

## Теория Меры 5: Внешняя мера

### 5.1. Мера и объем

На протяжении этого листа,  $M$  есть хаусдорфово топологическое пространство, а  $\mathbf{C}$  - множество компактных подмножеств  $M$ .

**Определение 5.1.** Алгеброй борелевских множеств на  $M$  называется  $\sigma$ -алгебра  $\mathbf{S}$ , порожденная  $\mathbf{C}$ . Мера Бореля - это мера на  $(M, \mathbf{S})$ .

**Задача 5.1.** Предположим, что  $M$  - локально компактно и имеет счетную базу открытых множеств. Докажите, что  $\mathbf{S}$  -  $\sigma$ -алгебра, порожденная открытыми множествами.

**Задача 5.2.** Предположим, что любое замкнутое подмножество в  $M$  может быть получено как счетное объединение компактов (в такой ситуации, говорится, что  $M$   $\sigma$ -компактно). Докажите, что  $\mathbf{S}$  -  $\sigma$ -алгебра, порожденная открытыми множествами.

**Определение 5.2.** Пусть задана функция  $\lambda : \mathbf{C} \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ , где  $\mathbf{C}$  есть множество компактных подмножеств  $M$ . Мы говорим, что  $\lambda$

- а. **Монотонна**, если  $\lambda(A) \leq \lambda(B)$  для  $A \subset B$
- б. **аддитивна**, если  $\lambda(A \sqcup B) = \lambda(A) + \lambda(B)$
- в. **полуаддитивна**, если  $\lambda(A \cup B) \leq \lambda(A) + \lambda(B)$

В таком случае,  $\lambda$  называется **объемом**.

**Определение 5.3.** Пусть на  $M$  задан объем  $\lambda : \mathbf{C} \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ . **Внутренним объемом** подмножества  $S \subset M$  называется число  $\lambda_*(S) := \sup_C \lambda(C)$ , где супремум берется по всем компактным  $C \subset S$ . **Внешней мерой** подмножества  $S \subset M$  называется число  $\lambda^*(S) := \inf_U \lambda_*(U)$ , где инфимум берется по всем открытым множествам  $U$ , содержащим  $S$ .

**Задача 5.3.** Докажите, что для любого открытого множества  $U \subset M$ ,  $\lambda_*(U) = \lambda^*(U)$ .

**Определение 5.4.** Напомним, что **внутренностью** подмножества  $A \subset M$  называется множество всех  $x \in A$  таких, что некоторая окрестность  $x$  содержится в  $A$ .

**Задача 5.4.** Докажите, что **внутренность** любого множества открыта. Докажите, что внутренность  $A \subset M$  совпадает с  $\overline{M \setminus (M \setminus A)}$ , где  $\overline{(M \setminus A)}$  обозначает замыкание  $M \setminus A$  в  $M$ .

**Задача 5.5.** Докажите, что для любого компактного подмножества  $C \subset M$ ,

$$\lambda^*(C) \geq \lambda(C) \geq \lambda_*(C_0),$$

где  $C_0$  обозначает внутренность  $C$ .

**Задача 5.6 (\*)**. Пусть  $M$  локально компактно и имеет счетную базу. Докажите, что для любого компакта  $C \subset M$ ,  $C = \bigcap U_i$ , для некоторой последовательности открытых множеств, содержащих  $C$ .

**Задача 5.7 (!)**. Пусть  $M = \mathbb{R}^n$ . Докажите, что мера Лебега на  $M$  задает объем

$$\lambda : \mathbf{C} \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}.$$

Докажите, что в такой ситуации  $\lambda^*(C) = \lambda(C)$  для любого компактного подмножества  $C \subset M$ .

**Задача 5.8.** Пусть  $M$  - хаусдорфово топологическое пространство, на котором задан объем  $\lambda : \mathbf{C} \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ . Предположим, что  $C \subset U \cup V$  - компактное подмножество объединения открытых множеств  $U$  и  $V$ . Докажите, что найдутся компактные подмножества  $C_U \subset U$ ,  $C_V \subset V$  такие, что  $C_U \cup C_V = C$ .

**Указание.** Докажите, что два непересекающихся компактных подмножества хаусдорфова пространства имеют непересекающиеся окрестности. Воспользуйтесь этим, чтобы найти непересекающиеся открытые окрестности  $U_1$  и  $C \setminus V$  и  $V_1$  и  $C \setminus U$ . Докажите, что  $C_V := C \setminus U_1$ ,  $C_U := C \setminus V_1 \subset U$  удовлетворяют условиям задачи.

**Задача 5.9 (!).** Пусть  $M$  - хаусдорфово топологическое пространство, на котором задан объем  $\lambda : \mathbf{C} \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ . Пусть  $U, V$  открытые множества. Докажите, что  $\lambda_*(U \cup V) \leq \lambda_*(U) + \lambda_*(V)$ .

**Указание.** Воспользуйтесь предыдущей задачей.

**Задача 5.10.** Выведите из этого, что  $\lambda^*$  полуаддитивна, то есть  $\lambda^*(\bigcup A_i) \leq \sum \lambda^*(A_i)$  для любого конечного набора  $A_i \subset M$ .

**Задача 5.11 (!).** Докажите, что  $\lambda^*$  счетно полуаддитивно, то есть удовлетворяет  $\lambda^*(\bigcup A_i) \leq \sum \lambda^*(A_i)$  для любого счетного набора  $A_i \subset M$ .

**Указание.** Сведите утверждение к  $\lambda_*(\bigcup U_i) \leq \sum \lambda^*(U_i)$ , где  $U_i$  все открыты. Если  $C \subset \bigcup U_i$  компакт, то  $C$  покрывается конечным набором  $U_i$ . Следовательно,

$$\lambda^*\left(\bigcup U_i\right) \leq \lambda^*(U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_n)$$

для конечного поднабора. Воспользуйтесь предыдущей задачей, чтобы получить  $\lambda^*(U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_n) \leq \sum_{i=1}^n \lambda^*(U_i)$ .

**Задача 5.12 (!).** Пусть  $U$  открыто,  $C$  компактно. Докажите, что

$$\lambda^*(U) = \lambda^*(U \setminus C) + \lambda^*(U \cap C).$$

**Указание.** В силу уже доказанного, достаточно установить

$$\lambda^*(U) \geq \lambda^*(U \setminus C) + \lambda^*(U \cap C).$$

$\lambda_*(U \setminus C)$  есть  $\sup \lambda(D)$ , где супремум берется по всем компактным  $D$ , лежащим в  $U \setminus C$ . Для каждого такого  $D$ ,  $U \setminus D$  это окрестность  $C \cap U$ , и  $\lambda^*(C \cap U) \leq \lambda_*(U \setminus D) = \sup \lambda(E)$ , где супремум берется по всем компактам  $E$ , лежащим в  $U \setminus D$ . По построению  $D$  и  $E$  не пересекаются. Докажите, что

$$\lambda^*(U \setminus C) + \lambda^*(U \cap C) = \sup_D \lambda(D) + \lambda^*(U \cap C) \leq \sup_{D,E} \lambda(E) + \lambda(D) = \sup_{D,E} \lambda(D \cup E) \leq \lambda^*(U)$$

**Определение 5.5.** Пусть  $M$  - хаусдорфово топологическое пространство, на котором задан объем  $\lambda : \mathbf{C} \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ . Подмножество  $A \subset M$  называется  $\lambda^*$ -измеримым, или же **измеримым по Каратеодори**, если

$$\lambda^*(B) = \lambda^*(B \setminus A) + \lambda^*(B \cap A)$$

для любого подмножества  $B \subset M$ .

**Задача 5.13 (!).** Пусть

$$\lambda^*(U) = \lambda^*(U \setminus A) + \lambda^*(U \cap A) \tag{5.1}$$

для любого открытого  $U \subset M$ . Докажите, что  $A$   $\lambda^*$ -измеримо.

**Указание.**  $\lambda^*(B) = \inf \lambda^*(V)$ , где инфимум берется по всем открытым окрестностям  $V \supset B$ . Поэтому из (5.1) следует

$$\lambda^*(B) = \inf_V \lambda^*(V) = \inf_V \left( \lambda^*(V \setminus A) + \lambda^*(V \cap A) \right) \geq \lambda^*(V \setminus A) + \lambda^*(V \cap A) \geq \lambda^*(B \setminus A) + \lambda^*(B \cap A)$$

Обратное неравенство вытекает из полуаддитивности.

**Задача 5.14 (!).** Докажите, что  $\lambda^*$ -измеримые множества образуют алгебру.

**Указание.** Если  $\lambda^*(X \amalg Y) = \lambda^*(X) + \lambda^*(Y)$ , то  $\lambda^*(X \amalg Y) = \lambda^*(X \setminus A) + \lambda^*(X \cap A) + \lambda^*(Y \setminus A) + \lambda^*(Y \cap A)$ , для любого  $\lambda^*$ -измеримого множества  $A$ .

**Задача 5.15.** Пусть  $A = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i$  – счетное объединение непересекающихся  $\lambda^*$ -измеримых множеств. Предположим, что для любого множества  $X$  с  $\lambda^*(X) < \infty$ , имеем  $\lim_N \lambda^*(X \cap \bigsqcup_{i=N}^{\infty} A_i) = 0$ . Докажите, что  $A$  тоже  $\lambda^*$ -измеримо.

**Указание.** Докажите, что

$$\lambda^*(A \cap X) = \lambda^*\left(X \cap \prod_{i=1}^{N-1} A_i\right) + \lambda^*\left(X \cap \prod_{i=N}^{\infty} A_i\right), \quad \text{и} \quad \lambda^*(X \setminus A) \leq \lambda^*\left(X \setminus \left(\prod_{i=1}^{N-1} A_i\right)\right),$$

и выведите

$$\lambda^*(A \cap X) + \lambda^*(X \setminus A) \leq \lambda^*(X) + \lambda^*\left(X \cap \prod_{i=N}^{\infty} A_i\right).$$

**Задача 5.16.** Пусть  $X$  измеримо,  $\lambda^*(X \cap A) < \infty$ , где  $A = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i$  – счетное объединение непересекающихся  $\lambda^*$ -измеримых множеств. Докажите, что  $\lim_N \lambda^*(X \cap \bigsqcup_{i=N}^{\infty} A_i) = 0$ .

**Указание.** Заменяя  $X$  на  $X \cap A$ , а  $A_i$  на  $A_i \cap X$ , можно считать, что  $X = A$  и  $\lambda^*(X) < \infty$ . Пусть  $U_i$  – окрестности  $A_i$ , такие, что  $\lambda^*(U_i) \leq \lambda^*(A_i) + \frac{1}{2^i} \varepsilon$ . Докажите, что  $\lambda^*(U_i \setminus A_i) \leq \frac{1}{2^i} \varepsilon$ . Найдите в  $\bigcup_i U_i$  компакт  $K$ , такой, что  $\lambda^*(A) = \lambda(K) - \varepsilon$ , и пусть  $U_1, \dots, U_N$  – конечное покрытие  $K$ . Выведите, что

$$\lambda^*(A) = \lambda(K) - \varepsilon \leq \lambda^*\left(\bigcup_{i=1}^N U_i\right) \leq \sum_{i=1}^N \lambda^*(A_i) + \lambda^*(U_i \setminus A_i) \leq \sum_{i=1}^N \lambda^*(A_i) + \varepsilon.$$

Воспользовавшись  $\lambda^*(A) = \sum_{i=1}^N \lambda^*(A_i) + \lambda^*(\bigsqcup_{i=N}^{\infty} A_i)$ , убедитесь, что  $\lambda^*(\bigsqcup_{i=N}^{\infty} A_i) \leq 2\varepsilon$ .

**Задача 5.17.** Докажите, что счетное объединение  $\lambda^*$ -измеримых множеств можно представить как счетное объединение непересекающихся  $\lambda^*$ -измеримых множеств.

**Задача 5.18 (!).** Докажите, что счетное объединение  $\lambda^*$ -измеримых множеств  $\lambda^*$ -измеримо. Выведите из этого, что любое борелевское множество  $\lambda^*$ -измеримо. Докажите, что  $\lambda^*$  задает меру на алгебре борелевских множеств.

**Указание.** Замените  $\bigcup A_i$  на счетное объединение непересекающихся  $\lambda^*$ -измеримых множеств, и примените задачи 5.15 и 5.16.

**Определение 5.6.** Эта мера называется **борелевской мерой, связанной с объемом**  $\lambda : \mathbf{C} \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ .

**Задача 5.19 (!).** Пусть  $M = \mathbb{R}^n$ , а  $\lambda : \mathbf{C} \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$  это мера Лебега. Докажите, что соответствующая ему внешняя мера  $\lambda^*$  на борелевских множествах равна мере Лебега.

**Задача 5.20 (!).** Докажите, что измеримое по Лебегу подмножество  $\mathbb{R}^n$  измеримо по Каратеодори.

**Задача 5.21 (\*\*).** Докажите, что измеримое по Каратеодори подмножество  $\mathbb{R}^n$  измеримо по Лебегу.

## 5.2. Размерность Хаусдорфа

**Определение 5.7.** Пусть  $M$  – метрическое пространство. **Диаметр**  $\text{diam}(M) \in [0, \infty]$  есть число  $\sup_{x, y \in M} d(x, y)$

**Определение 5.8.** **Шаром** с центром в  $x$  радиуса  $\varepsilon$  в метрическом пространстве называется множество  $B_\varepsilon(x)$  всех точек  $y$  с  $d(x, y) < \varepsilon$ .

**Задача 5.22.** Чему может быть равен диаметр шара радиуса  $\varepsilon$  в метрическом пространстве?

**Задача 5.23.** Пусть  $M$  – метрическое пространство,  $\varepsilon > 0$ . Докажите, что у  $M$  есть покрытие, состоящее из шаров диаметра  $\leq \varepsilon$ .

**Определение 5.9.** Пусть  $\{S_i\}$  – покрытие пространства  $M$ , состоящее из шаров радиуса  $r$  с  $r < \varepsilon$ . Определим  $\mu_{d, \varepsilon} \in [0, \infty]$  как

$$\mu_{d, \varepsilon} := \inf_{\{S_i\}} \sum_i (\text{diam } S_i)^d$$

где инфимум берется по всем таким покрытиям. Предел  $\mu_d(M) := \sup \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu_{d, \varepsilon}(M)$  называется  **$d$ -мерной мерой Хаусдорфа** пространства  $M$ .

**Задача 5.24 (!).** Докажите, что для любого метрического пространства,  $\mu_d(M)$  – монотонно невозрастающая функция от  $d$ , причем она равна нулю или бесконечности всюду, кроме, быть может, одного значения  $d$ .

**Указание.** Докажите, что для любого покрытия шарами с диаметром  $\leq \varepsilon$ , имеем  $\sum_i (\text{diam } S_i)^d \leq \varepsilon^{d-d'} \sum_i (\text{diam } S_i)^{d'}$  для  $d > d'$ . Выведите из этого, что  $\mu_d(M) \leq \varepsilon^{d-d'} \sum_i (\text{diam } S_i)^{d'}$ , а из этого – что  $\mu_d(M) \leq \varepsilon^{d-d'} \mu_{d'}(M)$

**Определение 5.10.** **Размерность Хаусдорфа**  $\dim_h(M)$  метрического пространства есть супремум  $\sup \{d \in \mathbb{R} \mid \mu_d(M) = \infty\}$ . **Мера Хаусдорфа**  $\text{Vol}_h(M)$  есть его мера Хаусдорфа размерности  $\dim_h(M)$ .

## 5.3. Мера Хаусдорфа

**Задача 5.25.** Докажите, что  $\dim_h([0, 1]) = 1$ .

**Задача 5.26 (\*\*).** Пусть  $M_1, M_2$  – компактные метрические пространства. Докажите, что

$$\dim_h(M_1 \times M_2) = \dim_h(M_1) + \dim_h(M_2).$$

**Задача 5.27 (\*).** Найдите размерность Хаусдорфа единичного куба в  $\mathbb{R}^n$ .

**Задача 5.28 (\*).** Определим канторово множество как подмножество  $K \subset [0, 1]$ , состоящее из всех точек, в троичном разложении которых нет 1. Найдите  $\dim_h(K)$ .

**Задача 5.29 (\*\*).** Постройте метрическое пространство бесконечной размерности Хаусдорфа.

**Задача 5.30.** Предположим, что  $M$  – локально компактное метрическое пространство хаусдорфовой размерности  $d$ , причем соответствующая  $d$ -мерная мера  $\mu_d(K)$  конечна для любого компакта. Докажите, что  $\mu_d(K)$  является объемом, в смысле определения, данного в начале листка.

**Задача 5.31 (\*).** Пусть  $M = \mathbb{R}^n$ , с обычной метрикой. Докажите, что объем  $\text{Vol}_h(K)$ , заданный мерой Хаусдорфа на компактных подмножествах  $M$ , пропорционален мере Лебега.