Теория меры, тест 3

Замечание 3.1. Все меры в этом листочке предполагаются неотрицательными.

Задача 3.1 (3 балла). Приведите пример конечно-аддитивной борелевской меры на $\mathbb{R}$, которая не счетно-аддитивна.

Замечание 3.2. Я не знаю, можно ли решить эту задачу без ультрафильтров.

Определение 3.1. Две борелевские меры μ, μ' на топологическом пространстве M называются **непрерывно эквивалентными**, если на M заданы непрерывные функции $f, f' : M \longrightarrow]0,\infty[$ такие, что для любого открытого множества U, $\mu(U) = \int_U f'\mu'$ и $\mu'(U) = \int_U f\mu$ (здесь $\int_U f\mu$ обозначает интеграл функции f по мере μ на U).

Задача 3.2. Пусть μ стандартная борелевская мера на $\mathbb{R}^n$, а μ' непрерывно эквивалентна ей. Докажите, что для любого открытого множества, имеем $\mu(U) = 0 \Leftrightarrow \mu'(U) = 0$.

Задача 3.3. Пусть μ, μ' непрерывно эквивалентны. Докажите, что для любого открытого множества, имеем $\mu(U) = \infty \Leftrightarrow \mu'(U) = \infty$, или найдите контрпример.

Задача 3.4. Приведите пример гомеоморфизма $\Psi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ такого, что не существует Ψ-инвариантной[1] меры, непрерывно эквивалентной стандартной.

Замечание 3.3. Пусть A есть σ-алгебра с мерой μ, а $\hat{A}_\mu$ ее пополнение по мере μ, факторизованное по множествам меры 0. Мы рассматриваем $\hat{A}_\mu$ как метрическое пространство. Следующие задачи обсуждают топологию этого пространства.

Задача 3.5. Пусть меры μ, μ' на A непрерывно эквивалентны. Докажите, что пространства $\hat{A}_\mu$ и $\hat{A}_{\mu'}$ гомеоморфны.

Определение 3.2. Многообразие есть топологическое пространство, локально гомеоморфное $\mathbb{R}^n$.

Определение 3.3. Топологическое пространство M **стягиваемо**, если задано непрерывное отображение $\psi_t : M \times [0,1] \longrightarrow M$ такое, что ψ_0 тождественно, а ψ_1 отображает M в точку.

Задача 3.6. Пусть μ есть стандартная борелевская мера на $\mathbb{R}^n$. Докажите, что пространство $\hat{A}_\mu$ стягиваемо.

Задача 3.7 (2 балла). Пусть μ есть борелевская мера на многообразии, локально непрерывно эквивалентная стандартной борелевской мере на $\mathbb{R}^n$. Докажите, что пространство $\hat{A}_\mu$ стягиваемо.

[1] Ψ-инвариантная это удовлетворяющая $\mu(U) = \mu(\Psi(U))$ для любого $U \subset \mathbb{R}^n$.