвольного ε.

Определение 1.3. Функция **объема** на сфере есть конечно аддитивная, неотрицательная мера, инвариантная относительно поворотов.

Определение 1.4. Пусть на многогранниках в S^{n-1} задана функция объема Vol. **Телесный угол** многогранника R в S^n в точке x есть

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\operatorname{Vol}(R \cap S_\varepsilon(x))}{\operatorname{Vol}(S_\varepsilon)},$$

где S_ε есть сфера с центром x и радиусом ε.

Задача 1.7. Докажите, что функция

$$\varepsilon \longrightarrow \frac{\operatorname{Vol}(R \cap S_\varepsilon(x))}{\operatorname{Vol}(S_\varepsilon)}$$

постоянна для достаточно малых ε.

Задача 1.8. Пусть на многогранниках в S^{n-1} задана функция объема Vol. Пусть R – приведенный многогранник в S^n с вершинами $r_1, ..., r_k$ и телесными углами $\alpha_1, ..., \alpha_k$, не равный самой сфере.

а. Докажите, что функция $R \longrightarrow \frac{1}{2} + \sum_i \alpha_i - \frac{1}{2}k$ продолжается до конечно-аддитивной функции на кольце сферических многогранников в S^n для $n = 2$.

б. Докажите это утверждение для произвольного n, или найдите контрпример.