Для зачета по каждому листку надо сдать все задачи со звездочками, либо все задачи без звездочек. Задачи с двумя звездочками можно не сдавать. Сдавшим k задач с двумя звездочками разрешается не сдавать $2k$ задач со звездочками из того же листочка. Задачи, обозначенные (!), следует сдавать всем.

Теория меры 3: мера Лебега

3.1. Внешняя мера

Вплоть до окончания этого листка, S это множество, а $\mathfrak{U} \subset 2^S$ кольцо подмножеств, содержащее S (такое кольцо называется **алгеброй подмножеств**, или же **подалгеброй подмножеств в** 2^S). Рассмотрим 2^S как булеву алгебру, с операциями $\vee = \cup$ и $\wedge = \cap$. Очевидно, $\mathfrak{U}$ это булева подалгебра 2^S.

Рассмотрим функцию $\mu : \mathfrak{U} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. На множестве $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ определена операция сложения, таким образом, что $x + \infty = \infty$ и $\infty + \infty = \infty$.

Определение 3.1. Функция $\mu : \mathfrak{U} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ называется **конечно-аддитивной мерой**, если для любых непересекающихся $A, B \in \mathfrak{U}$, $\mu(A \coprod B) = \mu(A) + \mu(B)$. Мера называется **неотрицательной**, если к тому же $\mu(A) \geqslant 0$, для любого A.

Определение 3.2. В этих предположениях, пусть $X \subset S$ любое подмножество. Определим **внешнюю меру** $\mu^*(X)$ как

$$\mu^*(X) := \inf_{\{A_i\}} \sum \mu(A_i)$$

где инфимум берется по всем счетным наборам $\{A_i\} \subset \mathfrak{U}$, покрывающим X. Мы говорим, что X **множество меры 0**, если $\mu^*(X) = 0$. Мы говорим, что μ σ-аддитивна, если $\mu^*(A) = \mu(A)$ для любого $A \in \mathfrak{U}$.

Задача 3.1. Докажите, что $\mu^*(A \cup B) \leqslant \mu^*(A) + \mu^*(B)$.

Задача 3.2 (*). Приведите пример, когда внешняя мера неаддитивна (то есть не удовлетворяет $\mu^*(A \coprod B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$).

Задача 3.3 (!). Пусть A множество меры нуль. Докажите, что $\mu^*(A \cup B) = \mu^*(B \backslash A) = \mu^*(B)$.

Задача 3.4 (!). Докажите, что счетное объединение множеств меры нуль имеет меру нуль

Задача 3.5. Докажите, что множества меры нуль образуют булев идеал в булевой алгебре 2^S.

Задача 3.6 (*). Приведите пример континуального подмножества меры нуль на отрезке.

Задача 3.7. Задан диффеоморфизм из отрезка в отрезок, гладкий, в том числе, и на концах отрезка. Докажите, что он переводит множества меры нуль в множества меры нуль.

Задача 3.8. Задан диффеоморфизм из интервала в прямую. Докажите, что он переводит множества меры нуль в множества меры нуль.

3.2. Измеримые множества

Определение 3.3. Рассмотрим множества меры нуль как булев идеал в булевой алгебре 2^S. Если для $A, B \subset S$ имеет место $\mu^*(A \triangle B) = 0$, мы говорим A **и** B **совпадают почти всюду**.

Факторалгебра по идеалу множеств меры ноль называется **алгебра подмножеств** S **с точностью до подмножеств меры нуль**. На протяжении этого листка мы будем обозначать эту алгебру как $2^S/\sim$.

Задача 3.9. Зафиксируем $x \in S$. Предположим, что $\{x\} \in \mathfrak{U}$. Пусть мера подмножества $X \subset S$ задается $\mu(X) = 1$ если $x \in X$ и $\mu(X) = 0$ в противном случае. Найдите $\mathfrak{U}/\sim$.

Задача 3.10 (!). Определим функцию $d: \ 2^S \times 2^S \longrightarrow \mathbb{R}$ как $d(A, B) := \mu^*(A \triangle B)$. Докажите, что эта функция удовлетворяет неравенству треугольника: $d(A, B) \leqslant d(A, C) + d(B, C)$.

Задача 3.11 (!). Пусть $\mu^*(A_1 \triangle A_2) = 0$. Докажите, что $\mu^*(A_1 \triangle B) = \mu^*(A_2 \triangle B)$, для любого $B \in 2^S$.

Замечание 3.1. Из этой задачи следует, что функция $d(A, B) = \mu^*(A \triangle B)$ корректно определена на множестве $2^S/\sim$.

Определение 3.4. На протяжении этих лекций, **метрика** на множестве M есть отображение $M \times M \longrightarrow [0, \infty]$ удовлетворяющее стандартным условиям (симметричность, неравенство треугольника, и $d(x, y) > 0$ для $x \neq y$. От обычного определения, это отличается только тем, что мы разрешаем $d(x, y)$ принимать значение ∞.

Задача 3.12. Докажите, что функция $d(A, B) = \mu^*(A \triangle B)$ задает метрику на $2^S/\sim$.

Задача 3.13 (!). Рассмотрим пополнение $2^S/\sim$ относительно этой метрики. Докажите, что это тоже булева алгебра.

Определение 3.5. Пусть $\{X_i\}$ последовательность подмножеств в S. **Обратный предел** $\{X_i\}$ это множество

$$\underset{\leftarrow}{\lim}\{X_i\} := \bigcup_i (\cap_{j>i} X_j)$$

Задача 3.14. Докажите, что обратный предел последовательности $X_1, X_2, X_3, ...$ равен обратному пределу $X_n, X_{n+1}, X_{n+2}, ...$, для любого $n \neq 1$.

Задача 3.15. Пусть $A \in 2^S$ и $\{X_i\} \subset 2^S$, а $d(A, X_i) = \lambda_i$. Докажите, что

$$d(A, \underset{\leftarrow}{\lim}\{X_i\}) \leqslant \sum \lambda_i.$$

Задача 3.16 (!). Пусть задана последовательность Коши $\{X_i\}$ в $2^S/\sim$. Докажите, что она сходится к $\lim\limits_{\leftarrow}\{X_i\}$.

Указание. Заменив $\{X_i\}$ на подпоследовательность, добейтесь того, чтобы

$$d(X_i, X_j) < 2^{-\min(i,j)}.$$

Воспользовавшись предыдущей задачей, убедитесь, что

$$d(X_i, \lim_{\leftarrow}\{X_i\}) \leqslant \frac{1}{2^{i-1}}.$$

Определение 3.6. Множество $X \subset S$ называется **измеримым**, если оно лежит в пополнении $\mathfrak{U}/\sim$ относительно метрики, определенной выше.

Задача 3.17 (!). Докажите, что измеримые множества образуют подалгебру в 2^S.

Задача 3.18 (**). Воспользовавшись аксиомой выбора, приведите пример неизмеримого
подмножества в $[0, 1]$ (со стандартной мерой).

Задача 3.19 (!). (теорема Лебега) Докажите, что на измеримых множествах функция μ^* конечно аддитивна (удовлетворяет $\mu^*(A \coprod B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$).

Указание. Воспользуйтесь тем, что алгебра измеримых множеств является пополнением $\mathfrak{U}/(\sim \cap \mathfrak{U})$, а там $\mu = \mu^*$ и аддитивна.

Определение 3.7. Пусть μ σ-аддитивна. В таком случае функция μ^* на алгебре измеримых множеств называется **продолжением** меры μ. Мы обозначаем ее за μ.

Задача 3.20 (!). Пусть $\{A_i\} \subset \mathfrak{U}$ счетная последовательность непересекающихся множеств, такая, что ряд $\sum \mu(A_i)$ сходится. Докажите, что объединение $\bigcup A_i$ измеримо.

Задача 3.21 (!). Докажите, что на измеримых множествах функция μ^* **счетно аддитивна**, то есть удовлетворяет $\mu^*(\coprod X_i) = \sum \mu^*(X_i)$, если $\sum \mu^*(X_i) < \infty$.

3.3. Мера Лебега

Определение 3.8. Пусть $\mathfrak{W} \subset S$ - алгебра подмножеств. $\mathfrak{W}$ называется **σ-алгеброй**, если она замкнута относительно счетных объединений: для любого счетного набора подмножеств $\{X_i\} \subset \mathfrak{W}$, объединение $\bigcup X_i$ принадлежит $\mathfrak{W}$.

Задача 3.22 (!). Пусть $\mathfrak{U} \subset 2^S$ - алгебра подмножеств, снабженная счетно-аддитивной и неотрицательной мерой $\mu : \mathfrak{U} \longrightarrow [0, \infty[$. Докажите, что алгебра измеримых подмножеств является σ-алгеброй.

Определение 3.9. Мерой на σ-алгебре $\mathfrak{W} \subset S$ называется счетно-аддитивная, неотрицательная функция $\mathfrak{W} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Задача 3.23 (*). Приведите пример конечно-аддитивного, но не счетно-аддитивного отображения $\mathfrak{W} \xrightarrow{\mu} [0, \infty]$. Докажите, что μ счетно-аддитивно тогда и только тогда, когда $\mu^*(A) = \mu(A)$ для любого $A \in \mathfrak{W}$.

Задача 3.24. Пусть S_1, S_2 множества, снабженные алгебрами

$$\mathfrak{U}_i \subset 2^{S_i}, \quad i = 1, 2$$

и конечно-аддитивной неотрицательной мерой

$$\mu_i : \mathfrak{U}_i \longrightarrow [0, \infty].$$

Рассмотрим подалгебру $\mathfrak{U}_1 \times \mathfrak{U}_2$ в $2^{S_1 \times S_2}$, порожденную подмножествами вида $A_1 \times A_2$, где $A_i \in \mathfrak{U}_i$. На каждом таком подмножестве определим

$$\mu(A_1 \times A_2) := \mu_1(A_1)\mu_2(A_2).$$

а. (!) Докажите, что μ можно продолжить до конечно-аддитивной неотрицательной меры на кольце $\mathfrak{U}_1 \times \mathfrak{U}_2$.

б. (**) Докажите, что это продолжение σ-аддитивно, если μ_i σ-аддитивны.

Определение 3.10. Параллелепипед есть подмножество $\mathbb{R}^n$, вида $I_1 \times I_2 \times ... I_n$, где I_k - интервалы. Рассмотрим подалгебру $\mathfrak{U} \subset 2^{\mathbb{R}^n}$, порожденную счетными объединениями непересекающихся параллелепипедов. Мы будем называть эту алгебру множеств **алгеброй, порожденной параллелепипедами**. Продолжим функцию

$$\mu(I_1 \times I_2 \times ... I_n) \longrightarrow \prod |I_k|$$

до конечно-аддитивной неотрицательной меры μ на $\mathfrak{U}$. Пусть $\mathfrak{M}$ обозначает пополнение $\mathfrak{U}$ относительно $d(A, B) := \mu^*(A \triangle B)$, т.е. множество измеримых множеств, соответствующих $\mathfrak{U}$ и μ. Элементы $\mathfrak{M}$ называются **измеримыми по Лебегу**, а продолжение μ^* на $\mathfrak{M}$ - **мерой Лебега**.

Задача 3.25 (!). а. Докажите, что мера Лебега σ-аддитивна на алгебре, порожденной параллелепипедами.

б. Докажите, что каждое открытое подмножество $\mathbb{R}^n$ измеримо.

Определение 3.11. Рассмотрим σ-алгебру, порожденную открытыми подмножествами $\mathbb{R}^n$. Ее элементы называются **борелевскими подмножествами**.

Задача 3.26 (!). Докажите, что борелевские подмножества в $\mathbb{R}^n$ измеримы по Лебегу.

Задача 3.27 (!). Докажите, что для каждого измеримого множества $A \subset \mathbb{R}^n$ найдется борелевское множество $B \subset \mathbb{R}^n$, такое, что $\mu(B \triangle A) = 0$.

Задача 3.28 (*). Пусть $V \subset B \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченное подмножество открытого шара. Докажите, что V измеримо тогда и только тогда, когда $\mu^*(V) + \mu^*(B \backslash V) = \mu(B)$.