Теория меры 4: Теорема Радона-Никодима и теорема Фубини

4.1. Разложение Хана

Определение 4.1. Напомним, что **зарядом** называется счетно-аддитивная функция на σ-алгебре, принимающая значения в $\mathbb{R}$.

Задача 4.1 (!). Пусть ρ - заряд на сигма-алгебре $\mathfrak{U} \subset 2^S$, а $\beta := \inf \rho(B_\alpha)$, где inf берется по всем B_α таким, что $\rho(B_\alpha) < 0$.

а. Докажите, что $\beta > -\infty$.

б. Пусть E измеримое множество, такое, что $\rho(E) \leqslant \beta + \varepsilon$. Докажите, что для любого $E' \subset S \backslash E$, $\rho(E') \geqslant -\varepsilon$.

в. Пусть E_1, E_2 измеримые множества, причем $\rho(E_i) \leqslant \beta + \varepsilon_i$. Докажите, что $\rho(E_1 \triangle E_2) \geqslant -\varepsilon_1 - \varepsilon_2$. Выведите из этого, что $\rho(E_1 \cup E_2) \leqslant \beta + \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ и $\rho(E_1 \cap E_2) \leqslant \beta + \varepsilon_1 + \varepsilon_2$.

г. Пусть E_i - последовательность измеримых множеств, такая, что $\rho(E_i) \leqslant \beta + \frac{1}{2^i}$. Докажите, что последовательность $B_j := \cup_{i>j} E_i$ обладает тем же свойством.

д. В этих условиях, покажите, что $\rho(B) = \beta$, где $B = \bigcap B_i$.

Указание. Убедитесь, что $|\rho(B_j \backslash E_j)| \leqslant \frac{1}{2^{j-1}}$, $\rho(B_j \backslash B_{i+j}) \leqslant \frac{1}{2^{j-3}}$, а $\rho(B_j \backslash B) \leqslant \frac{1}{2^{j-4}}$.

Задача 4.2. В условиях предыдущей задачи, обозначим $S \backslash B$ за A. Докажите, что $\rho(V) \geqslant 0$ для любого измеримого $V \subset A$.

Определение 4.2. В этой ситуации говорится, что заряд ρ **положителен на** A, обозначается $\rho \geqslant 0$. Ясно, что в таком случае $\rho\Big|_A$ является мерой. Если $-\rho$ положителен, говорится, что ρ отрицателен на A. Если же $\rho(V) = 0$ для любого измеримого $V \subset A$, говорится, что множество A **ρ-пренебрежимо**.

Задача 4.3 (!). В условиях Задачи 4.1, докажите, что ρ отрицателен на B, положителен на $A := S \backslash B$, и разложение $S = A \coprod B$ определено однозначно с точностью до ρ-пренебрежимого множества.

Определение 4.3. Это разложение называется **разложением Хана**.

4.2. Абсолютная непрерывность

Определение 4.4. Пусть S – пространство с сигма-алгеброй, а μ и ν – две меры. Мы говорим, что ν **абсолютно непрерывна** относительно μ (обозначается $\nu \ll \mu$) если для любого измеримого множества A, из $\mu(A) = 0$ следует $\nu(A) = 0$.

Замечание 4.1. Алгебру измеримых (по Лебегу) подмножеств $\mathbb{R}^n$ мы предполагаем фиксированной. Когда говорится о мере на $\mathbb{R}^n$, всегда речь идет о мере на этой алгебре.

Задача 4.4. Приведите пример меры на $\mathbb{R}^n$, не равномерно непрерывной относительно меры Лебега

Задача 4.5. Найдите бесконечный набор M мер на $\mathbb{R}^n$, таких, что никакая мера $\mu \in M$ не равномерно непрерывна относительно другой $\mu' \in M$.

Задача 4.6. Пусть μ мера на пространстве с сигма-алгеброй, а f – интегрируемая функция со значениями в $\mathbb{R}^{\geqslant 0}$. Определим меру $f\mu$ как $A \longrightarrow \int_A f\mu$. Докажите, что $f\mu \ll \mu$.

Задача 4.7. Пусть на пространстве S с сигма-алгеброй заданы меры $\nu \ll \mu$, причем $\nu(S) < \infty$. Предположим, что $\mu(S) < \infty$ и $\nu(S) > 0$. Рассмотрим заряд $\nu - \varepsilon\mu$, где $\varepsilon > 0$, и пусть $S = A_\varepsilon \coprod B_\varepsilon$ – соответствующее ему разложение Хана.

а. Докажите, что $\nu(B_\varepsilon) \leqslant \varepsilon\mu(S)$, и $\lim\limits_{\varepsilon \longrightarrow 0} \nu(B_\varepsilon) = 0$.

б. Выведите из этого, что $\nu(A_\varepsilon) > \frac{1}{2}\nu(S)$ для достаточно маленьких ε.

в. Докажите, что $\mu(A_\varepsilon) > 0$ для какого-то ε

Задача 4.8 (!). Пусть на пространстве S с сигма-алгеброй заданы меры $\nu \ll \mu$, причем $0 < \nu(S) < \infty$ и $\mu(S) < \infty$. Докажите, что для какого-то измеримого множества A с $\mu(A) > 0$, и какого-то $\varepsilon > 0$ заряд $\nu - \varepsilon\mu$ положителен на A.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей

Задача 4.9 (!). Пусть на пространстве S с сигма-алгеброй заданы меры $\nu \ll \mu$, причем $\nu(S) < \infty$. Докажите, что для любого $\delta > 0$ найдется $\varepsilon > 0$ такой, что из $\mu(V) < \varepsilon$ вытекает $\nu(V) < \delta$.

Указание. Применим разложение Хана к $\nu - \alpha\mu$, и пусть Z_α – множество, где заряд $\nu - \alpha\mu$ положителен. Докажитей что множества Z_α монотонно уменьшаются при увеличении α, а их пересечение имеет меру нуль по μ. Возьмите δ такой, что $\mu(Z_\delta) < \varepsilon$.

Замечание 4.2. Довольно часто это свойство предлагается в качестве определения абсолютной непрерывности, эквивалентного обычному.

Задача 4.10 (*). Найдите контрпример к утверждению предыдущей задачи, в ситуации, когда $\nu(S)=\infty$.

Задача 4.11. Приведите контрпример к утверждению задачи 4.8, где μ – мера Лебега на единичном кубе $S\subset\mathbb{R}^n$, а ν не обязательно удовлетворяет $\nu\ll\mu$.

Задача 4.12. Пусть на пространстве S с с сигма-алгеброй заданы меры $\nu\ll\mu$, причем $\mu(S)<\infty$ и $\nu(S)<\infty$. Рассмотрим множество $\mathcal{F}$ интегрируемых функций $f:\ S\longrightarrow\mathbb{R}^{\geqslant 0}$ таких, что $\int_E f\mu\leqslant\nu(E)$ для любого измеримого множества $E\subset S$. Пусть α есть супремум $\sup\limits_{f\in\mathcal{F}}\int_S f\mu$. Докажите, что $\alpha=\int_S\nu$, и этот супремум реализуется для измеримой функции $f\in\mathcal{F}$.

Указание. Рассмотрим последовательность $\{f_i\}\in\mathcal{F}$ таких, что

$$\lim_i\int_S f_i\mu=\alpha.$$

Докажите, что $f:=\sup f_i$ это измеримая функция, лежащая в $\mathcal{F}$ и удовлетворяющая $\alpha=\int_S f\mu$. В предположении, что $\nu\neq f\mu$, воспользуйтесь задачей 4.8 и найдите A, $\mu(A)>0$ и ε такие, что $\nu'>\varepsilon\mu$ на A, где $\nu':=\nu-f\mu$. Функция $f':=f+\varepsilon\chi_A$ принадлежит $\mathcal{F}$ и удовлетворяет $\int_S f'>\int_S f$.

Замечание 4.3. На протяжении этого листка полезно пользоваться следующей леммой. Пусть $\{f_i\}$ - монотонно убывающая или возрастающая последовательность интегрируемых функций, ограниченная по норме $|\cdot|_1$. Тогда $\{f_i\}$ это последовательность Коши в смысле L_1-топологии, (топологии, заданной нормой $|\cdot|_1$), и сходится (в смысле L_1-топологии) к поточечному пределу f_i. Докажите ее.

Задача 4.13 (!). (теорема Радона-Никодима) Пусть на пространстве S с сигма-алгеброй заданы меры $\nu\ll\mu$, причем $\mu(S)<\infty$ и $\nu(S)<\infty$. Докажите, что существует интегрируемая функция $f:\ S\longrightarrow\mathbb{R}^{\geqslant 0}$ такая, что $\nu=f\mu$.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

4.3. Прямой образ меры

Определение 4.5. Пусть M, N пространства с заданными на них сигма-алгебрами $\mathfrak{U}_M$ и $\mathfrak{U}_N$, а $f:\ M\longrightarrow N$ - измеримое отображение. Определим **прямой образ меры** $f_*\mu:\ \mathfrak{U}_N\longrightarrow\mathbb{R}$ посредством

$$f_*\mu(Z):=\mu(f^{-1}(Z))).$$

Задача 4.14. Докажите, что это определение задает меру на N.

Задача 4.15 (!). Пусть $f : I \longrightarrow I$ – измеримая функция, $\pi : I \times I \longrightarrow I$ проекция на первый множитель, а $K \subset I \times I$ – область под графиком f в $I \times I$. Формально, K определяется как подмножество $I \times I$, состоящее из всех пар

$$K := \{x, y \in I \times I \mid f(x) \geqslant y\}.$$

В предположении, что мера произведения на $I \times I$ σ-аддитивна, докажите, что K измеримо, а $\pi_* \mu = f\mu$, где μ это мера Лебега.

Определение 4.6. Пусть M, N топологические пространства, $\mathfrak{U}_M$ и $\mathfrak{U}_N$ алгебры борелевских множеств, а $f : M \longrightarrow N$ - непрерывное отображение. Пусть на M задана мера μ. Определим **прямой образ меры** $f_*\mu : \mathfrak{U}_N \longrightarrow \mathbb{R}$ так:

$$f_*\mu(Z) := \mu(f^{-1}(Z))).$$

Прямой образ меры Лебега при непрерывном отображении компактных подмножеств из $\mathbb{R}^n$ продолжается до меры на алгебре измеримых множеств. Полученная мера называется **прямым образом меры Лебега**.

Задача 4.16. Приведите пример непрерывного отображения $f : M \longrightarrow N$ открытых подмножеств $\mathbb{R}^n$ такого, что прямой образ меры Лебега не абсолютно непрерывен по отношению к мере Лебега на N.

Задача 4.17 (!). Пусть $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ невырожденный линейный оператор. Докажите, что $L_*\mu = |\det L|\mu$.

Задача 4.18 (*). Пусть $\phi : [0,1] \longrightarrow [0,1] \times [0,1]$ - отображение Пеано (непрерывное сюрьективное отображение из отрезка в квадрат, построенное в листке Топология 6). Докажите, что $\phi_*\mu = \mu$, где μ это мера Лебега.

Задача 4.19 (*). Пусть (A, μ_A), (B, μ_B) пространства с мерой, а $\phi : A \longrightarrow B$, $\psi : B \longrightarrow A$ инъективные измеримые отображения, которые удовлетворяют $\psi_*\mu_B = \mu_A$, $\phi_*\mu_A = \mu_B$. Предположим, что образ ψ и ϕ также измерим, и обратные отображения (определенные на образе) измеримы. Докажите, что есть биекция $\xi : A \longrightarrow B$, которая удовлетворяет $\xi_*\mu_A = \mu_B$.

Указание. Воспользуйтесь тем же аргументом, который доказывает теорему Кантора-Бернштейна.

Задача 4.20 (**). Пусть (A, μ_A), (B, μ_B) – единичные кубы в $\mathbb{R}^n$ и в $\mathbb{R}^m$, с мерой Лебега. Постройте измеримую биекцию $\xi : A \longrightarrow B$, которая удовлетворяет $\xi_*\mu_A = \mu_B$, $\xi_*^{-1}\mu_B = \mu_A$.

4.4. Теорема Фубини

Определение 4.7. Пусть (X, μ_X) и (Y, μ_Y) – пространства с σ-алгеброй и счетно-аддитивной мерой. Напомним, что цилиндрическим множеством называется подмножество вида $A \times B \subset X \times Y$, где A и B измеримы в X, Y. Рассмотрим алгебру, порожденную цилиндрическими подмножествами в $X \times Y$, и положим $\mu(A \times B) := \mu_X(A)\mu_Y(B)$. Пусть $L(X \times Y)$ - пополнение этой алгебры, по внешней мере μ^*, связанной с μ, определенное в листке 2.

Задача 4.21. В этих условиях, обозначим за $\pi : X \times Y \longrightarrow Y$ естественную проекцию. Рассмотрим измеримое подмножество $A \subset X \times Y$, и пусть $\pi_*\mu_A := \pi_*(\chi_A \mu^*)$ прямой образ меры с A. Предположим, что X является счетным объединением подмножеств конечной меры (такие пространства называются **σ-конечными**). Докажите, что $\pi_*\mu_A$ абсолютно непрерывно относительно μ_Y.

Замечание 4.4. Согласно теореме Радона-Никодима, $\pi_*\mu_A = f_A \mu_Y$, для какой-то измеримой функции f_A на Y.

Задача 4.22. Пусть $A \subset X \times Y$ - цилиндрическое измеримое множество, представленное в виде счетного объединения цилиндрических: $A = \coprod A_i$. Докажите, что $\pi_*(\chi_A \mu) = \sum \pi_*(\chi_{A_i} \mu)$. Выведите из этого, что мера μ на $X \times Y$ σ-аддитивна.

Задача 4.23. Пусть $A \subset X \times Y$ – множество меры нуль. Докажите, что $f_A = 0$, где f_A - функция, определенная выше.

Задача 4.24. Пусть задана последовательность Коши измеримых множеств $A_i \subset X \times Y$, сходящаяся к $A \subset X \times Y$, а f_{A_i}, f_A - функции на Y, построенные выше. Докажите, что f_{A_i} сходится к f_A в метрике, заданной $|\cdot|_1$.

Указание. Если $\mu(B) = \varepsilon$, то $\int_Y f_B \mu_Y = \varepsilon$.

Определение 4.8. Пусть $A \subset X \times Y$ измеримо. Рассмотрим функцию f_A на Y (Замечание 4.4). Подмножество $A \subset X \times Y$ называется **π-измеримым,** если $A_y := A \cap \pi^{-1}(y) \subset X \times \{y\}$ измеримо для почти всех $y \in Y$ (т.е. вне множества меры нуль на Y), и $\mu_X(A_y) = f_A(y)$ почти везде.

Задача 4.25. Докажите, что цилиндрические множества π-измеримы. Докажите, что конечные объединения и пересечения π-измеримых множеств π-измеримы. Докажите, что множества меры нуль π-измеримы.

Определение 4.9. Последовательность подмножеств $\{A_i\} \subset S$ называется **монотонной**, если $A_i \subset A_j$ для всех $j > i$, либо $A_i \supset A_j$ для всех $j > i$. В первом случае говорится, что $\{A_i\}$ возрастающая последовательность, во втором случае - убывающая.

Задача 4.26. а. Пусть задана монотонная последовательность $A_i \subset X \times Y$ π-измеримых множеств. Докажите, что функция $y \longrightarrow \mu_X(A_{iy})$ сходится к $y \longrightarrow \mu_X(A_y)$, где $A = \bigcup A_i$ для возрастающей последовательности и $A = \bigcap A_i$ для убывающей последовательности.

б. Выведите из этого, что монотонная последовательность Коши π-измеримых множеств сходится к π-измеримому множеству

Задача 4.27 (!). Докажите, что все измеримые подмножества в $X \times Y$ π-измеримы.

Указание. Докажите, что любое измеримое множество приближается последовательностью Коши вида $\bigcup_j \bigcap_{i>j} A_i$, где все A_i - конечные объединения цилиндрических. Выведите из этого, что любое измеримое подмножество (с точностью до множества меры нуль) получается монотонными пределами из π-измеримых множеств.

Задача 4.28 (*). Пусть I есть единичный интервал, а $\phi: \ I \longrightarrow I^n$ отображает число x с десятичной записью $0, a_1 a_2, ...$ в $(x_1, ... x_n)$, где x_i записывается в десятичном виде как $0, a_i a_{i+n} a_{i+2n} ....$ Обозначим за μ_I меру Лебега на I^n. Докажите, что $\phi_* \mu_I$ есть мера Лебега на кубе I^n

Задача 4.29 (!). (теорема Фубини) Пусть ϕ – интегрируемая функция на $X \times Y$, с мерой, заданной выше. Для $y \in Y$, рассмотрим ограничение ϕ на $X \times \{y\}$ как функцию $\phi_y: \ X \longrightarrow \mathbb{R}$. Докажите, что ϕ_y измеримо для почти всех $y \in Y$, и

$$\int_{X \times Y} f\mu = \int_Y \left(\int_X \phi_y \mu_X \right) \mu_Y.$$

Задача 4.30. Приведите пример неизмеримой функции $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, график которой измерим.

Задача 4.31 (**). Существует ли функция $f: \ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, график которой неизмерим?