Теория меры, лекция 1: объемы многогранников

Миша Вербицкий

14 февраля, 2015

матфак ВШЭ и НМУ

Кольца подмножеств

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть задано множество S. Множество всех подмножеств S обозначается 2^S. Пусть $\mathfrak{U} \subset 2^S$ - некоторый набор подмножеств S. $\mathfrak{U}$ называется **кольцом**, если для любых $A, B \in \mathfrak{U}$, объединение $A \cup B$, пересечение $A \cap B$ и дополнение $A \backslash B$ принадлежит $\mathfrak{U}$. В этом случае $\mathfrak{U}$ называется **подкольцом** в 2^S.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\mathfrak{V} \subset 2^S$ - произвольный набор подмножеств. Минимальное подкольцо в 2^S, содержащее $\mathfrak{V}$, называется **подкольцом, порожденным** $\mathfrak{V}$.

Характеристические функции

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Характеристической функцией подмножества $U \subset S$ называется функция

$$\chi_U : S \to \{0,1\} \quad | \quad \chi_U(x) = 1, \quad \text{если} \quad x \in U \qquad \chi_U(x) = 0, \quad \text{если} \quad x \notin U.$$

принимающая значения в кольце $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: $\mathfrak{U} \subset 2^S$ – **кольцо подмножеств тогда и только тогда,** когда множество R характеристических функций элементов W **замкнуто относительно сложения и умножения.**

Доказательство: Пусть $\mathfrak{U} \subset 2^S$ – кольцо подмножеств. Чтобы убедиться, что R замкнуто относительно арифметических операций, мы напишем $\chi_U \cdot \chi_V = \chi_{U\cap V}$ и $\chi_U + \chi_V = \chi_{U\triangle V}$, где $\triangle$ обозначает **симметрическую разность:** $U\triangle V = (U \cup V)\backslash(U \cap V)$ **(проверьте это)**.

Наоборот, если R замкнуто, можно выразить $\chi_{U\cap V}$ и $\chi_{U\cup V}$ через арифметические операции: $\chi_{U\cap V} = \chi_U\cdot\chi_V$ и $\chi_{U\cup V} = \chi_U+\chi_V+\chi_U\cdot\chi_V$ **(проверьте)**.
■

Кольцо многогранников

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Подмножество $\mathbb{R}^n$ называется **выпуклым**, если вместе с любыми двумя своими точками оно содержит соединяющий их отрезок.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть задано подмножество $S \subset \mathbb{R}^n$. **Выпуклой оболочкой** S называется пересечение всех выпуклых подмножеств $\mathbb{R}^n$, содержащих S.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Симплексом** в $\mathbb{R}^n$ называется выпуклая оболочка множества $\{x_0, ... x_n\}$ из $n+1$ точек в $\mathbb{R}^n$. Такой симплекс называется **натянутым на точки** $x_0, ... x_n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\Delta(x_0, ... x_n)$ - симплекс, натянутый на точки $\{x_0, ... x_n\}$. **Гранью** Δ размерности k называется выпуклая оболочка $k+1$ точек из $\{x_0, ... x_n\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Кольцо полиэдров (многогранников)** есть кольцо подмножеств в $\mathbb{R}^n$, порожденное замкнутыми симплексами. **Многогранником** называется элемент этого кольца.

Разрезание многогранников

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Вырожденный симплекс** есть симплекс, лежащий в какой-то гиперплоскости. **Вырожденный многогранник** есть элемент кольца подмножеств, порожденного вырожденными симплексами.

УПРАЖНЕНИЕ: Пусть A – многогранник, а $\bar{A}$ его замыкание (в смысле обычной топологии на $\mathbb{R}^n$). Докажите, что **дополнение $\bar{A}\backslash A$ – вырожденный многогранник.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Разрезание** многогранника есть разбиение его замыкания в объединение многогранников $A_1, ..., A_n$ таким образом, что все пересечения A_i вырождены.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Триангуляция** многогранника есть разрезание его на симплексы.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что **любой многогранник допускает триангуляцию.**

Конечно-аддитивные функции

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\mathfrak{U} \subset 2^S$ – кольцо подмножеств. Функция $\mu : \mathfrak{U} \to \mathbb{R}$ называется **аддитивной**, или **конечно-аддитивной**, если для любых $A, B \in \mathfrak{U}$, которые не пересекаются, имеет место $\mu(A \coprod B) = \mu(A) + \mu(B)$ (объединение непересекающихся подмножеств обозначают $A \coprod B$).

ЗАМЕЧАНИЕ: Конечная аддитивность функции μ равносильно выполнению соотношения

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B).$$

(докажите это)!

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Два подмножества называются **конгруэнтными**, если одно в другое можно перевести движением. Валюация $\mu : \mathfrak{U} \to \mathbb{R}$ называется **инвариантной относительно движений**, если $\mu(A) = \mu(B)$ для конгруэнтных фигур $A, B \subset \mathbb{R}^n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Объем многогранника** есть конечно-аддитивная, неотрицательная, ненулевая функция на кольце многогранников, инвариантная относительно движений, и зануляющаяся на вырожденных многогранниках.

Существование объема будет доказано на этой лекции.

Многогранники, заполненные либо покрытые кубами

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $v_1, ..., v_n$ – стандартный базис в $\mathbb{R}^n$, Λ – порожденная им решетка, а $\varepsilon\Lambda$ – та же решетка, растянутая в ε раз. Обозначим за ν форму объема, полученную из двойственного базиса. Пусть $\underline{\mathfrak{N}_{\varepsilon\Lambda}}(D)$ – число ε-кубов с вершинами в решетке $\varepsilon\Lambda$, целиком содержащихся в D, а $\overline{\mathfrak{N}_{\varepsilon\Lambda}}(D)$ – число ε-кубов с вершинами в решетке $\varepsilon\Lambda$, пересекающихся с D. Обозначим за $\underline{\mathfrak{V}_{\varepsilon\Lambda}}(D)$ и $\overline{\mathfrak{V}_{\varepsilon\Lambda}}(D)$ и “тотальный объем” этих кубов (**объем мы пока не определили,** но понятно, что объем куба со стороной ε должен быть равен ε^n),

$$\underline{\mathfrak{V}_{\varepsilon\Lambda}}(D) := \varepsilon^n \underline{\mathfrak{N}_{\varepsilon\Lambda}}(D), \quad \overline{\mathfrak{V}_{\varepsilon\Lambda}}(D) := \varepsilon^n \overline{\mathfrak{N}_{\varepsilon\Lambda}}(D).$$

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что **функция $N \to \underline{\mathfrak{V}_{2^{-N}\Lambda}}(D)$ монотонно (возможно, нестрого) возрастает, а функция $N \to \overline{\mathfrak{N}_{2^{-N}\Lambda}}(D)$ монотонно (возможно, нестрого) убывает.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Определим **внутренний объем** $\underline{\operatorname{Vol}_\Lambda}(D)$ как предел $\lim_N \underline{\mathfrak{V}_{2^{-N}\Lambda}}(D)$, а **внешний объем** $\overline{\operatorname{Vol}_\Lambda}(D)$ как предел $\lim_N \overline{\mathfrak{N}_{2^{-N}\Lambda}}(D)$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Для каждого многогранника, содержащегося в кубе со стороной A и вершинами в решетке Λ, имеем $\overline{\operatorname{Vol}_\Lambda(D)} \leqslant \overline{\operatorname{Vol}_\Lambda(A)} = A^n$. В частности, **предел $\overline{\operatorname{Vol}_\Lambda(D)}$ конечен.**

Объем вырожденного многогранника

УТВЕРЖДЕНИЕ: Для любого вырожденного многогранника D, имеем $\overline{\operatorname{Vol}_\Lambda(D)} = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Рассмотрим проекции $\Pi_i : D \to V_i$ на координатные гиперплоскости, с соответствующими решетками Λ_i. Тогда

$$\overline{\mathfrak{N}_{2^{-N}\Lambda}}(D) \leqslant \sum_i \overline{\mathfrak{N}_{2^{-N}\Lambda_i}}(\Pi_i(D)) \leqslant 2^{(n-1)N} \sum_i \overline{\mathfrak{V}_{\Lambda_i}}(\Pi_i(D)),$$

что дает

$$\overline{\operatorname{Vol}_\Lambda(D)} \leqslant 2^{(n-1)N} 2^{-Nn} \sum_i \overline{\operatorname{Vol}_{\Lambda_i}}(\Pi_i(D)) \leqslant 2^{-N} \sum_i \operatorname{Vol}_\Lambda(\Pi_i(D)).$$

■

Внутренний объем равен внешнему

СЛЕДСТВИЕ: Для каждого многогранника, $\overline{\operatorname{Vol}_\Lambda}(D) = \underline{\operatorname{Vol}_\Lambda}(D)$.

Доказательство. Шаг 1: Докажите, что **граница** D (объединение всех точек замыкания D, не лежащих в его внутренности) это вырожденный многогранник.

Шаг 2: Каждый кубик, который не лежит в D, но пересекается с D, пересекается с его границей **(докажите это).** Поэтому $\overline{\mathfrak{V}_{2^{-N}\Lambda}}(D) - \underline{\mathfrak{V}_{2^{-N}\Lambda}}(D) = \overline{\mathfrak{V}_{2^{-N}\Lambda}}(\partial D)$, где ∂D это граница D.

Шаг 3: Из предыдущей формулы, получаем, что $\overline{\operatorname{Vol}_\Lambda}(D) - \underline{\operatorname{Vol}_\Lambda}(D) = \overline{\operatorname{Vol}_\Lambda}(\partial D)$, а этот объем равен нулю, как доказано выше. ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Обозначим $\overline{\operatorname{Vol}_\Lambda}(D) = \underline{\operatorname{Vol}_\Lambda}(D)$ за $\operatorname{Vol}_\Lambda(D)$.

Аддитивность объема

ТЕОРЕМА: **Функция $D \to \operatorname{Vol}_\Lambda(D)$ аддитивна на кольце многогранников.**

Доказательство. Шаг 1: Пусть D разбит в объединение двух замкнутых многогранников, $D = D_1 \cup D_2$, пересекающихся по вырожденному. Достаточно доказать, что $\operatorname{Vol}_\Lambda(D) = \operatorname{Vol}_\Lambda(D_1) + \operatorname{Vol}_\Lambda(D_2)$ **(проверьте это).**

Шаг 2:

$$\underline{\mathfrak{V}_{2^{-N}\Lambda}(D)} - \underline{\mathfrak{V}_{2^{-N}\Lambda}(D_1)} - \underline{\mathfrak{V}_{2^{-N}\Lambda}(D_2)} \leqslant \overline{\mathfrak{V}_{2^{-N}\Lambda}(D_1 \cap D_2)}$$

(проверьте это).

Шаг 3: Из предыдущей формулы, следует, что $\underline{\operatorname{Vol}_\Lambda(D)} - \underline{\operatorname{Vol}_\Lambda(D_1)} - \underline{\operatorname{Vol}_\Lambda(D_2)} \leqslant \overline{\operatorname{Vol}_\Lambda(D_1 \cap D_2)}$. Но $\overline{\operatorname{Vol}_\Lambda(D_1 \cap D_2)} = 0$, поскольку многогранник $D_1 \cap D_2$ вырожденный. ■

Объем и параллельные переносы

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть A получен из B параллельным переносом. **Тогда $\operatorname{Vol}(A) = \operatorname{Vol}(B)$.**

Доказательство. Шаг 1: Достаточно проверить это утверждение для кубов, дальше мы заполняем A кубиками суммарного объема $\operatorname{Vol}_\Lambda(A) - \varepsilon$ и параллельно переносим их.

Шаг 2: Для единичного куба D, параллельно перенесенного в D', имеем $\overline{\mathfrak{N}_{2^{-N}\Lambda}}(D') \geqslant 2^{Nn} \geqslant \underline{\mathfrak{N}_{2^{-N}\Lambda}}(D')$, что дает $\overline{\mathfrak{V}_{2^{-N}\Lambda}}(D') \geqslant 1 \geqslant \underline{\mathfrak{V}_{2^{-N}\Lambda}}(D')$. Переходя к пределу, получаем $\operatorname{Vol}_\Lambda(D') = 1$. ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Два многогранника A, B называются **равносоставленными**, если их можно разрезать на многогранники $A_1, ...A_k$, $B_1, ...B_k$ таким образом, что A_i конгруэнтен B_i для любого i. Если к тому же A_i переводятся в B_i параллельными переносами, A и B называются **параллельно равносоставленными.**

СЛЕДСТВИЕ: Два многогранника, которые параллельно равносоставлены, имеют одинаковый объем.

Параллелепипед

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Параллелепипед** в $\mathbb{R}^n$ есть многогранник, полученный как пересечение n областей D_i, где каждая D_i задается уравнением $b \leqslant L_i(x) \leqslant a$, для линейных функций L_i. **Координатный параллелепипед** есть параллелепипед, заданный координатными проекциями L_i.

Теорема 1: Объем $\operatorname{Vol}_\Lambda(D)$ параллелепипеда инвариантен при действии группы $SL(n,\mathbb{R})$ матриц с определителем 1.

Доказательство. Шаг 1: Группа $SL(n,\mathbb{R})$ порождена **элементарными матрицами**, т.е. матрицами, у которых на диагонали стоит 1, на i,j-м месте стоит z, $i \neq j$, а на всех остальных местах – 0 **(см. следующий слайд).**

Шаг 2: Каждая такая матрица **переводит координатный куб в параллелепипед, который параллельно равносоставлен ему,** а значит, не меняет объем. ■

СЛЕДСТВИЕ: Два многогранника, которые равносоставлены, имеют одинаковый объем.

Элементарные матрицы порождают $SL(n,\mathbb{R})$

Теорема 2: Группа $SL(n,\mathbb{R})$ порождена элементарными матрицами, т.е. матрицами, у которых на диагонали стоит 1, на i,j-м месте стоит $z\in\mathbb{R}$, $i\neq j$, а на всех остальных местах – 0.

Доказательство. Шаг 1: $SL(2,\mathbb{R})$ порождена элементарными матрицами **(проверьте это).** Из этого следует, что любая диагональная матрица с определителем 1 порождена элементарными матрицами.

Шаг 2: Пусть $A\in SL(n,\mathbb{R})$ переводит стандартный базис $v_1,...,v_n$ в $w_1,...,w_n$. Для каждого из w_i, существует линейная комбинация $\sum_j a_j w_j, j\neq i$ такая, что $w_i-\sum a_j w_j=\lambda_k v_k$. **Поэтому базис $w_1,...,w_n$ переводится в $w_1,...,w_{j-1},\lambda_k v_k, w_{j+1},...,w_n$ элементарными матрицами.**

Шаг 3: Применив индукцию, мы переведем $w_1,...,w_n$ элементарными матрицами в базис вида $\lambda_1 v_{i_1},...,\lambda_n v_{i_1}$, где $\prod\lambda_i=\pm 1$. Применив шаг 1, получим, что A **после домножения на элементарные матрицы дает оператор Σ вида $v_i\to \pm v_{\sigma_i}$, где $(\sigma_1,...,\sigma_n)$ – перестановка.**

Шаг 4: Доказательства теоремы 1 на этом закончено, потому что Σ переводит заданный параллелограмм в координатный. Для доказательства теоремы 2, осталось представить заданную четную перестановку в виде произведения элементарных матриц. **Сделайте это!** ■