Для зачета по каждому листку надо сдать все задачи со звездочками, кроме двух либо все задачи без звездочек, кроме четырех. Задачи с двумя звездочками можно не сдавать. Сдавшим k задач с двумя звездочками разрешается не сдавать $2k$ задач со звездочками из того же листочка. Задачи, обозначенные (!), следует сдавать всем.

Теория меры 1: Объемы многогранников

1.1. Кольца подмножеств и конечно-аддитивные меры

Определение 1.1. Пусть задано множество S. Множество всех подмножеств S обозначается 2^S. Пусть $\mathfrak{U} \subset 2^S$ - некоторый набор подмножеств S. $\mathfrak{U}$ называется **кольцом**, если для любых $A, B \in \mathfrak{U}$, объединение $A \cup B$, пересечение $A \cap B$ и дополнение $A \backslash B$ принадлежит $\mathfrak{U}$. В этом случае $\mathfrak{U}$ называется **подкольцом** в 2^S.

Задача 1.1. Пусть S конечно. Опишите все подкольца в 2^S и найдите их число для $|S| = 5$ (множества из 5 элементов).

Определение 1.2. Характеристической функцией подмножества $U \subset S$ называется функция

$$\chi_U : S \longrightarrow \{0,1\} \ \mid \ \chi_U(x) = 1, \ \text{ если } \ x \in U \qquad \chi_U(x) = 0, \ \text{ если } \ x \notin U.$$

Задача 1.2. Пусть $\mathfrak{U} \subset 2^S$ - набор подмножеств, а $R_{\mathfrak{U}} = \{\chi_U\}$ множество всех характеристических функций для всех $U \in \mathfrak{U}$. Рассмотрим $\{0,1\}$ как поле из двух элементов. Это задает естественную аддитивную и мультипликативную структуру на множестве всех отображений из S в $\{0,1\}$ (поточечное сложение и умножение). Докажите, что $R_{\mathfrak{U}}$ образует кольцо (возможно, без единицы) тогда и только тогда, когда $\mathfrak{U}$ это кольцо.

Определение 1.3. Пусть $\mathfrak{V} \subset 2^S$ - произвольный набор подмножеств. Минимальное подкольцо в 2^S, содержащее $\mathfrak{V}$, называется **подкольцом, порожденным** $\mathfrak{V}$.

Задача 1.3 (**). Пусть в $\mathfrak{V} \subset 2^S$ N элементов. Какая максимальная мощность может быть у подкольца, порожденного $\mathfrak{V}$?

Определение 1.4. Пусть задано подмножество $S \subset \mathbb{R}^n$. **Выпуклой оболочкой** S называется наименьшее выпуклое подмножество, содержащее S.

Задача 1.4. а. Докажите, что выпуклая оболочка S это множество всех векторов вида $\sum \alpha_i s_i$, где $\{s_i\}$ это конечный набор точек из S, а α_i вещественные числа, $0 \leqslant \alpha_i \leqslant 1$, $\sum \alpha_i = 1$.

б. (*) Докажите, что любой вектор в выпуклой оболочке $S \subset \mathbb{R}^n$, представляется в виде $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i s_i$, где $s_1, ... s_{n+1}$ - точки S, а $0 \leqslant \alpha_i \leqslant 1$, $\sum \alpha_i = 1$.

Определение 1.5. **Симплексом** в $\mathbb{R}^n$ называется выпуклая оболочка множества $\{x_0, ...x_n\}$ из $n+1$ точек в $\mathbb{R}^n$. Такой симплекс называется **натянутым на точки** $x_0, ...x_n$.

Задача 1.5. Перечислите все классы гомеоморфизма симплексов в $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$.

Определение 1.6. Пусть $\Delta(x_0, ...x_n)$ - симплекс, натянутый на точки $\{x_0, ...x_n\}$. **Гранью** Δ размерности k называется выпуклая оболочка $k+1$ точек из $\{x_0, ...x_n\}$.

Задача 1.6. Ребра (одномерные грани) n-мерного симплекса $\Delta(x_0, ...x_n)$ образуют граф. Предположим, что внутренность симплекса $\Delta(x_0, ...x_n)$ не пустая. Сколько ребер в этом графе? Изобразите его. Сколько разных k-мерных граней есть у $\Delta(x_0, ...x_n)$?

Определение 1.7. Кольцо полиэдров (многогранников) есть кольцо подмножеств в $\mathbb{R}^n$, порожденное замкнутыми симплексами. Многогранником называется элемент этого кольца.

Задача 1.7. Докажите, что каждый замкнутый многогранник можно представить в виде конечного объединения симплексов, пересекающихся по граням (такое разбиение называется **триангуляцией** многогранника).

Задача 1.8 (*). Докажите, что каждый выпуклый, замкнутый многогранник можно представить в виде конечного пересечения симплексов.

Определение 1.8. Пусть $\mathfrak{U} \subset 2^S$ – кольцо подмножеств. Отображение $\mu : \mathfrak{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ называется **конечно аддитивной мерой**, или же **аддитивной функцией множества**, или **валюацией**, если для любых $A, B \in \mathfrak{U}$,

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B).$$

Валюация называется **неотрицательной**, если она принимает неотрицательные значения. Очевидно, валюации образуют линейное пространство над $\mathbb{R}$.

Задача 1.9. Пусть S это отрезок $[0, 1]$, а $\mathfrak{U}$ множество конечных объединений отрезков, интервалов и полуинтервалов. Докажите, что $\mathfrak{U}$ это кольцо. Докажите, что отображение $\coprod_i A_i \longrightarrow \sum |A_i|$ (несвязное объединение отрезков переводится в сумму их длин) это неотрицательная конечно-аддитивная мера.

Задача 1.10 (*). Пусть $\mathfrak{U} = 2^S$, где S это конечное множество. Обозначим за L линейное пространство всех конечно-аддитивных мер на $\mathfrak{U}$. Найдите размерность L над $\mathbb{R}$.

Задача 1.11. Пусть дан $\mathbb{Q}$-линейный гомоморфизм $\mathbb{R} \xrightarrow{\xi} \mathbb{R}$,[1] множество S и кольцо подмножеств $\mathfrak{U} \subset 2^S$. Докажите, что для любой конечно-аддитивной меры $\mu : \mathfrak{U} \longrightarrow \mathbb{R}$, композиция $\mu \circ \xi$ это опять конечно-аддитивная мера.

[1] Здесь $\mathbb{R}$ рассматривается как векторное пространство над $\mathbb{Q}$.

Задача 1.12. Пусть задана точка $x \in S$, кольцо подмножеств $\mathfrak{U} \subset 2^S$, и функция $\mu: \mathfrak{U} \longrightarrow \mathbb{R}$, принимающая значения $\mu(U) = 1$ для $x \in U$ и $\mu(U) = 0$ для $x \notin U$. Докажите, что это конечно-аддитивная мера.

Замечание 1.1. Напомним, что движением в $\mathbb{R}^n$ (или любом другом метрическом пространстве) называется любая изометрическая биекция. Два подмножества называются **конгруэнтными**, если одно в другое можно перевести движением.

Определение 1.9. Пусть $\mathfrak{U} \subset 2^{\mathbb{R}^n}$ – некоторое кольцо множеств. Конечно-аддитивная мера $\mu: \mathfrak{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ называется **инвариантной**, если $\mu(A) = \mu(B)$ для конгруэнтных фигур $A, B \subset \mathbb{R}^n$.

Задача 1.13. Вырожденный симплекс – это симплекс, лежащий внутри какой-то гиперплоскости. Докажите, что симплекс $\Delta(x_0, x_1, ...x_n)$ вырожденный тогда и только тогда, когда вектора $x_1 - x_0, x_2 - x_0, ...x_n - x_0$ линейно зависимы.

1.2. Объем многогранника: аддитивность

Определение 1.10. Два подмножества $\mathbb{R}^n$ называются **конгруэнтными**, если одно в другое можно перевести движением. Функция $\mu: \mathfrak{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ на множестве многогранников называется **инвариантной относительно движений**, если $\mu(A) = \mu(B)$ для конгруэнтных фигур $A, B \subset \mathbb{R}^n$.

Определение 1.11. Объем есть ненулевая, неотрицательная, конечно аддитивная функция на кольце многогранников, инвариантная относительно движений.

Задача 1.14 (*). Докажите, что объем вырожденного многогранника равен нулю.

Задача 1.15. а. (*) Пусть на кольце многогранников в $\mathbb{R}^n$ задана функция объема, причем объем единичного куба равен 1. Докажите, что объем куба со стороной a равен a^n.

б. (*) Докажите, что все функции объема на кольце многогранников пропорциональны.

Определение 1.12. Пусть $v_1, ..., v_n$ – стандартный базис в $\mathbb{R}^n$, $\Lambda = \mathbb{Z}^n$ – порожденная им решетка, а $\varepsilon\Lambda$ – та же решетка, растянутая в ε раз. Обозначим за ν форму объема, полученную из двойственного базиса. Пусть $\underline{\mathfrak{N}_{\varepsilon\Lambda}}(D)$ – число ε-кубов с вершинами в решетке $\varepsilon\Lambda$, целиком содержащихся в D, а $\overline{\mathfrak{N}_{\varepsilon\Lambda}}(D)$ – число ε-кубов с вершинами в решетке $\varepsilon\Lambda$, пересекающихся с D. Исходя из формулы, приведенной в предыдущей задаче, можно считать, что объем куба со стороной ε должен быть равен ε^n на объем единичного куба. Исходя из этого, определим числа

$$\underline{\mathfrak{V}_{\varepsilon\Lambda}}(D) := \varepsilon^n \underline{\mathfrak{N}_{\varepsilon\Lambda}}(D), \quad \overline{\mathfrak{V}_{\varepsilon\Lambda}}(D) := \varepsilon^n \overline{\mathfrak{N}_{\varepsilon\Lambda}}(D).$$

которые вычисляют "суммарный объем" кубиков решетки $\varepsilon\Lambda$, содержащихся в D и пересекающихся с D (сам объем мы пока не определили, поэтому кавычки).

Задача 1.16. Докажите, что

а. функция $N \longrightarrow \underline{\mathfrak{V}_{2^{-N}\Lambda}}(D)$ монотонно (возможно, нестрого) возрастает,

б. а функция $N \longrightarrow \overline{\mathfrak{N}_{2^{-N}\Lambda}}(D)$ монотонно (возможно, нестрого) убывает.

Определение 1.13. Определим **внутренний объем** $\underline{\mathrm{Vol}_\Lambda}(D)$ многогранника как предел $\lim_N \underline{\mathfrak{V}_{2^{-N}\Lambda}}(D)$, а **внешний объем** $\overline{\mathrm{Vol}_\Lambda}(D)$ как предел $\lim_N \overline{\mathfrak{N}_{2^{-N}\Lambda}}(D)$.

Задача 1.17. Докажите, что внешний объем любого многогранника конечен.

Задача 1.18. Пусть D – вырожденный многогранник, содержащийся в плоскости $L \subset \mathbb{R}^n$, $\Pi_i: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ координатная проекция, а Λ_i – соответствующая решетка в $\mathbb{R}^{n-1}$.

а. Докажите, что $\overline{\mathfrak{N}_{\varepsilon\Lambda}}(D) \leqslant \sum_i \overline{\mathfrak{N}_{\varepsilon\Lambda_i}}(\Pi_i(D))$.

б. Докажите, что $\overline{\mathfrak{V}_{\varepsilon\Lambda}}(D) \leqslant \varepsilon \sum_i \overline{\mathfrak{V}_{\varepsilon\Lambda_i}}(\Pi_i(D))$.

в. (!) Докажите, что $\overline{\mathrm{Vol}_\Lambda}(D) = 0$.

Задача 1.19 (!). Пусть D – вырожденный многогранник. Докажите, что $\overline{\mathrm{Vol}_\Lambda}(D) = 0$.

Определение 1.14. Точка многогранника D называется **внутренней**, если она лежит в D вместе со своей окрестностью.

Задача 1.20. а. Докажите, что замыкание многогранника есть многогранник.

б. (!) Докажите, что совокупность всех внутренних точек многогранника есть многогранник.

Определение 1.15. Граница многогранника D есть $\bar{D} \backslash D^\circ$, где D° есть совокупность всех внутренних точек D, а $\bar{D}$ – его замыкание.

Задача 1.21. а. (!) Докажите, что граница многогранника это многогранник.

б. (!) Докажите, что граница - вырожденный многогранник.

Задача 1.22. Докажите, что для любого многогранника D выполнено

$$\overline{\mathfrak{V}_{2^{-N}\Lambda}}(D) - \underline{\mathfrak{V}_{2^{-N}\Lambda}}(D) = \overline{\mathfrak{V}_{2^{-N}\Lambda}}(\partial D),$$

где ∂D это граница D.

Задача 1.23. Докажите, что внутренний объем равен внешнему

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Определение 1.16. Обозначим $\overline{\mathrm{Vol}_\Lambda}(D) = \underline{\mathrm{Vol}_\Lambda}(D)$ за $\mathrm{Vol}_\Lambda(D)$.

Задача 1.24. Пусть многогранник D разбит в объединение двух замкнутых многогранников, $D = D_1 \cup D_2$, пересекающихся по вырожденному. Докажите, что

$$\underline{\mathfrak{V}_{2^{-N}\Lambda}(D)} - \underline{\mathfrak{V}_{2^{-N}\Lambda}(D_1)} - \underline{\mathfrak{V}_{2^{-N}\Lambda}(D_2)} \leqslant \overline{\mathfrak{V}_{2^{-N}\Lambda}(D_1 \cap D_2)}$$

Задача 1.25 (!). Докажите, что функция $D \longrightarrow \mathrm{Vol}_\Lambda(D)$ конечно-аддитивна.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

1.3. Объем многогранника: инвариантность объема

Задача 1.26 (!). Пусть D – куб, полученный параллельным переносом из единичного. Докажите, что $\mathrm{Vol}_\Lambda(D) = 1$.

Определение 1.17. Параллелепипед в $\mathbb{R}^n$ есть многогранник, полученный как пересечение n областей D_i, где каждая D_i задается уравнением $b \leqslant L_i(x) \leqslant a$, для набора линейных функций L_i. **Координатный параллелепипед** есть параллелепипед, заданный координатными проекциями L_i.

Определение 1.18. Два многогранника A, B называются **параллельно равносоставленными**, если их можно разрезать на многогранники $A_1, ...A_k$, $B_1, ...B_k$ таким образом, что A_i получается из B_i параллельным переносом.

Задача 1.27 (!). Докажите, что два многогранника, которые параллельно равносоставлены, имеют одинаковый объем.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 1.28. Пусть D – координатный параллепипед с ребрами $a_1, ..., a_n$. Докажите, что $\mathrm{Vol}_\Lambda(D) = \prod_i a_i$.

Определение 1.19. Элементарная матрица есть линейный оператор $A_{i,j}^\lambda : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, заданный формулой

$$A_{i,j}^\lambda \left(\sum_i a_i v_i \right) = \sum_i a_i v_i + \lambda a_j v_i,$$

где v_i обозначает стандартный базис в $\mathbb{R}^n$.

Задача 1.29. Докажите, что элементарная матрица переводит координатный параллелепипед в параллелепипед, параллельно равносоставленный ему.

Задача 1.30 (!). Пусть A – элементарная матрица, переводящая многогранник D в D'. Докажите, что $\mathrm{Vol}_\Lambda(D) = \mathrm{Vol}_\Lambda(D')$.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 1.31. а. Докажите, что матрицы

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

можно выразить через элементарные матрицы 2×2.

б. (!) Докажите, что любую диагональную матрицу с определителем 1 можно выразить через элементарные матрицы.

Определение 1.20. Группа обратимых матриц на $\mathbb{R}^n$ обозначается $GL(n, \mathbb{R})$ либо $GL(R^n)$, а группа обратимых матриц с определителем 1 за $SL(n, \mathbb{R})$ либо $SL(R^n)$.

Задача 1.32. Предположим, что матрица $A \in GL(\mathbb{R}^n)$ переводит $v_1, ..., v_n$ в $w_1, ..., w_n$, а вектора $v_k, w_2, w_3, ..., w_n$ линейно независимы. Докажите, что существует матрица B, разлагающаяся в произведение элементарных, такая, что AB переводит $v_1, ..., v_n$ в $\lambda v_k, w_2, w_3, ..., w_n$.

Указание. Решите уравнение $\lambda v_k = v_1 - \sum_{i-2}^n a_i w_i$ и запишите $B = \prod_{i-2}^n A_{1,i}^{a_i}$.

Задача 1.33. Пусть $A \in GL(\mathbb{R}^n)$. Докажите, что найдется матрица B, разлагающаяся в произведение элементарных, такая, что AB переводит $v_1, ..., v_n$ в $a_1 v_{\sigma_1}, ..., a_n v_{\sigma_n}$, где $\sigma_1, ..., \sigma_n$ – перестановка.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 1.34 (!). Пусть $A \in GL(\mathbb{R}^n)$. Докажите, что найдется матрица B, разлагающаяся в произведение элементарных, такая, что AB переводит $v_1, ..., v_n$ в $v_{\sigma_1}, ..., v_{\sigma_n}$, где $\sigma_1, ..., \sigma_n$ – четная перестановка.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей, а затем примените задачу 1.31.

Задача 1.35 (!). Докажите, что каждый параллелепипед параллельно равносоставлен координатному.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 1.36 (!). Докажите, что группа $SL(n, \mathbb{R})$ сохраняет объемы многогранников.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 1.37 (*). Докажите, что группа $SL(n, \mathbb{R})$ порождена элементарными матрицами.